OTEYZA • LAM • HERNÁNDEZ • CARRILLO

ÁLGEBRA

TERCERA EDICIÓN



PEARSON
Prentice Hall ®

Álgebra

Álgebra

Tercera edición

Elena de Oteyza de Oteyza
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Emma Lam Osnaya
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Facultad de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac
Escuela Superior de Físico Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

OTEYZA, ELENA, *et al.*

Álgebra. Tercera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN 13: 978-970-26-1132-5

Área: Bachillerato

Formato: 21 × 27 cm   Páginas: 448

Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Miguel B. Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

TERCERA EDICIÓN, 2007

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

ISBN 10: 970-26-1132-6
ISBN 13: 978-970-26-1132-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07

PEARSON
Educación ®

Contenido

Prólogo

CAPÍTULO 1 Conjuntos 1

1.1 Definiciones y notaciones 1
1.2 Subconjuntos 4
1.3 Diferencia de conjuntos. Complemento 6
1.4 Unión de conjuntos 8
1.5 Intersección de conjuntos 10
1.6 Propiedad distributiva 11
1.7 Leyes de De Morgan 13
1.8 Producto cartesiano 18
1.9 Ejercicios de repaso 20

CAPÍTULO 2 Sistemas de numeración 21

2.1 Introducción 21
2.2 Sistema decimal 26
2.3 Bases 26
2.4 Operaciones en sistema binario 30
2.5 Operaciones en otras bases 34
2.6 Sistema binario y las computadoras 40

CAPÍTULO 3 El campo de los números reales 43

3.1 Introducción 43
3.2 Los números enteros 45
3.3 Los números reales 62
3.4 Intervalos 84

3.5 Leyes de los exponentes 86
3.6 Logaritmos 89
3.7 Ejercicios de repaso 98

CAPÍTULO 4 Introducción al álgebra 101

4.1 Expresiones algebraicas 101
4.2 Lenguaje algebraico 102
4.3 Evaluación de expresiones algebraicas 104
4.4 Términos semejantes 107
4.5 Ejercicios de repaso 109

CAPÍTULO 5 Resolución de ecuaciones de primer grado 111

5.1 Ecuaciones de una sola variable 111
5.2 Ecuaciones y multiplicación 116
5.3 Ecuaciones de una sola variable en ambos miembros 121
5.4 Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de primer grado 125
5.5 Resolución de problemas 134
5.6 Problemas con números enteros 138
5.7 Porcentaje 140
5.8 Desigualdades 145
5.9 Desigualdades y el valor absoluto 151
5.10 Desigualdades y la recta 154
5.11 Ejercicios de repaso 157

CAPÍTULO 6 Polinomios 161

6.1 Polinomios 161
6.2 Producto de potencias 162
6.3 Potencias de potencias 165
6.4 Potencia de un producto 168
6.5 División de monomios 170
6.6 Grado de un polinomio 173
6.7 Suma y resta de polinomios 175
6.8 Producto de un polinomio por un monomio 178
6.9 Multiplicación de polinomios 181
6.10 Ejercicios de repaso 185

CAPÍTULO 7 Productos notables y factorización 187

7.1 Cuadrado de una suma: $(a + b)^2$ 187
7.2 Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$ 189
7.3 Producto de una suma por una diferencia: $(a + b)(a - b)$ 192
7.4 Producto de $(a + b)(a + c)$ 194
7.5 Otros productos notables 197
7.6 Factorización de polinomios 199

7.7 Factorización por agrupamiento 201
7.8 Factorización de trinomios: $x^2 + bx + c$ 206
7.9 Casos particulares 211
7.10 Factorización de trinomios: $ax^2 + bx + c$ 216
7.11 Combinación de distintos métodos de factorización 223
7.12 Factorización de otros productos notables 225
7.13 Ejercicios de repaso 229

CAPÍTULO 8 Expresiones racionales 231

8.1 Introducción 231
8.2 Simplificación de expresiones racionales 235
8.3 Multiplicación de expresiones racionales 239
8.4 División de expresiones racionales 241
8.5 Suma y resta de expresiones racionales con el mismo denominador 243
8.6 Suma y resta de expresiones racionales con distinto denominador 246
8.7 División de polinomios 250
8.8 División de polinomios de varias variables 254
8.9 División sintética 257
8.10 Expresiones algebraicas complicadas 265
8.11 Desigualdades y expresiones racionales 268
8.12 Ejercicios de repaso 273

CAPÍTULO 9 Radicales 275

9.1 La raíz cuadrada 275
9.2 Raíces de orden superior 288
9.3 Racionalización (de denominadores) de expresiones con radicales 292
9.4 Reducción de expresiones radicales 295
9.5 Exponentes negativos y fraccionarios 297
9.6 Ecuaciones con radicales 304
9.7 Los números complejos 309
9.8 Operaciones con números complejos 311
9.9 Raíces cuadradas de números reales negativos 312
9.10 Ejercicios de repaso 315

CAPÍTULO 10 Ecuación general de segundo grado 317

10.1 Cómo completar cuadrados 317
10.2 Solución de la ecuación general de segundo grado 322
10.3 Aplicaciones 332
10.4 Desigualdades de segundo grado 337
10.5 Ejercicios de repaso 345

CAPÍTULO 11 Sistemas de ecuaciones 347

11.1 Relación entre ecuaciones simultáneas e intersección de rectas 347
11.2 Método de igualación 350
11.3 Método de suma y resta 355
11.4 Método de sustitución 360
11.5 Otros sistemas de ecuaciones simultáneas 364
11.6 Método de Gauss 368
11.7 Determinantes 374
11.8 Balanceo de ecuaciones químicas 381
11.9 Sistema de una ecuación de primer grado y una de segundo grado en dos variables 384
11.10 Desigualdad 389
11.11 Ejercicios de repaso 399

Respuestas a los ejercicios 401

Índice 435

Prólogo

Este libro ofrece un curso completo sobre álgebra elemental. Mediante una selección adecuada de los temas puede ser usado desde el nivel de secundaria hasta el primer año de diversas carreras universitarias.

En esta tercera edición se ha incluido al final de cada capítulo (excepto el segundo), antes de los ejercicios de repaso, un resumen con lo que consideramos lo más importante o útil y susceptible de presentarse de manera breve. En el capítulo 2, *Sistemas de numeración,* se agregó, en la parte correspondiente al sistema maya, el algoritmo de la multiplicación usado por esa civilización. En el capítulo 5 se añadió la sección *Ecuación (pendiente-ordenada al origen) de la recta* como auxiliar para la interpretación de la resolución de las ecuaciones de primer grado. En el capítulo 8, *Expresiones racionales*, consideramos conveniente reestructurar la presentación de la división sintética, que es un algoritmo muy sencillo para hacer ciertas divisiones entre polinomios, y que usamos, por ejemplo, para comprobar si un número en particular es raíz de un polinomio dado. En el capítulo 10 incluimos las secciones *Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado* y *Algunos elementos de la parábola*, las que, por supuesto, están estrechamente ligadas. En toda la obra se han incluido muchas más notas al margen con información que creemos será interesante para los lectores. Todo esto aunado a los cambios y adiciones hechos en la segunda edición. Nuestra intención ha sido el mejoramiento del libro y que éste satisfaga una mayor cantidad de necesidades y expectativas.

Desde su edición original, el objetivo de este texto ha sido el de mostrar que el álgebra, desde su nivel básico, es una herramienta muy útil tanto para el estudio de otras ramas de la matemática como de otras ciencias. Para motivar la presentación y el desarrollo de los conceptos y métodos del álgebra, cada sección inicia con un problema cuya naturaleza varía de acuerdo al tema: algunos tratan sobre física o química, mientras que otros se refieren a economía o astronomía; inclusive algunos son presentados mediante ingeniosas y sencillas rimas. Por ejemplo, en el capítulo 11 se hace una presentación del método algebraico para el balanceo de ecuaciones; tema al que por lo general no se le da importancia en los cursos de química, en donde se prefieren los métodos de tanteo y de oxidación-reducción, que quizás son eficientes cuando las ecuaciones son sencillas, pero que no son prácticos cuando éstas se hacen complejas.

Se propicia que el lector adquiera la habilidad de traducir al lenguaje algebraico los problemas planteados en lenguaje ordinario y que manipule de manera correcta las variables y los números. Se vincula el proceso de dominio de las reglas y técnicas básicas del álgebra con la resolución de problemas que muestran la variedad de

situaciones en las que ésta es aplicable con todo el poder y la generalidad que sus métodos poseen.

Cada sección inicia con un problema que, una vez resuelto, da pie a una explicación de los nuevos conceptos y técnicas que intervinieron en su solución; asimismo, para reforzar el buen uso de los nuevos conocimientos, se presentan otros ejercicios con sus respectivas soluciones. Las secciones son cortas con el fin de que los conocimientos recién adquiridos puedan asimilarse y ponerse en práctica a la mayor brevedad.

Prácticamente todos capítulos finalizan con dos secciones: *Resumen* y *Ejercicios de repaso*; en esta última se debe usar no sólo el material visto en el capítulo, se requieren los conocimientos previamente estudiados. Ambas ofrecen la oportunidad de reafirmar lo aprendido y propician su reflexión sobre los temas expuestos.

El material de los primeros tres capítulos es básico para la formación de un estudiante, su dominio es vital para un curso de álgebra. Sin embargo, si dicho material ya es del dominio del alumno, puede omitir su presentación en la clase; aunque lo recomendable en ese caso es dedicarle algún tiempo para presentarlo a manera de repaso.

A lo largo del libro se aprovecha la intuición geométrica y se muestra la vinculación de la geometría con el álgebra. Dos de las nuevas adiciones al libro se deben a esta intención de ligar los problemas algebraicos con la geometría. Por ejemplo, las leyes de los signos para la multiplicación se justifican geométricamente, y al tratar los sistemas de ecuaciones lineales, y de una ecuación lineal y una cuadrática, se hace ver que resolverlos equivale a encontrar la intersección de dos o más rectas, y la de una recta con una parábola.

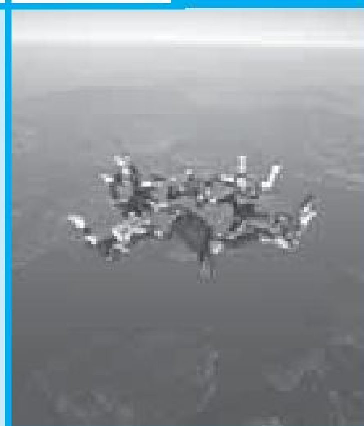
Los más de 3750 ejercicios y problemas de que consta el libro ofrecen al profesor la oportunidad de seleccionar un buena cantidad para trabajar en clase, dejar otros para que el alumno los resuelva de manera individual, y todavía tendrá a su disposición material suficiente para preparar los exámenes respectivos.

Como apoyo al estudiante, al final del libro aparecen las respuestas a todos los ejercicios; esto le permitirá valorar de manera personal sus avances. En este punto es aconsejable que a medida que sus aciertos le hagan confiar más en su destreza, evite, en lo posible, la confrontación de sus resultados con la respuesta ofrecida.

capítulo

1

Conjuntos



1.1 Definiciones y notaciones
1.2 Subconjuntos
1.3 Diferencia de conjuntos. Complemento
1.4 Unión de conjuntos
1.5 Intersección de conjuntos
1.6 Propiedad distributiva
1.7 Leyes de De Morgan
1.8 Producto cartesiano
1.9 Ejercicios de repaso

La mente humana tiene una inclinación a agrupar personas, animales, cosas, ideas. En matemáticas esta tendencia a reunir se representa con el concepto de conjunto. Los conjuntos aparecen en muchas formas: conjuntos de números, conjuntos de soluciones, conjuntos de ecuaciones. Las ideas básicas sobre este tema fueron desarrolladas por el matemático alemán George Cantor (1845-1918). En este capítulo estudiaremos los conceptos básicos por medio de ejemplos y aplicaciones de la aritmética y el álgebra.

1.1 Definiciones y notaciones

Encontrar todos los divisores positivos de 28; es decir, los enteros positivos que dividen a 28.

Solución: Observamos que la respuesta es una colección de números que denotamos como:

$$\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}.$$

Un *conjunto* es una colección de objetos. Los objetos en el conjunto se conocen como *elementos* del conjunto y se dice que pertenecen o que están en el conjunto.

En general usamos letras mayúsculas, A, B, C, … X, Y, Z, para denotar los conjuntos, y letras minúsculas, a, b, c, … x, y, z, para denotar los objetos. Escribimos $x \in A$ para indicar que el elemento x pertenece al conjunto A. Escribimos $x \notin A$ si x no pertenece a A.

Hay algunos conjuntos particulares que tienen asignada una letra especial. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales (los enteros no negativos) se denota por $\mathbb{N}$ y el de todos los números enteros (positivos, negativos y el cero) por $\mathbb{Z}$. Con $\mathbb{R}$ se denota el conjunto de todos los números reales.

Para referirse a un conjunto se usan básicamente dos maneras. La primera consiste en escribir la lista de todos sus elementos, encerrada entre llaves, tal como lo hicimos en el ejemplo introductorio en que escribimos:

$$\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

para referirnos a los divisores positivos del número 28.

La segunda se obtiene al escribir entre llaves expresiones que caracterizan a los elementos del conjunto; por ejemplo, si A es nuevamente el conjunto de todos los divisores positivos de 28, entonces podemos escribir:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide a } 28\}$$

lo cual se lee: A es el conjunto de todos los números naturales n ($n \in \mathbb{N}$) tales que ($|$) n divide a 28. Observa en este ejemplo que para que un objeto n pertenezca a A debe tener dos características:

- n debe ser un número natural.
- n debe ser divisor de 28.

Algunas veces se usa una tercera manera de describir un conjunto particular, la cual, en cierto modo, mezcla las dos anteriores. Por ejemplo, en ocasiones escribimos:

$$\{1,2,3,\ldots\}$$

para referirnos al conjunto de los números enteros positivos.

En este tipo de notación se dan los primeros términos de la lista de los elementos que conforman el conjunto y con ellos se establece el criterio para determinar el resto de los elementos del conjunto. Los puntos suspensivos se usan para indicar que la lista continúa indefinidamente.

Otro ejemplo del tipo anterior es el siguiente:

$$C=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\ldots\right\}$$

lo cual nos da una manera económica para referirnos al conjunto

$$C=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p \text{ es un natural impar, } q=p+1\right\}$$

En matemáticas es frecuente que nos interesemos en conjuntos que están formados por las soluciones de ciertas ecuaciones o desigualdades. En algunos de los siguientes ejemplos nos encontraremos con conjuntos de este tipo.

EJEMPLOS

1. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$; es decir,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p \text{ es un entero y } q \text{ es un natural positivo}\right\}.$$

¿Pertenece -5 al conjunto $\mathbb{Q}$?

Solución: En vista de que $-5=\frac{-5}{1}$ y de que -5 es un entero y 1 es natural positivo, concluimos que $-5\in\mathbb{Q}$.

2. Llamamos C al conjunto de los enteros pares mayores que -7 y menores que 9. Escribir el conjunto C usando una de las notaciones vistas anteriormente.

Solución: Una solución es:

$$C=\{-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}.$$

Otra solución es:

$$C=\{z\in\mathbb{Z}\mid -7<z<9 \text{ y } z \text{ es par}\}.$$

¿Se te ocurre otra manera de presentar a C?

3. Comprobar que 0 no pertenece al conjunto A formado por todos los enteros cuyo cuadrado es mayor que 0.

Solución: Tenemos que

$$A=\{z\in\mathbb{Z}\mid z^2>0\}$$

y $0 \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, $0^2 = 0$ y, por tanto, 0 no cumple la condición de que su cuadrado supere al 0, por lo que $0 \notin A$

4. Sabemos que π es un número mayor que 3.14 y menor que 3.1416. Consideremos el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 4\}.$$

Encontrar un número real que sea elemento de B y otro que no lo sea.

Solución: Para que un elemento x pertenezca a B se requiere que tenga tres propiedades:

- $x \in \mathbb{R}$.
- $\pi < x$.
- $x < 4$.

Basta que x no cumpla una de estas tres propiedades para que x no esté en B.
Así, una solución es:
3.5 es elemento de B, ya que $3.5 \in \mathbb{R}$, $\pi < 3.1416 < 3.5$ y $3.5 < 4$.
3 no pertenece a B, puesto que $3 < 3.14 < \pi$, así que no cumple la segunda de las propiedades antes mencionadas.

5. Determinar el conjunto B de naturales que satisfacen la desigualdad $n^2 \leq 36$.

Solución: Para n natural, la ecuación $n^2 \leq 36$ equivale a $n \leq 6$, por lo que

$$B = \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

6. ¿Cuántos elementos pertenecen a $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = 0\}$?

Solución: Como vimos en el ejemplo 3, $0 \in C$. Más aún, 0 es el único elemento de C, ya que si $z \in \mathbb{Z}$ y $z \neq 0$ entonces z es positivo o z es negativo y en cualquiera de estos dos casos se cumple, por las leyes de los signos, que $z^2 > 0$.

Así, C tiene un solo elemento: el 0.

1.1.1 Conjunto vacío

¿Cuántos elementos pertenecen a $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = 0 \text{ y } z \neq 0\}$?

Solución: De acuerdo con el último ejemplo de la sección 1.1, no hay un entero z que satisfaga las dos condiciones siguientes: $z^2 = 0$ y $z \neq 0$. Por tanto, la respuesta es: cero elementos pertenecen a C, o, dicho de otra forma, C no tiene elementos.

En principio resulta un poco extraño considerar un conjunto como el del último ejemplo; pero es muy útil disponer de un conjunto sin elemento alguno. Dicho conjunto se conoce como el *conjunto vacío* y se denota por $\varnothing$. Así, como respuesta al ejemplo anterior podemos escribir:

$$\varnothing = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 = 0 \text{ y } z \neq 0\}.$$

1.1.2 Cardinalidad de un conjunto

Si hay un entero $n \geq 0$ tal que el conjunto A tiene n elementos, entonces decimos que A es un *conjunto finito* y que su *cardinalidad* es n. Si para el

conjunto A no existe tal entero, entonces decimos que A es un conjunto infinito.

De los conjuntos hasta ahora considerados, unos son finitos y otros infinitos; así:

- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide a } 28\} = \{1,2,4,7,14,28\}$, es finito y su cardinalidad es 6.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son infinitos.
- $\varnothing$ es finito y tiene cardinalidad 0.

Si dos conjuntos finitos A y B tienen la misma cardinalidad, entonces puede establecerse entre ellos una *correspondencia biunívoca*, es decir, puede asociarse a cada elemento de A un único elemento de B, de modo tal que a elementos distintos de A corresponden elementos distintos de B y son usados todos los elementos de B. Cuando esto sucede se dice que los *conjuntos son equivalentes* y se escribe $A \sim B$.

Por ejemplo, los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c\}$ tienen ambos cardinalidad 3; por tanto, $A \sim B$. La siguiente tabla muestra una correspondencia biunívoca entre ellos:

1	$\rightarrow$	a
2	$\rightarrow$	b
3	$\rightarrow$	c

Con la flecha $\rightarrow$ se indica cuál es el asociado a cada número; así, al 1 se le asocia la letra a al 2 la b y al 3 la c. Por supuesto, hay diversas maneras de establecer una correspondencia biunívoca.

Observación:

$\{1,2,3\}$ y $\{a,b,c\}$ tienen el mismo número de elementos, pero los elementos de uno de los conjuntos son distintos de los del otro: en un caso se trata de números y en otro de letras.

EJEMPLOS

1. Encontrar la cardinalidad del conjunto C que consta de los números enteros mayores que -2 y menores que 11.

   Solución: Tenemos

   $$C = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

   y su cardinalidad es 12.

2. Decir si los conjuntos $A = \{-5,3,2,-7\}$ y $B = \{x,c,d,y,z\}$ son equivalentes.

   Solución: La cardinalidad de A es 4 y la de B es 5; por tanto, A y B no son equivalentes.

1.2 Subconjuntos

Si A es el conjunto de todos los animales que están en el zoológico de Chapultepec y B es el conjunto de camellos que están en dicho zoológico, ¿qué relación se observa entre estos dos conjuntos?

Solución: Cada elemento de B es un camello (animal) que está en zoológico de Chapultepec; por tanto, es también un elemento de A.

En una situación de este tipo decimos que B es un subconjunto del conjunto A y escribimos $B \subset A$

En general, se dice que un conjunto B es un *subconjunto* del conjunto A, o bien que B está contenido en A si todo elemento de B pertenece al conjunto A; y en tal caso se escribe:

$$B \subset A, \text{ o bien, } A \supset B.$$

Para señalar que no se cumple lo anterior, o sea que B no está contenido en A escribimos $B \not\subset A$ lo que significa que hay al menos un elemento de B que no está en A. Por ejemplo;

$$\left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \not\subset \mathbb{Z}$$

ya que $\frac{1}{2}$ no es un entero.

Al trabajar con conjuntos lo hacemos normalmente en un contexto, o podemos referirlo a uno en especial, en el que todos los conjuntos considerados son subconjuntos de uno particular llamado *conjunto universal.* Por supuesto, tal conjunto varía de acuerdo con la situación concreta en la que estemos trabajando, y su elección es convencional. En el problema inicial de esta sección podemos considerar como conjunto universal al de todos los animales del planeta, o bien podríamos limitarlo al de todos los animales en México, etc. En cualquier discusión particular debe quedar claro si se ha convenido en un conjunto universal y cuál es éste.

Jonh Venn (1834-1923)
Este matemático británico hizo estudios de lógica y escribió varios libros sobre este tema. Es más conocido por los diagramas para la representación de conjuntos que llevan su nombre, aunque éstos habían sido usados cien años antes por Euler.

Una representación "gráfica" de los conjuntos que permite visualizar algunas relaciones entre ellos nos la proporcionan los *diagramas de Venn,* llamados así en honor de John Venn; estos diagramas consisten en discos que se usan para representar conjuntos, todos ellos incluidos en una región rectangular que representa al conjunto universal. Así, podemos representar la situación

$$A \subset B$$

con el siguiente diagrama

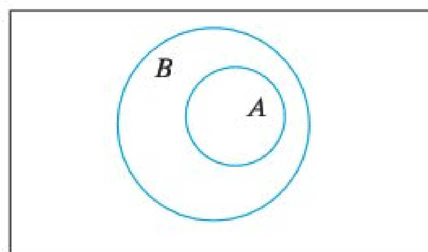


Figura 1.1 Diagrama de Venn

Para cualquier conjunto A se cumplen las siguientes condiciones:

- $A \subset A.$
- $\varnothing \subset A.$

Dos *conjuntos* A y B *son iguales* si $A \subset B$ y $B \subset A$ y entonces escribimos $A = B$.

Si A no es igual a B, entonces escribimos $A \neq B$.

Finalmente, si $B \subset A$ y $B \neq A$, entonces decimos que B es un *subconjunto propio* de A y denotamos este hecho escribiendo $B \subsetneq A$.

Dos conjuntos A y B se llaman *comparables* si se cumple al menos una de las siguientes dos condiciones:

- $A \subset B$.
- $B \subset A$.

Si ninguna de esas dos condiciones se satisface, entonces se dice que los conjuntos son *incomparables.*

EJEMPLOS

1. Probar que los conjuntos $A = \{-3, 4.5, 15, \frac{7}{8}\}$ y $B = \{-3, 15, 4.5\}$ son comparables, pero no iguales.

Solución: Cada uno de los elementos de B es también elemento de A, o sea, $B \subset A$. Por tanto, A y B son comparables, y son distintos porque

$$\frac{7}{8} \in A \quad \text{y} \quad \frac{7}{8} \notin B,$$

o sea porque $A \not\subset B$. Así, $B \subsetneq A$.

2. Determinar si los conjuntos $A = \{12, 8, 4\}$ y $B = \{12, 9, 4\}$ son comparables.

Solución: Debido a que $8 \in A$ y $8 \notin B$, tenemos: $A \not\subset B$.

Como $9 \in B$ y $9 \notin A$, tenemos: $B \not\subset A$.
Por consiguiente, A y B son incomparables.

3. Probar que $A \subset B$, si $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid -2 < z < -\frac{1}{2}\}$ y $B = \{z \in \mathbb{Z} \mid -\frac{5}{2} < z < 0\}$.

Solución: Usamos la correspondencia de los números y puntos de la recta.

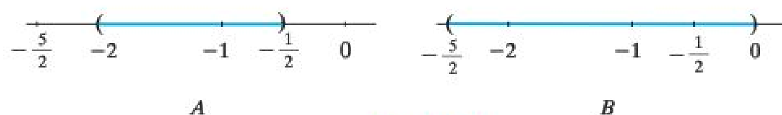


Figura 1.2

Si $z \in A$, entonces z es un entero que satisface las desigualdades

$$-2 < z < -\frac{1}{2}.$$

Como $-\frac{5}{2} < -2$ y $-\frac{1}{2} < 0$ tenemos

$$-\frac{5}{2} < -2 < z < -\frac{1}{2} < 0;$$

o sea, $z \in B$. Por tanto, $A \subset B$. ■

1.3 Diferencia de conjuntos. Complemento

Determinar el conjunto C de los números naturales pares con cuadrado mayor que 36.

Solución: Llamamos A al conjunto de naturales pares, es decir,

$$A = \{0, 2, 4, 6, ...\}.$$

Para obtener el conjunto C, debemos quitar de A aquellos elementos cuyo cuadrado no es mayor que 36; es decir, hay que quitar los pares que están en el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 36\}.$$

Esta operación la denotamos por $A \setminus B$, así $C = A \setminus B$.
Como vimos en el ejemplo 5 de la sección 1.1,

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y por tanto,

$$C = A \setminus B = \{8, 10, ...\}.$$

En general, para dos conjuntos A y B se define la *diferencia* $A \setminus B$ como el conjunto formado por los elementos de A que no están en B, o sea

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Cuando $B \subset A$, entonces el conjunto diferencia $A \setminus B$ se llama el *complemento de B respecto a A.* Esto se representa en el siguiente diagrama:

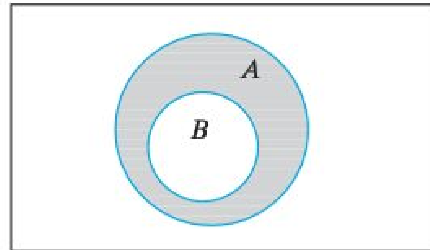


Figura 1.3 La parte sombreada es $A \setminus B$

Si se ha fijado un conjunto universal W, entonces el complemento de cualquier conjunto B con respecto a W se denota simplemente como B^c, es decir $B^c = W \setminus B$.

Así, por ejemplo, si tomamos a $\mathbb{Z}$ como el conjunto universal y llamamos P al conjunto de los números pares, entonces denotamos por P^c al complemento de P con respecto a $\mathbb{Z}$, en lugar de escribir $\mathbb{Z} \setminus P$.

EJEMPLOS

1. Tomemos a $\mathbb{N}$ como el conjunto universal y sea $A = \{2, 4, 6, ...\}$. Encontrar A^c.

   Solución: A es el conjunto de los números naturales pares positivos, por tanto A^c está formado por 0 y los naturales que no son pares, es decir,

   $$A = \{0, 1, 3, 5, ...\}.$$

2. Llamemos a un entero positivo un "cuadricubo" si es el cuadrado de otro natural y el cubo de un tercero; por ejemplo, 64 es un cuadricubo ya que $64 = 8^2$ y $64 = 4^3$.

Observamos que A es el conjunto de las potencias de 2.

Tomemos $A=\{2,4,8,...\}$, es decir, A está formado por potencias de 2, y B el conjunto formado por los primeros 3 cuadricubos. Determinar $A \setminus B$.

Solución: Los primeros tres cuadricubos son 1^6, $2^6=64$ y $3^6=729$. De ellos sólo 2^6 es potencia de 2. Por tanto,

$$A \setminus B=\{2,4,8,16,32,128,...\}.$$

1.3.1 Ejercicios

En cada caso escribe el conjunto exhibiendo todos los elementos.

1. $\left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \text{ es un entero positivo entre 1 y 13 inclusive}\right\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$
3. $\{2n-5 \mid n \text{ es un número entero entre } -3 \text{ y } 6 \text{ inclusive}\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 = 1\right\}$

En cada caso describe el conjunto que se indica.

5. El conjunto de los números enteros que satisfacen $(x+2)^2>0$
6. El conjunto de números reales que satisfacen la ecuación $(x-5)(x-3)=0$
7. El conjunto de números racionales que satisfacen la ecuación $(x+7)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

Coloca $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ o $\supset$ en cada espacio en blanco de manera que la proposición sea cierta.

8. -6 ____ $\{-10, -9, -6, -3, 0, 5\}$
9. $\{7, -11, 16\}$ ____ $\{1, -7, 11, -14, 16\}$
10. $\{-3, 0\}$ ____ $\{0, -1, -3, 1, 3\}$
11. $\frac{3}{5}$ ____ $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}\right\}$
12. $\{-4, 4\}$ ____ $\mathbb{Z}$
13. $\mathbb{Z}$ ____ $\{-1, -2, -3, -4\}$
14. $-\pi$ ____ $\{2\pi, \pi^2, -2\pi, \pi, 6\pi\}$
15. 8 ____ $\mathbb{Z}$

En cada caso encuentra $A \setminus B$. Si $A=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y

16. $B=\{-5, -4, -3, -2, -1\}$
17. $B=\{-2\}$
18. $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
19. $B=\{-3, 1, 5\}$

Si el conjunto universal es el conjunto $\left\{-11, -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, 2, \pi, 0, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}, \frac{6}{5}, \Theta, a, b, 8\right\}$. Encuentra A^c si:

20. $A=\left\{-11, -1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \pi, 0, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \Theta, a, 8\right\}$
21. $A=\left\{-1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \pi, 0, \frac{6}{5}, \Theta, b, 8\right\}$
22. $A=\left\{-11, -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, 2, \pi, 0, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \Theta, a, 8\right\}$
23. $A=\left\{-1, -11, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, 2, \pi, \frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \Theta, a, 8\right\}$
24. Si A es el conjunto formado por todos los triángulos, B es el conjunto de los triángulos rectángulos y C el de los triángulos escalenos, determina si cada uno de los conjuntos anteriores es subconjunto de alguno de los otros o no. Analiza todas las posibilidades.

1.4 Unión de conjuntos

Los números ganadores en la rifa celebrada el miércoles fueron: 1, 7, 23, 35, 37 y 43, y en la del domingo fueron: 7, 10, 14, 35, 40 y 41. Encontrar el conjunto de los números que formaron parte de los ganadores en alguna de las dos rifas.

Solución: Los conjuntos de números ganadores son:

$$A = \{1, 7, 23, 35, 37, 43\}$$
$$B = \{7, 10, 14, 35, 40, 41\}.$$

Si llamamos C al conjunto buscado, tenemos:

$$C = \{1, 7, 10, 14, 23, 35, 37, 40, 41, 43\},$$

ya que cada uno de los números que lo componen formaron parte de los números ganadores en los concursos del miércoles o del domingo; es decir, pertenecen a A o a B.

Observamos que los números 7 y 35 pertenecen tanto a A como a B.

La *unión de los conjuntos* A y B es el conjunto que está formado por los elementos que pertenecen por lo menos a uno de esos dos conjuntos. Este nuevo conjunto se denota por $A \cup B$. Es decir,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

$A \cup B$ se lee: A unión B.

Con esta notación la respuesta al problema introductorio la podemos escribir como:

$$C = A \cup B.$$

Enfatizamos que la expresión "$x \in A$ o $x \in B$" significa que x pertenece cuando menos a uno de los dos conjuntos: A o B. Por tanto, $x \in A \cup B$, en cualquiera de las siguientes tres situaciones:

- $x \in A$ y $x \notin B$.
- $x \notin A$ y $x \in B$.
- $x \in A$ y $x \in B$.

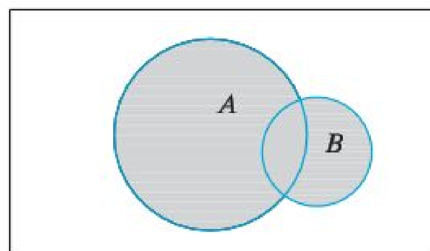


Figura 1.4 La parte sombreada es $A \cup B$

Así, para obtener $A \cup B$ basta con agregar a los elementos del conjunto A aquellos de B que no están en A.

Ejemplo

1. Encontrar $A \cup B$ si $A = \{\pi, x, -1\}$ y $B = \{z, y, -1\}$.

Solución: Cada uno de los elementos $\pi, x, z, y, -1$ está en al menos uno de los conjuntos A o B; de hecho -1 está en ambos. Por tanto,

$$A \cup B = \{\pi, x, -1, z, y\}.$$

Otro modo de llegar a esta igualdad es agregando a A los elementos z y y, que son los elementos de B que no están en A.

Observaciones:

Para cualquier pareja de conjuntos A y B se cumple:

- $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.
- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$.
- Si $A = B$, entonces $A \cup B = A = B$.
- Si $x \in A \cup B$, entonces sucede alguno de los siguientes hechos:
  - x pertenece a A, pero no a B
  - x pertenece a B, pero no a A
  - x pertenece a ambos.

Para tres conjuntos, A, B, C, definimos la unión de los tres como:

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C\}.$$

Es decir, la unión $A \cup B \cup C$ está formada por aquellos elementos que pertenecen al menos a uno de los tres conjuntos: A, B o C.

De manera similar puede definirse la unión de un mayor número de conjuntos.

1.5 Intersección de conjuntos

Supongamos que A es el conjunto de los divisores positivos de 28 y B el de los divisores positivos de 70. Encontrar el conjunto C formado por los enteros positivos que son divisores tanto de 28 como de 70.

Solución: Los conjuntos dados los podemos escribir como:

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$
$$B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}.$$

Los enteros positivos que son divisores tanto de 28 como de 70 son aquellos números que están tanto en A como en B; es decir,

$$C = \{1, 2, 7, 14\}$$

La *intersección de los conjuntos A y B* es el conjunto formado por los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B. Este nuevo conjunto se denota por $A \cap B$. Así,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

$A \cap B$ se lee: A intersección B.

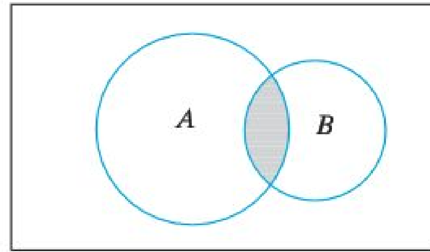


Figura 1.5 La parte sombreada es $A \cap B$

Así, en el ejemplo introductorio pudimos haber escrito:

$$C = A \cap B.$$

Cuando no hay elementos que pertenezcan a ambos conjuntos, A y B, entonces $A \cap B = \varnothing$ y decimos que la intersección es vacía o bien que los conjuntos son *ajenos*. Por ejemplo: $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{0,2,4,6,8\}$ son ajenos, ya que $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo

- Encontrar $A \cap B$ si $A = \{\pi, x, -1\}$ y $B = \{z, y, -1\}$.

Solución: El único elemento que está en ambos conjuntos es -1. Por tanto,

$$A \cap B = \{-1\}.$$

Otro modo de obtener la igualdad es suprimir de la lista de elementos de $A = \{\pi, x, -1\}$ los elementos π y x que no están en B.

Observaciones:

Para cualquier pareja de conjuntos A y B se cumple:

- $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.
- Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.
- Si $A = B$, entonces $A \cap B = A = B$.
- Si $x \in A \cap B$, entonces x pertenece a A y x también pertenece a B.

Para tres conjuntos A, B, C, definimos la intersección de los tres como:

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C\}$$

es decir, la intersección $A \cap B \cap C$ está formada por aquellos elementos que pertenecen a los tres conjuntos A, B, C.

De manera similar puede definirse la intersección de un mayor número de conjuntos.

1.6 Propiedad distributiva

Consideremos la siguiente situación:

A Pedro, Ana, Carlos, Felipe, Rosa y José les gusta la natación.

A Rosa, Felipe, Ernesto, Mario y Beatriz les gusta el baloncesto.

Rosa, Carlos, Felipe, Mario, Daniel y Sonia están en el club Pumitas.

De los niños que les gusta alguno de estos dos deportes, ¿quiénes están en Pumitas?

Solución: Podemos razonar de dos maneras:

1. Considerar a todos los niños a los que les gusta ya sea la natación o el baloncesto y fijarnos quiénes de ellos están en Pumitas.
2. Fijarnos en los niños a los que les gusta la natación y están en Pumitas; luego en los niños a los que les gusta el baloncesto y están en Pumitas y, finalmente, considerar a todos estos niños.

En el lenguaje de conjuntos, llamemos A al conjunto de niños a los que les gusta nadar, B a los que les gusta el baloncesto y C a los que están en Pumitas; entonces, utilizando únicamente las iniciales en minúsculas, tenemos:

$$A=\{p,a,c,f,r,j\},\ \ B=\{r,f,e,m,b\},\ \ C=\{r,c,f,m,d,s\}$$

En el primer razonamiento tenemos que

$$A\cup B=\{p,a,c,f,r,j,e,m,b\}$$

y después

$$(A\cup B)\cap C=\{r,c,f,m\}$$

así que a Rosa, Carlos, Felipe y Mario les gusta alguno de estos dos deportes y además están en Pumitas.

En el segundo razonamiento tenemos que

$$A\cap C=\{c,f,r\},\ \ B\cap C=\{r,f,m\}$$

y después

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{c,f,r,m\}$$

con lo que obtenemos el mismo resultado.

La intersección y la unión satisfacen las siguientes dos propiedades distributivas de conjuntos:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

que corresponde al ejemplo anterior.

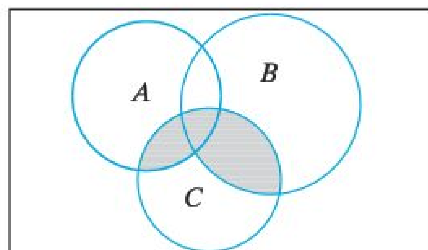


Figura 1.6

y

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

que se ilustra en el siguiente diagrama.

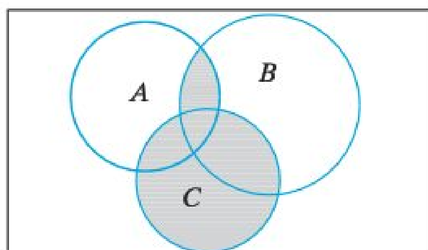


Figura 1.7

Ejemplo

- Verificar la primera propiedad distributiva si $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{-1,0,1,2,3\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} | \ x \text{ es par}\}$

Solución:

$$(A \cup B) = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$$

así,

$$(A \cup B) \cap C = \{\ 0,2,4\}.$$

Por otro lado,

$$(A \cap C) = \{2,4\} \ \text{ y } \ (B \cap C) = \{0,2\}$$

así,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{0,2,4\}$$

que es el mismo resultado antes obtenido.

1.7 Leyes de De Morgan

En la primera tirada de dos dados salen los números 1 y 6, y en una segunda tirada los números 1 y 4. ¿Cuál es el conjunto de los números que no salieron en ninguna de las dos tiradas?, ¿cuál es el conjunto de los números que no se repitieron?

Solución: Tomemos $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ como nuestro conjunto universal. Sean

$$A = \{1,6\}$$
$$B = \{1,4\}.$$

Primera pregunta. Los números que salieron en alguna de las dos tiradas forman el conjunto

$$A \cup B = \{1,4,6\}.$$

Por tanto, la respuesta a la primera pregunta es el complemento (respecto a X) de este conjunto:

$$(A \cup B)^c = \{2,3,5\}. \tag{1.1}$$

Otra forma de llegar a esta misma respuesta es tomar los conjuntos de los números que no salieron en la primera tirada:

$$A^c = \{2,3,4,5\},$$

y de los que no salieron en la segunda

$$B^c = \{2,3,5,6\}.$$

Entonces los que no salieron en ninguna de las dos tiradas forman la intersección de estos dos conjuntos, o sea:

$$A^c \cap B^c = \{2,3,5\}. \tag{1.2}$$

Si observamos de (1.1) y (1.2), tenemos que:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Segunda pregunta. Los números que se repitieron forman el conjunto

$$A \cap B = \{1\}.$$

Por tanto, los números que no se repitieron son los del conjunto

$$(A \cap B)^c = \{2,3,4,5,6\}. \tag{1.3}$$

También es posible llegar a esta respuesta del siguiente modo: los conjuntos de los números que no salieron en la primera ni en la segunda tiradas, respectivamente, son:

$$A^c = \{2,3,4,5\}$$
$$B^c = \{2,3,5,6\}.$$

Ninguno de los números que están en alguno de estos dos conjuntos se repitieron en las tiradas; por tanto, el conjunto buscado se puede escribir como

$$A^c \cup B^c = \{2,3,4,5,6\}. \tag{1.4}$$

Observamos de (1.3) y (1.4) que obtuvimos la siguiente igualdad:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las siguientes dos igualdades, válidas para dos conjuntos A y B cualesquiera, se conocen como las *leyes de De Morgan:*

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c, \end{aligned}$$

donde el complemento se toma con respecto a un mismo conjunto, digamos X.

Los siguientes diagramas de Venn corresponden a estas igualdades:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

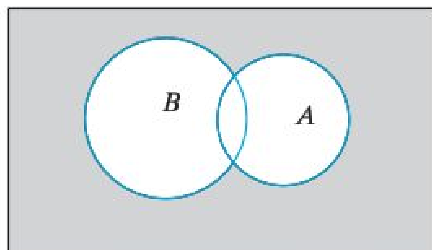


Figura 1.8 La parte sombreada es $(A \cup B)^c$

Augustus De Morgan
(1806-1871)
De Morgan mostraba una gran pasión por los hechos numéricos. En 1846 escribió que había notado que tenía la gran distinción de poder decir: Tuve x años de edad en el año x^2. Tenía 43 años en 1849. Las personas que hayan nacido en 1980 pueden afirmar algo parecido a la aseveración de De Morgan. Los nacidos en 1980 tendrán 45 años de edad en el año 2025 Observa que $45^2 = 2025$.

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

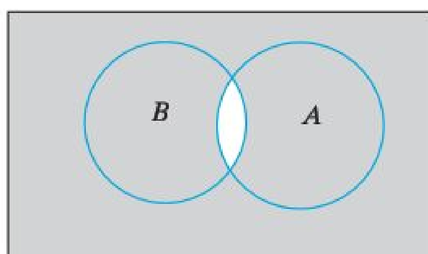


Figura 1.9 La parte sombreada es $(A \cap B)^c$

Al igual que en el ejemplo 3 de la página 6, en los siguientes se usa la correspondencia entre números y puntos de la recta. Resulta muy útil tener representados como segmentos ciertos conjuntos de números reales que son llamados intervalos. Por ejemplo, al intervalo abierto

$$(-1,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$$

le corresponde el segmento que une al -1 con 3, excluidos los extremos.

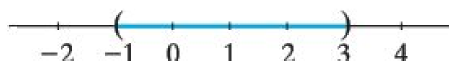


Figura 1.10

EJEMPLOS

1. Encontrar $A \cup B$, si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \le x \le 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.5 < x < \frac{22}{3}\}$.

Solución:

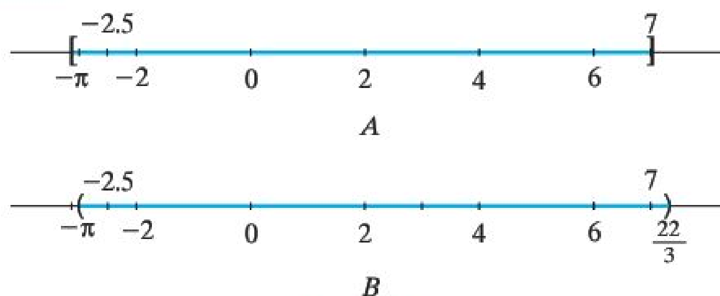


Figura 1.12 $A \cup B$

Puesto que:

$$-\pi < -3 \quad \text{y} \quad 7 < \frac{22}{3},$$

entonces:



Figura 1.11

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\pi \le x < \frac{22}{3}\right\}.$$

2. Si $A=\{x\in\mathbb{R}\,|-4<x<4\}$, $B=\{-4,0,2\}$ y $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3<x<5\}$, encontrar $(A\cup B)\cup C$.

Solución:

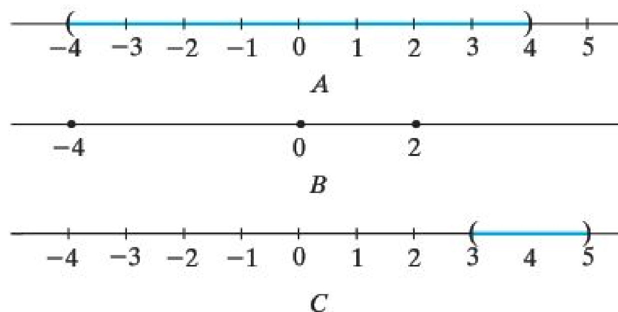


Figura 1.13

Observamos que los elementos 0 y 2 de B también pertenecen a A, en tanto que -4 sólo está en B; por lo que $A\cup B$ se obtiene simplemente agregándole a A el elemento -4:

$$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\leq x<4\}.$$

Al tomar ahora la unión de este conjunto con C, tenemos:

$$(A\cup B)\cup C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\leq x<5\}.$$

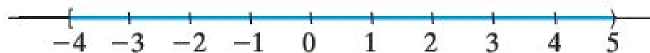


Figura 1.14 $(A \cup B) \cup C$

3. Si $A=\{x\in\mathbb{R}\,|-3\leq x\leq 4\}$ y $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{7}{2}<x<6\}$, encuentra $A\cap B$.

Solución:

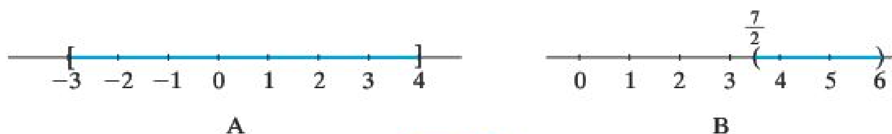


Figura 1.15

Observamos que los elementos de A corresponden a los puntos del segmento que va de -3 a 4 incluyendo sus extremos, y los elementos de B son los que corresponden al segmento que va de $\frac{7}{2}$ a 6 sin incluir sus extremos. Los puntos que están en ambos segmentos son los que están en el segmento que une a $\frac{7}{2}$ con 4 excluido el extremo inicial e incluido el extremo final. Así:

$$A\cap B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\left|\,\frac{7}{2}<x\leq 4\right.\right\}.$$



Figura 1.16 $A \cap B$

4. Verificar que se cumple la igualdad $\ni A \varnothing B(^c < A^c \cap B^c$, si $\mathbb{R}$ es el conjunto universal, $A < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 0' \ x' \ 3|$ y $B < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 2' \ x' \ 6|$.

Solución:

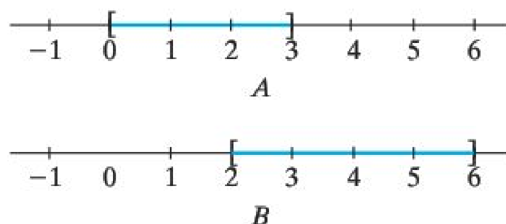


Figura 1.17

$$A \varnothing B < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 2' \ x' \ 3| \,.$$

Por tanto,

$$\ni A \varnothing B(^c < \ni\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 2' \ x' \ 3| (^c < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3| \,.$$

Por otra parte,

$$A^c < \ni\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 0' \ x' \ 3| (^c < \ni\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 0| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3| \,($$

$$B^c < \ni\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid 2' \ x' \ 6| (^c < \ni\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 6| \,(,$$

de donde

$$A^c \cap B^c < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 0| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 6|$$

y como

$$\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 0| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2| < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2|$$

y

$$\zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 6| < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3|$$

tenemos

$$A^c \cap B^c < \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x \ ; \ 2| \cap \zeta x \subseteq \mathbb{R} \mid x = 3|$$



Figura 1.18 $\ni A \varnothing B(^c < A^c \cap B^c$

Entonces, $\ni A \varnothing B(^c < A^c \cap B^c$.

1.7.1 Ejercicios

En cada caso contesta falso o verdadero.

1. $b \not\subset \{b\}$

2. $0 \subseteq \varnothing$

3. Si $A = B$ y $x \subseteq B$, entonces $x \subseteq A$

4. $\varnothing \not\subset \{0\}$

5. $\varnothing \not\subset \varnothing$

6. Si $A \cap B \not\subset A \varnothing B$, entonces $A < B$

Si $A=\{1,5,9\}$, $B=\{a,b,c,5\}$ *y* $C=\{-2,3,a,9\}$, *encuentra:*

7. $A\cup B$
8. $B\cap C$
9. $A\cap B$
10. $A\cup B\cup C$
11. $(B\cap C)\cup A$
12. $(A\cap B)\cup C$
13. $(A\cap C)\cup B$
14. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$
15. $A\cap B\cap C$
16. Si $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{2}\le x\le 4\}$ y $C=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{1}{2}\le x\le 3\}$. Verifica que $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
17. Ilustra $(A\cup B)\cap C$ utilizando los diagramas de Venn, en el caso en que $A\cap B=\varnothing=A\cap C$, pero $B\cap C\neq\varnothing$.

1.8 Producto cartesiano

Los apellidos paterno y materno los usamos en nuestros nombres como una pareja ordenada; así, no es lo mismo apellidarse Pérez López que López Pérez. Con los conjuntos de apellidos

$$P=\{\text{González, López}\}$$
$$M=\{\text{Pérez, Rodríguez, Salas}\}$$

forma las parejas de apellidos paterno-materno, donde el paterno es un elemento de P y el materno uno de M.

Solución: Para formar las parejas de apellidos paterno-materno seleccionamos el apellido González y lo combinamos con todos los de M; posteriormente hacemos lo mismo con el apellido López, con lo que obtenemos:

González Pérez
González Rodríguez
González Salas
López Pérez
López Rodríguez
López Salas

Este conjunto de parejas lo denotamos como $P\times M$.

En general, a una pareja ordenada con primer elemento a y segundo elemento b lo denotamos por (a,b). El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto de todas las *parejas ordenadas* que tiene su primer elemento en A y su segundo elemento en B; es decir,

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ y } b\in B\},$$

donde la igualdad entre parejas se define como:

$$(a,b)=(c,d) \text{ si } a=c \text{ y } b=d.$$

Observaciones:

- En general, $(a,b)\neq(b,a)$. Por ejemplo $(1,0)\neq(0,1)$ ya que $1\neq 0$.
- La igualdad $(a,b)=(b,a)$ se cumple sólo si $a=b$.
- $\varnothing\times B=A\times\varnothing=\varnothing$.
- En general, $A\times B\neq B\times A$.

EJEMPLOS

1. Encontrar $A \times B$ y $B \times A$ si $A = \{0,1\}$ y $B = \{0,2\}$.

Solución:

$$A \times B = \{(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\}.$$
$$B \times A = \{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\}.$$

Así, $A \times B \neq B \times A$.

2. Describir el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Solución:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que los elementos del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son las parejas ordenadas de números reales a las que podemos asociar puntos del plano cartesiano, y viceversa; por lo que decimos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el plano cartesiano.
Notación: Para simplificar escribimos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

3. Para $A = \{3,6,-2\}$ y $B = \{4,2\}$, localizar en el plano cartesiano los elementos del producto $A \times B$.

Solución:

$$A \times B = \{(3,4), (3,2), (6,4), (6,2), (-2,4), (-2,2)\}.$$

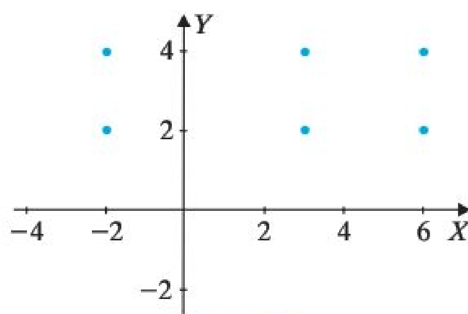


Figura 1.19

1.8.1 Ejercicios

Si $A = \{-1, 1, 0\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ encuentra:

1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $(A \times B) \cap (B \times A)$
4. $(A \times B) \cup (B \times A)$

Si $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{a, c\}$, encuentra:

5. $A \times B$
6. $A \times C$
7. $A \times (B \setminus C)$
8. $(A \times B) \setminus (A \times C)$
9. $C \times A$
10. $B \times A$
11. $B \times (C \cup A)$
12. $A \times (B \cup C)$

En los ejercicios 13 a 16, dibuja en el plano los elementos de los conjuntos que se indican, si $A = \{-1, -2, -3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

13. $A \times B$
14. $B \times A$
15. $A \times A$
16. $B \times B$

17. Si $A=\{-2, a, z\}$, $B=\{a,b\}$ y $C=\{3, b\}$, verifica que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

18. Si $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ y $B=\{-1, -2, -3\}$, ¿cuál es la cardinalidad de $A\times B$?

Resumen

- $A\setminus B=\{x\in A \mid x\notin B\}$
- $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ o } x\in B\}$
- $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ y } x\in B\}$
- $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
- $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
- $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \text{ y } b\in B\}$

1.9 EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 6, escribe el conjunto exhibiendo todos los elementos.

1. {números enteros pares entre − 5 y 11}
2. {números enteros cuyo cuadrado sea menor que 47}
3. {números primos entre 34 y 60}
4. {números enteros negativos mayores que − 8}
5. El conjunto de los estados de la República Mexicana que empiezan con la letra S
6. El conjunto de números enteros entre 0 y 300 que tienen exactamente dos unos

Coloca $\in$, $\notin$, $\subset$ o bien $\not\subset$ en cada espacio en blanco, de manera que la proposición sea cierta.

7. 9.4 _____ $\{1.2, 3.75, 9.3, 12, 13.7, 20\}$
8. $\frac{1}{32}$ _____ $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}\}$
9. $\{2, 4, 6, 8\}$ _____ $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
10. 0 _____ $\{6, 22, 3, 0, 8, 1\}$
11. $\{-5, -21, 93\}$ _____ {números enteros impares}
12. $\{5, 10, 12\}$ _____ $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

Si $A=\{x, y, z\}$, $B=\{y, z\}$ y $C=\{z\}$, encuentra:

13. $A\cup B$
14. $A\cup C$
15. $B\cup C$
16. $(A\cup B)\cup C$
17. $(A\setminus B)\cup C$
18. $(A\setminus C)\cup B$
19. $(A\cup B)\setminus C$
20. $(A\cup C)\setminus B$
21. $A\setminus(B\setminus C)$
22. $A\setminus(A\cup C)$
23. $A\setminus(B\cap C)$
24. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

En los ejercicios 25 a 32, si $A=\{-\pi,0,\pi\}$, $B=\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, $C=\{-\pi, 0, \frac{3\pi}{2}\}$ y $D=\{-\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, 2\pi\}$, encuentra:

25. $A\cap B$
26. $B\cap C$
27. $A\cap C$
28. $(A\cap B)\cap C$
29. $D\setminus(A\cap C)$
30. $D\setminus(A\cup B)$
31. $A\times B$
32. $B\times C$

33. Considera los conjuntos $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, $D=\{a, b\}$, $E=\{a, c\}$, $F=\{b, c\}$, $G=\{a, b, c\}$, y encuentra: $(G\times G)\setminus((A\times F)\cup(B\times E)\cup(C\times D))$.

capítulo

2

Sistemas de numeración



2.1 Introducción
2.2 Sistema decimal
2.3 Bases
2.4 Operaciones en sistema binario
2.5 Operaciones en otras bases
2.6 El sistema binario y las computadoras

Con los sistemas de numeración tenemos una manera simbólica, distinta de la escritura ordinaria, para representar cantidades. Ha habido sistemas de numeración con distinto grado de refinamiento.

Sobresalen los sistemas posicionales, y entre ellos el sistema decimal indoarábigo que, como su nombre lo indica, tiene como base el número 10, y que es usado en la mayor parte de los países.

En este capítulo se presentan otros sistemas posicionales que utilizan una base distinta al 10. En especial se trata el problema de encontrar la nueva representación de un número al cambiar de base. Esto se hace usando como puente el sistema decimal o bien en forma directa. Se trata en especial el sistema binario, al cual se dedica una sección entera debido a sus aplicaciones en la computación.

2.1 Introducción

El hombre ha usado la noción de número desde épocas muy remotas y continúa siendo una de sus más útiles concepciones, que lo mismo le permite manejar y resolver problemas rutinarios que plantear y abordar problemas de extrema dificultad y belleza.

Para estructurar y manejar esa noción inventó lo que llamamos *sistemas de numeración.* Cada uno de ellos le permite tener una forma simbólica, distinta de la escritura ordinaria, para representar los números. El símbolo asociado a un número se llama *numeral.*

Uno de los sistemas de numeración más antiguos es el *sistema egipcio.* La civilización egipcia empezó a desarrollarse hacia el año 3000 a. C., en el delta del río Nilo.

Su sistema de numeración era sumamente sencillo y consistía en símbolos para las potencias de 10.



Figura 2.1

Y simplemente agrupaban los símbolos que les hacían falta para formar un número; por ejemplo,

= 3112

Figura 2.2

Contemporáneas a la civilización egipcia, en Mesopotamia hubo otros pueblos (como los sumerios, caldeos, asirios) que desarrollaron una escritura conocida como *babilónica.* Esta escritura era una combinación de base 10 aditiva y base 60 posicional.

Utilizaban unas marcas verticales en forma de cuña para representar unidades, las que agrupaban para formar los números del 1 al 9.



Figura 2.3

Para el 10 tenían otro símbolo, que combinaban con el anterior para formar números hasta 59.

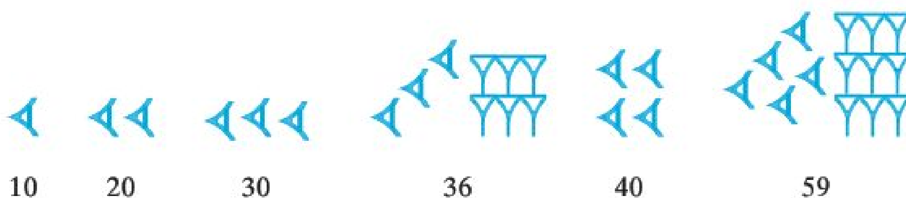


Figura 2.4

Por esto es que decimos que era un sistema de base 10 aditivo.

A partir de 60, utilizaban un sistema posicional en base 60. Se hacían grupos de los símbolos anteriores, que representaban, de izquierda a derecha, unidades, 60, 60^2, etcétera.

$$32 \times 3600 + 21 \times 60 + 43 = 116\,503$$

Figura 2.5

El *sistema romano,* que se utilizó en Europa durante el Imperio Romano y hasta parte de la Edad Media, a pesar de ser más moderno que el babilónico, pierde su carácter posicional, lo que hace casi imposible operar con él. Tal vez ésa sea la razón por la que durante ese periodo no hay avances significativos en las matemáticas.

I	*V*	*X*	*L*	*C*	*D*	*M*
1	5	10	50	100	500	1000

Éste no es un sistema posicional, aunque en las reglas de agrupamiento se tome en cuenta la posición ocupada por el numeral en el arreglo; así, IV es

distinto de VI pues en el primero aplicamos el principio de sustracción y en el segundo el de adición, para asociarlos con el 4 y el 6 respectivamente.

En lo que hoy es México y Guatemala se desarrolló el *sistema de numeración maya,* que es muy similar al sistema babilónico, sólo que los símbolos básicos representan el 1 y el 5, y las posiciones representan potencias de 20 o vigesimales.

Los **mayas** eran grandes astrónomos. Tenían calculado que 149 meses lunares equivalían a 4,400 días. Esto quiere decir que habían calculado que un mes (ciclo) lunar era de aproximadamente 29.530201 días, muy cercano al valor que usamos actualmente, que es de 29.53059 días. El sistema de numeración maya era vigesimal.

El 1 se representa con un punto y el 5 con una raya. Agrupando estos símbolos, como muestra la siguiente figura, se pueden escribir números hasta el 19.

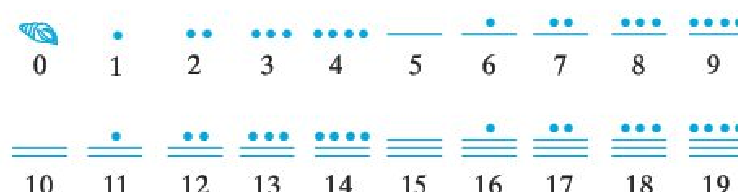


Figura 2.6

A partir de 20 se usa el sistema posicional de base 20.

Las posiciones se escriben verticalmente y hay un símbolo, al que comúnmente llamamos *cero* para indicar que no hay ninguna unidad del orden correspondiente, como se muestra en la figura siguiente:

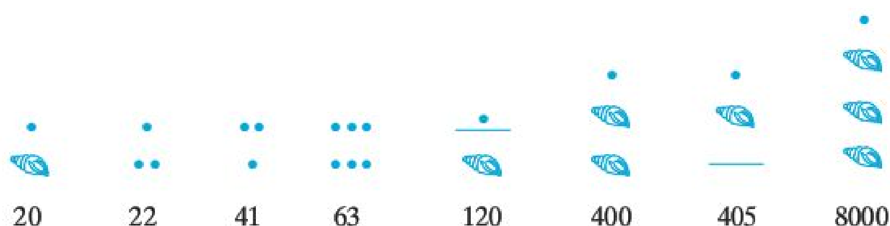


Figura 2.7

Interpretamos los símbolos anteriores como:

$20 = (1 \times 20) + 0$ $\qquad$ $22 = (1 \times 20) + 2$

$41 = (2 \times 20) + 1$ $\qquad$ $63 = (3 \times 20) + 3$

$120 = (6 \times 20) + 0$ $\qquad$ $400 = (1 \times 20^2) + (0 \times 20) + 0$

$405 = (1 \times 20^2) + (0 \times 20) + 5$ $\qquad$ $8000 = (1 \times 20^3) + (0 \times 20^2) + (0 \times 20) + 0$

Los mayas podían efectuar las operaciones aritméticas sin el uso de tablas.

Veamos cómo se efectúa la operación 25×43

×

Figura 2.8

usando los símbolos mayas y el mecanismo inventado por ellos. En este caso, como cada uno de los factores cuenta con dos niveles, usaremos una cuadrícula que tenga 2 renglones y 2 columnas.

Colocamos uno de los números al lado izquierdo de la cuadrícula y el otro en la parte superior escrito de manera horizontal como se muestra en la figura:

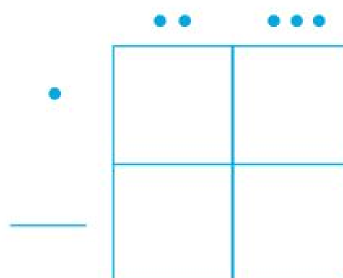


Figura 2.9

Para llenar la primera casilla, consideramos las figuras que vemos a la izquierda y arriba de dicha casilla. Colocamos la figura que está a la izquierda, tantas veces como indique la de arriba:

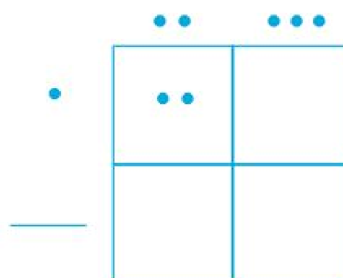


Figura 2.10

Las demás casillas se llenan de la misma manera, es decir, colocamos la figura que se vea a la izquierda del tablero en ese renglón, y la reproducimos tantas veces como indique la que se encuentre arriba de esa casilla y fuera del tablero, así:

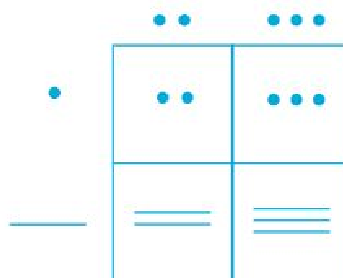


Figura 2.11

Las diagonales marcadas en la figura siguiente, indican los niveles que tiene el resultado.

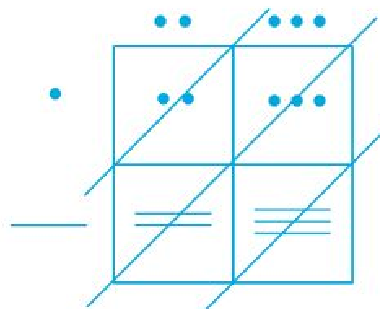


Figura 2.12

Para leerlo, agrupamos las figuras que aparecen en cada diagonal:

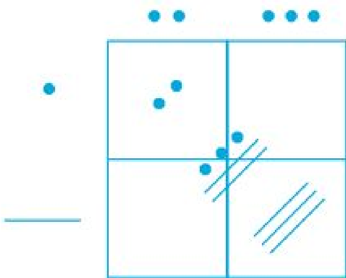


Figura 2.13

El resultado puede leerse dentro del tablero sobre la diagonal de arriba hacia abajo, es decir,

$$2(20)^2 + 13(20) + 15 = 1075.$$

Calendario maya

Había una variante de la numeración maya cuando ésta se utilizaba para medir el tiempo. Así, por ejemplo:

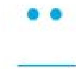


Figura 2.14

significa 2 años, 5 meses y 4 días. Para saber a cuántos días equivale este número, debemos saber que en el calendario maya, cada mes tiene 20 días y cada año consta de 18 meses. Entonces 2 años, 5 meses y 4 días equivalen a:

$$(2 \times 18 \times 20) + (5 \times 20) + 4 = 824 \text{ días}.$$

De la misma manera, un año se expresa como



Figura 2.15

y significa $1 \times (18 \times 20) = 360$ días.

Las unidades que usaron los mayas para medir el tiempo aparecen en la tabla siguiente:

Katun
Tun
Uinal
Kin

1 20 360 7200

Figura 2.16

Para los mayas:

1 Kin = 1 día
1 Uinal = 1 mes = 20 días
1 Tun = 18 Uinales = 18 meses = 360 días
1 Katun = 20 Tunes = 20 años = 360 meses = 7200 días

2.2 Sistema decimal

El evento más memorable de los Juegos Olímpicos de 1908 fue el maratón. El comité organizador de estos juegos determinó que su distancia sería de 42.195 km. Los últimos 195 metros se añadieron para justificar la ruta desde el castillo de Windsor al palco real en el estadio de Londres. La distancia se hizo oficial a partir de los juegos de 1924.

¿Qué significa la notación 42.195?

Solución: El sistema decimal que utilizamos actualmente es un sistema posicional en el que cada cifra toma un valor de acuerdo con su posición en relación con el punto decimal. Esto es, la cifra se multiplica por una potencia de 10, es decir, por 10^n, donde $n = 0$ en la posición que está inmediatamente a la izquierda del punto decimal, y aumenta de uno en uno conforme se avanza a la izquierda y disminuye de uno en uno conforme se avanza a la derecha.

$$42.195 = 4(10^1) + 2(10^0) + 1(10^{-1}) + 9(10^{-2}) + 5(10^{-3}).$$

Debemos a Leonardo de Pisa (1170-1250), mejor conocido como Fibonacci, la introducción a Europa del sistema decimal indoarábigo y de los numerales arábigos. Aunque él nació en Italia, debido al trabajo de su padre pasó su juventud en el norte de África, donde tuvo contacto con la cultura árabe y pudo notar las grandes ventajas del sistema arábigo en comparación con el romano, que se empleaba en Italia en los cálculos comerciales. A su regreso a Italia escribió el libro *Liber abaci*, publicado en 1202 y que trata sobre la aritmética y el álgebra que aprendió durante sus viajes.

El sistema indoarábigo, introducido en Europa por los árabes en la Edad Media, tiene la ventaja de que además de ser posicional, tiene un símbolo distinto para cada uno de los números anteriores a la base, que en su caso es 10.

Actualmente, en la mayor parte del mundo se utiliza el llamado *sistema decimal indoarábigo,* que es un sistema posicional de base 10 que usa 10 símbolos básicos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) llamados dígitos, lo que nos recuerda la estrecha relación que hay entre la idea de número y el proceso de contar, que en muchos casos, y desde las primeras culturas, se realiza con el auxilio de los dedos.

Como en cualquier sistema posicional, el significado de un carácter, por ejemplo de un dígito, en un agrupamiento particular depende de su posición dentro del mismo.

Este sistema tiene sus antecedentes en la India. Su introducción a Europa fue a través de un libro que contenía una traducción árabe de una aritmética hindú, de ahí que se le haya conocido como sistema indoarábigo. Para inicios del segundo milenio de nuestra era, su uso se había extendido en Europa, más no de manera unánime. La invención de la imprenta fue fundamental para su adopción y divulgación.

La principal razón, y tal vez la única, por la que utilizamos al 10 como base de nuestro sistema de numeración es el hecho de que tenemos 10 dedos en las manos. Si fuéramos como los personajes de las caricaturas de los Picapiedra, Mickey Mouse o el Pato Donald, seguramente tendríamos como base el 8.

En las siguientes secciones veremos que realmente el 10 no tiene nada de especial y que podemos utilizar otros números como base del sistema de numeración para definir las operaciones de suma y multiplicación, de manera similar a como lo hacemos en el sistema decimal.

2.3 Bases

Un fabricante desea empacar 37 artículos en cajas de cartón para posteriormente entregarlas al comerciante que efectuó el pedido. El comerciante espe-

cificó que los empaques podrían ser de una, de tres, de nueve y de veintisiete piezas, pero empleando siempre las cajas más grandes que pudieran llenarse. ¿De qué manera fue empacado el pedido?

Solución: La especificación dada por el comerciante en el sentido de emplear en lo posible las cajas más grandes, no permite que haya más de una solución; por ejemplo, los 37 artículos pueden ser empacados en 4 paquetes de nueve y 1 de uno, pero no se están usando las cajas lo más grande posible, pues puede ser empleada una caja de veintisiete, una de nueve y una más de un solo artículo; es decir:

$$37 = 1(27) + 1(9) + 1(1).$$

Lo anterior puede ser escrito como:

$$37 = 1(27) + 1(9) + 0(3) + 1(1),$$

o bien, de manera abreviada:

$$37 = 1101_{(3)}.$$

Observemos ahora que el comerciante solicitó que su mercancía fuese empacada en cajas cuyo contenido fuese siempre potencia de 3:

$$27 = 3^3, \quad 9 = 3^2, \quad 3 = 3^1 \quad \text{y} \quad 1 = 3^0.$$

Entonces:

$$37 = 1(3^3) + 1(3^2) + 0(3^1) + 1(3^0) \qquad (2.1)$$

El comerciante recibirá 1 caja de veintisiete artículos, 1 de nueve y 1 de uno.

Para indicar que se usaron potencias de 3 conviene escribir:

$$37 = 1101_{(3)}.$$

Representación de un número entero positivo en base n

Si m es un entero positivo, para encontrar su representación en base n lo escribimos como suma de potencias de n, es decir, $m = a_r n^r + \cdots + a_1 n + a_0$, utilizando siempre las potencias más grandes que sea posible. Los enteros que aparecen como coeficientes de las potencias de n en la representación deben ser números enteros menores que n, pues en caso contrario es posible utilizar una potencia mayor, por ejemplo, si $n = 3$, $4 \cdot 3^2 = (3+1) \cdot 3^2 = 3^3 + 3^2$.

Observación:

Cuando escribimos un número en una base distinta de 10, ponemos como subíndice la base en la que está escrito el número; por ejemplo, $234_{(7)}$ significa que el número 234 es un número en base 7. Únicamente cuando no hay posibilidad de error podemos omitir el índice que indica la base con la que estamos trabajando.

EJEMPLOS

1. Escribir la representación de 116 en base 3.

Solución: Reescribimos 116 como:

$$\begin{aligned} 116 &= 81 + 27 + 6 + 2 \\ &= 1(3^4) + 1(3^3) + 0(3^2) + 2(3^1) + 2(3^0), \end{aligned}$$

de esta manera, podemos escribir:

$$116 = 11022_{(3)}$$

y decimos que 11022 es la representación de 116 en base 3.

Observamos que a pesar de que podemos escribir:

$$\begin{aligned} 116 &= 108 + 6 + 2 \\ &= 4(3^3) + 0(3^2) + 2(3^1) + 2(3^0), \end{aligned}$$

ésta no es una buena opción, pues en este caso es posible utilizar una potencia más grande de 3; es decir, los coeficientes de las potencias de 3 únicamente pueden ser 0, 1 y 2.

2. Escribir la representación del número 428 en base 5.

Solución: Podemos descomponer 428 como:

$$\begin{aligned} 428 &= 375 + 50 + 3 \\ &= 3(5^3) + 2(5^2) + 0(5^1) + 3(5^0). \end{aligned}$$

La representación del número 428 en base 5 es 3203, es decir:

$$428 = 3203_{(5)}.$$

Para encontrar la representación de un número, podemos proceder como lo hemos hecho hasta aquí calculando las potencias de la base y luego escribir las sumas; sin embargo, cuando se trata de números grandes, este método puede resultar demasiado laborioso. Por ello es conveniente proceder de la siguiente manera:

Método para encontrar la representación de un número en base *n*

Dividimos sucesivamente entre 5 y nos fijamos en los residuos correspondientes:

$$\begin{aligned} 428 \div 5 &= \text{cociente } 85 \text{ residuo } 3 \\ 85 \div 5 &= 17 \quad 0 \\ 17 \div 5 &= 3 \quad 2 \\ 3 \div 5 &= 0 \quad 3. \end{aligned}$$

Observamos que a partir del segundo paso, el dividendo es el cociente de la división anterior.

Para obtener la representación del número, escribimos los residuos del último al primero:

residuo 3
residuo 0 ↑
residuo 2
residuo 3

es decir, 3203.

Así, la representación del número 428 es 3203 en base 5, como habíamos obtenido anteriormente.

3. Escribir la representación del número 78563 en base 10.

Solución: Utilizamos el procedimiento visto en el ejemplo anterior:

$78563 \div 10$	=	cociente 7856	residuo 3	
$7856 \div 10$	=	785	6	
$785 \div 10$	=	78	5	↑
$78 \div 10$	=	7	8	
$7 \div 10$	=	0	7	

La representación del número 78563 en base 10 es 78563 como era de esperarse.

Observación:

La representación que usamos comúnmente corresponde a la base 10. Si, por el contrario, tenemos la representación de un número en alguna base y queremos encontrar la representación decimal, el desarrollo del ejemplo 1 indica cómo hacerlo.

4. Encuentra la representación decimal del número $10304511_{(6)}$.

Solución:

$$10304511_{(6)} = 1\left(6^7\right)+0\left(6^6\right)+3\left(6^5\right)+0\left(6^4\right)+4\left(6^3\right)+5\left(6^2\right)+1\left(6^1\right)+1\left(6^0\right).$$

Ahora, únicamente debemos efectuar las operaciones que aparecen en el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} 10304511_{(6)} &= 1(279936)+0+3(7776)+0+4(216)+5(36)+6+1 \\ &= 304315. \end{aligned}$$

El número $10304511_{(6)}$ tiene como representación decimal 304315.

5. ¿Qué base a debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 1858 en dicho sistema sea $5263_{(a)}$?

Solución: La base a debe satisfacer la ecuación:

$$5a^3+2a^2+6a+3=1858,$$

es decir, a debe ser raíz de la ecuación

$$5a^3+2a^2+6a-1855=0.$$

Como los dígitos en el sistema buscado son 2, 3, 5 y 6, entonces la base debe ser mayor o igual que 7. Intentamos con el 7, es decir, sustituimos $a = 7$ en la ecuación:

$$5(7)^3+2(7)^2+6(7)-1855=0$$

así que 7 es raíz de la ecuación.

Por tanto, la base del sistema es 7.

Comprobación: Si 7 es la base del sistema, entonces:

$$5a^3+2a^2+6a+3=5(7)^3+2(7)^2+6(7)+3=1858.$$

2.3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, escribe el número en la base que se pide.

1. 89 en base 7
2. 546 en base 3
3. 638 en base 9
4. 2309 en base 8
5. 98374 en base 6
6. 71248 en base 5
7. 2536 en base 2
8. 3746 en base 4
9. 23635 en base 7
10. 5657 en base 8
11. 55555 en base 5
12. 11111 en base 2

En los ejercicios 13 a 24 encuentra la representación decimal del número dado.

13. $6105847_{(9)}$
14. $11001101_{(2)}$
15. $24535132_{(6)}$
16. $30201130_{(4)}$
17. $124003422_{(5)}$
18. $112020211_{(3)}$
19. $13242365_{(7)}$
20. $578476128_{(9)}$
21. $3201023_{(4)}$
22. $41202253_{(6)}$
23. $121046503_{(7)}$
24. $101010100_{(2)}$

25. *Escribe la representación del número 67 en base 2, 3, 5, 7 y 9.*

2.4 Operaciones en sistema binario

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
Célebre filósofo y matemático, creador del cálculo diferencial e integral. Proporcionó en el siglo XVII la primera descripción del sistema binario.

El sistema binario que usa la base 2 es sumamente importante en la actualidad, ya que las computadoras utilizan este sistema para operar. Las razones por las que las computadoras trabajan así es porque su memoria consiste en una colección de puntos que pueden imantarse o desimantarse; de esta manera pueden representar unos y ceros de una manera muy natural; además, las tablas de suma y producto en base 2 son muy fáciles de implementar en su sistema operativo. En la última sección del capítulo abundaremos sobre los códigos utilizados por las computadoras.

Sumar los números $10101_{(2)}$ y $110_{(2)}$ e interpretar en base decimal la operación efectuada.

Solución: Puesto que las representaciones dadas están en base 2, los únicos caracteres que aparecen son 0 y 1; observemos que en esta base se tiene:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 &= 1 \\ 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 10 \end{aligned}$$

El procedimiento es similar al que usamos en notación decimal, por lo que cuando aparece $1+1$ escribimos 0 y llevamos 1, en nuestro caso:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 10101 \\ +110 \\ \hline 11011 \end{array}$$

Entonces $10101_{(2)} + 110_{(2)} = 11011_{(2)}$.
Ahora analicemos en el sistema decimal:

$$\begin{aligned} 10101_{(2)} &= 1(2^4)+1(2^2)+1(2^0) = 21 \\ 110_{(2)} &= 1(2^2)+1(2^1) = 6 \\ 11011_{(2)} &= 1(2^4)+1(2^3)+1(2^1)+1(2^0) = 27. \end{aligned}$$

Es decir, en base decimal hemos efectuado la operación $21+6=27$.

Observación:

La siguiente tabla (2-2) nos da la regla para sumar cuando los números se encuentran en base 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Para interpretarla, buscamos en el primer renglón el primer sumando y en la primera columna el segundo, y nos fijamos en la intersección del renglón y la columna correspondientes, encontrando la suma de los dos números.

EJEMPLOS

1. Efectuar la resta $111010_{(2)} - 100101_{(2)}$ y realizar en base decimal la operación correspondiente.

Solución: Procedemos como en el caso decimal: tomamos la primera cifra del sustraendo y la comparamos con la primera del minuendo, siempre de derecha a izquierda. En este caso las cifras son 1 y 0, respectivamente. Como 1 es mayor que 0, tomamos una unidad prestada de la siguiente posición, buscando entonces un número tal que al sumarlo al 1 nos dé 10; el valor buscado es el 1, que aparece en la primera cifra de la derecha en el resultado.

$$\begin{array}{r} 111010 \\ \underline{-100101} \\ 1 \end{array}$$

Ahora, como llevábamos 1, tenemos en la segunda cifra 1 en el minuendo y también en el sustraendo, por lo que la siguiente cifra en el resultado será cero:

$$\begin{array}{r} 111010 \\ \underline{-100101} \\ 01 \end{array}$$

y así sucesivamente. Entonces:

$$\begin{array}{r} 111010 \\ \underline{-\ 100101} \\ 10101 \end{array}$$

Ahora veamos en el sistema decimal:

$$\begin{aligned} 111010_{(2)} &= 1(2^5)+1(2^4)+1(2^3)+1(2^1) = 58. \\ 100101_{(2)} &= 1(2^5)+1(2^2)+1(2^0) \qquad = 37. \\ 10101_{(2)} &= 1(2^4)+1(2^2)+1(2^0) \qquad = 21. \end{aligned}$$

Es decir, en base decimal hemos efectuado la operación $58 - 37 = 21$.

2. Multiplicar los números $1001001_{(2)}$ y $1010_{(2)}$ e interpretar en base decimal la operación efectuada.

Solución: Primero notemos que:

$$\begin{aligned} 0\times 0 &= 0\\ 0\times 1 &= 0\\ 1\times 0 &= 0\\ 1\times 1 &= 1, \end{aligned}$$

lo cual puede ser escrito como:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

entonces:

$$\begin{array}{r} 1001001\\ \times\quad 1010\\ \hline 0000000\\ 1001001\\ 0000000\\ 1001001\\ \hline 1011011010 \end{array}$$

Ahora, con el sistema decimal:

$$1001001_{(2)} = 1\left(2^6\right)+1\left(2^3\right)+1\left(2^0\right) = 73.$$
$$1010_{(2)} = 1\left(2^3\right)+1\left(2^1\right) = 10.$$
$$1011011010_{(2)} = 1\left(2^9\right)+1\left(2^7\right)+1\left(2^6\right)+1\left(2^4\right)+1\left(2^3\right)+1\left(2^1\right) = 730.$$

Es decir, en base decimal hemos efectuado la operación $73\times 10 = 730$.

3. Comparar los números $1101100_{(2)}$ y $11101_{(2)}$.

Solución: Cuando consideramos sistemas de numeración en cualquier base, dicho sistema, como el decimal, es posicional; de tal manera que la comparación se realiza como estamos acostumbrados.

Como $1101100_{(2)}$ tiene más cifras que $11101_{(2)}$ entonces

$$11101_{(2)} < 1101100_{(2)}.$$

Comprobación: Una manera de efectuar la comprobación es encontrando la representación decimal de ambos números:

$$11101_{(2)} = 1\left(2^4\right)+1\left(2^3\right)+1\left(2^2\right)+0\left(2^1\right)+1\left(2^0\right) = 29.$$
$$1101100_{(2)} = 1\left(2^6\right)+1\left(2^5\right)+0\left(2^4\right)+1\left(2^3\right)+1\left(2^2\right)+0\left(2^1\right)+0\left(2^0\right) = 108.$$

Es claro que

$$29 < 108.$$

4. Comparar los números $100110_{(2)}$ y $100011_{(2)}$.

Solución: Ambos números tienen seis cifras, por lo que comparamos de izquierda a derecha y nos fijamos en la primera que es distinta. En este caso es en la cuarta cifra, de izquierda a derecha, en la que difieren; en el primer número dicha cifra es 1; en el segundo es 0, por lo que:

$$100011_{(2)} < 100110_{(2)}.$$

Comprobación: Encontramos la representación decimal de ambos números:

$$100110_{(2)} = 1\left(2^5\right)+0\left(2^4\right)+0\left(2^3\right)+1\left(2^2\right)+1\left(2^1\right)+0\left(2^0\right)=38.$$
$$100011_{(2)} = 1\left(2^5\right)+0\left(2^4\right)+0\left(2^3\right)+0\left(2^2\right)+1\left(2^1\right)+1\left(2^0\right)=35.$$

Por supuesto, en notación decimal:

$$35 < 38.$$

5. Efectuar la división $100100_{(2)} \div 1100_{(2)}$ e interpretar en base decimal la operación correspondiente.

Solución: El procedimiento para la división es igual al que conocemos en la notación decimal; únicamente hay que efectuar los productos y restar. Observamos primero que en base 2 el número 1001 es menor que 1100; es decir, para iniciar la división debemos considerar 10010 entre 1100:

```
          1
1100 )100100
      -1100    ←  Restamos el producto 1100 × 1
       0110
```

Bajamos la siguiente cifra:

```
          11
1100 )100100
      -1100
       01100
       -1100
           0
```

De donde $100100_{(2)} \div 1100_{(2)} = 11_{(2)}$.

En el sistema decimal:

$$100100 = 1\left(2^5\right)+1\left(2^2\right)=36.$$
$$1100 = 1\left(2^3\right)+1\left(2^2\right)=12.$$
$$11 = 1\left(2^1\right)+1\left(2^0\right)=3.$$

Es decir, en base decimal hemos efectuado la operación $36 \div 12 = 3$.

2.4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 20, efectúa la operación que se indica y comprueba tu resultado utilizando notación decimal.

1. $1011110_{(2)} + 11111_{(2)}$
2. $1101110_{(2)} + 10100_{(2)}$
3. $10101101_{(2)} + 1000001_{(2)}$
4. $11111000_{(2)} + 1110011_{(2)}$
5. $1110111_{(2)} \times 111_{(2)}$
6. $1000011_{(2)} \times 1001_{(2)}$
7. $1010101010_{(2)} \times 100_{(2)}$
8. $1111_{(2)} \times 10101_{(2)}$
9. $10011_{(2)} \times 110110_{(2)}$
10. $1111011_{(2)} + 11111111_{(2)}$
11. $1110011_{(2)} \div 101_{(2)}$
12. $1001110_{(2)} \div 1101_{(2)}$
13. $1101001_{(2)} - 1100110_{(2)}$
14. $1111111_{(2)} - 1000000_{(2)}$
15. $111100_{(2)} \div 1111_{(2)}$
16. $1100011_{(2)} \div 1001_{(2)}$
17. $11110011_{(2)} - 11001101_{(2)}$
18. $111100101_{(2)} - 11100101_{(2)}$
19. $10101000_{(2)} \div 1000_{(2)}$
20. $10010001_{(2)} - 1111111_{(2)}$

En los ejercicios 21 a 28, compara la pareja de números dados.

21. $1110000_{(2)}; 111100_{(2)}$
22. $1110100_{(2)}; 1110010_{(2)}$
23. $1000110_{(2)}; 1001110_{(2)}$
24. $11001011_{(2)}; 1110011_{(2)}$
25. $1000101_{(2)}; 1100100_{(2)}$
26. $10101010_{(2)}; 10010101_{(2)}$
27. $11110111_{(2)}; 11101111_{(2)}$
28. $1111100_{(2)}; 11111100_{(2)}$

2.5 Operaciones en otras bases

Sumar los números $123101_{(4)}$ y $231010_{(4)}$ y comprobar en base decimal la operación efectuada.

Solución: Escribimos la tabla de sumar en base 4:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Ahora empezamos sumando de derecha a izquierda, y vemos que en las tres primeras cifras no hay problema, obteniendo:

$$\begin{array}{r} 123101 \\ +\ 231010 \\ \hline 111 \end{array}$$

En la cifra siguiente aparece $3+1$, y según nuestra tabla $3+1=10$, escribimos 0 y llevamos uno:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 123101 \\ +231010 \\ \hline 0111 \end{array}$$

Ahora $2+3+1=12$, escribimos 2 y llevamos uno:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 123101 \\ \underline{+231010} \\ 20111 \end{array}$$

Por último, $1+2+1=10$:

$$\begin{array}{r} 123101 \\ \underline{+\ 231010} \\ 1020111 \end{array}$$

Si lo pasamos a expresión decimal, tenemos que:

$$123101_{(4)} = 1(4^5)+2(4^4)+3(4^3)+1(4^2)+1(4^0) = 1745.$$
$$231010_{(4)} = 2(4^5)+3(4^4)+1(4^3)+1(4^1) = 2884.$$
$$1020111_{(4)} = 1(4^6)+2(4^4)+1(4^2)+1(4^1)+1(4^0) = 4629.$$

Es decir, hemos efectuado $1745 + 2884 = 4629$.

EJEMPLOS

1. Efectuar la multiplicación $4200033_{(6)} \times 32_{(6)}$ y comprobar el resultado usando notación decimal.

Solución: Escribimos la regla de multiplicación en base 6:

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Ahora multiplicamos primero por 2, observamos que $2\times 3=10$, escribimos 0 y llevamos 1; nuevamente $2\times 3=10$ y sumamos el 1 que llevábamos, escribimos 1 y llevamos 1; ahora $2\times 0=0$ y escribimos el uno que llevábamos, etcétera:

$$\begin{array}{r} 4200033 \\ \underline{\times \qquad 2} \\ 12400110 \end{array}$$

Multiplicamos por 3 y sumamos para completar la operación:

$$\begin{array}{r} 4200033 \\ \underline{\times \qquad 32} \\ 12400110 \\ \underline{21000143} \\ 222401540 \end{array}$$

Efectuamos la comprobación usando notación decimal:

$$4200033_{(6)} = 4(6^6)+2(6^5)+3(6^1)+3(6^0) = 202197.$$
$$32_{(6)} = 3(6^1)+2(6^0) = 20.$$
$$222401540_{(6)} = 2(6^8)+2(6^7)+2(6^6)+4(6^5)+1(6^3)+5(6^2)+4(6^1)$$
$$= 4043940.$$

2. Comparar los números $165232_{(7)}$ y $165322_{(7)}$.

Solución: Cuando consideramos sistemas de numeración en cualquier base, dicho sistema, como en el decimal, es posicional; de tal manera que la comparación se realiza como estamos acostumbrados.

Ambos números tienen seis cifras. Entonces comparamos de izquierda a derecha y nos fijamos en la primera que es distinta. En este caso es en la cuarta cifra, de izquierda a derecha, en la que difieren; en el primer número dicha cifra es 2, en el segundo es 3, entonces:

$$165232_{(7)} < 165322_{(7)}.$$

Comprobación: Encontramos la representación decimal de ambos números:

$$165232_{(7)} = 1(7^5)+6(7^4)+5(7^3)+2(7^2)+3(7^1)+2(7^0) = 33049.$$
$$165322_{(7)} = 1(7^5)+6(7^4)+5(7^3)+3(7^2)+2(7^1)+2(7^0) = 33091.$$

Por supuesto:

$$33049 < 33091.$$

3. Efectuar la división $3201321_{(5)} \div 13_{(5)}$ y comprobar el resultado usando notación decimal.

Solución: Escribimos las reglas de suma y multiplicación en base 5:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Observamos primero que en base 5 el número 13 es menor que 32; es decir, para iniciar la división debemos considerar 32 entre 13. Ahora, como $13 \times 2 = 31$, tenemos:

```
    2
13)3201321
  -31        ←  Restamos el producto 13×2
   010          y bajamos la siguiente cifra
```

como $10 < 13$, bajamos otra cifra, es decir, ahora calculamos $101 \div 13$. Como además $13 \times 3 = 44$, y $13 \times 4 = 112$, entonces:

$$\begin{array}{r} 203 \\ 13\overline{)3201321} \\ \underline{-31} \\ 0101 \\ \underline{-44} \\ 2 \end{array}$$

Bajamos la cifra siguiente y continuamos:

$$\begin{array}{r} 203132 \\ 13\overline{)3201321} \\ \underline{-31} \\ 0101 \\ \underline{-44} \\ 23 \\ \underline{-13} \\ 102 \\ \underline{-044} \\ 31 \\ \underline{-31} \\ 0 \end{array}$$

Así, $3201321_{(5)} \div 13_{(5)} = 203132_{(5)}$.

Efectuamos la comprobación usando notación decimal:

$$3201321_{(5)} = 3(5^6) + 2(5^5) + 1(5^3) + 3(5^2) + 2(5^1) + 1(5^0) = 53336.$$

$$13_{(5)} = 1(5^1) + 3(5^0) = 8.$$

$$203132_{(5)} = 2(5^5) + 3(5^3) + 1(5^2) + 3(5^1) + 2(5^0) = 6667.$$

Podemos verificar fácilmente que $6667 \times 8 = 53336$.

2.5.1 Relación entre dos bases distintas

Escribir la representación del número $214_{(7)}$ en base 2.

Solución: Encontramos primero la representación decimal de $214_{(7)}$.

$$214_{(7)} = 2(7^2) + 1(7^1) + 4(7^0) = 109$$

Ahora escribimos 109 en base 2.

$$\begin{array}{rcl} 109 \div 2 & = & 54 \text{ residuo } 1 \\ 54 \div 2 & = & 27 \text{ residuo } 0 \\ 27 \div 2 & = & 13 \text{ residuo } 1 \\ 13 \div 2 & = & 6 \text{ residuo } 1 \\ 6 \div 2 & = & 3 \text{ residuo } 0 \\ 3 \div 2 & = & 1 \text{ residuo } 1 \\ 1 \div 2 & = & 0 \text{ residuo } 1 \end{array}$$



Recordamos que escribimos los residuos en forma ascendente, por lo que:

$$214_{(7)} = 1101101_{(2)}.$$

Es posible pasar de una base a otra sin pasar por la representación decimal; sin embargo, el proceso es un poco más laborioso, por lo que preferimos realizarlo de esta manera.

Ejemplo

- Escribir la representación del número $1000111_{(2)}$ en base 4.

Solución: Como en el ejemplo anterior, encontramos primero la representación decimal de $1000111_{(2)}$ y posteriormente lo escribimos en la base requerida:

$$1000111_{(2)} = 1\left(2^6\right) + 1\left(2^2\right) + 1\left(2^1\right) + 1\left(2^0\right) = 71.$$

Ahora escribimos 71 en base 4:

$$\begin{aligned} 71 \div 4 &= 17 \text{ residuo } 3 \\ 17 \div 4 &= 4 \text{ residuo } 1 \\ 4 \div 4 &= 1 \text{ residuo } 0 \\ 1 \div 4 &= 0 \text{ residuo } 1 \end{aligned} \uparrow$$

Es decir, $1000111_{(2)} = 1013_{(4)}$.

El sistema hexadecimal que ahora se usa, fue introducido a la computación por IBM.

2.5.2 Sistema de numeración hexadecimal

Hasta ahora hemos visto sistemas de numeración distintos al decimal y la manera de representar un número en cualquiera de esas bases. Sabemos que si bien la representación de un número cambia dependiendo de la base en que se le representa, también es cierto que dichos sistemas son todos posicionales; es decir, una cifra tiene, además de un valor intrínseco, otro de acuerdo con la posición que ocupa. La base mayor que hemos utilizado hasta aquí es 9; sin embargo, es posible utilizar cualquier entero mayor que 9 como base; la única dificultad es que para escribir la representación de un número en base n necesitamos n símbolos distintos. Por ejemplo, en base 7 utilizamos los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Para escribir en base 16, necesitamos 16 símbolos distintos, y no sería conveniente utilizar los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15, pues por ejemplo, en la siguiente cifra:

$$1134\underline{10}678$$

no sería claro si los números subrayados son 1 y 0 o se trata de 10. Por eso, para evitar ambigüedades, es necesario utilizar símbolos distintos. Para representar en base 16 se usan:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E \text{ y } F$$

donde $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$. A este sistema se le llama *hexadecimal*.

Este sistema es particularmente importante en computación, como veremos en la siguiente sección.

Ejemplo

- Escribir la representación del número 9283356 en base 16.

Solución: Empleamos el método de los residuos:

$9283356 \div 16 =$ cociente 580209 residuo 12 cociente 580209 residuo $C_{(16)}$
$580209 \div 16 =$ cociente 36263 residuo 1
$36263 \div 16 =$ cociente 2266 residuo 7
$2266 \div 16 =$ cociente 141 residuo 10 cociente 141 residuo $A_{(16)}$
$141 \div 16 =$ cociente 8 residuo 13 cociente 8 residuo $D_{(16)}$
$8 \div 16 =$ cociente 0 residuo 8

Observemos que como los símbolos A, B, C, D, E y F sustituyen a 10, 11, 12, 13, 14 y 15, respectivamente, el primer residuo obtenido es 12 y lo escribimos como C.

La representación del número 9283356 en base 16 es $8DA71C$.

2.5.3 Ejercicios

1. Escribe las tablas correspondientes a la suma y multiplicación en base 3.
2. Escribe las tablas correspondientes a la suma y multiplicación en base 8.

En los ejercicios 3 a 18, efectúa en cada caso la operación correspondiente y comprueba tus resultados utilizando notación decimal.

3. $1000100_{(3)} + 1001000_{(3)}$
4. $1020010_{(3)} + 2200001_{(3)}$
5. $2001022_{(3)} \times 102_{(3)}$
6. $5342115_{(6)} \times 520_{(6)}$
7. $3201332_{(5)} + 21100331_{(5)}$
8. $8888300_{(9)} + 7634218_{(9)}$
9. $504030201_{(7)} \times 166_{(7)}$
10. $745106_{(8)} \times 762_{(8)}$
11. $2310230_{(4)} \div 32_{(4)}$
12. $2202222_{(3)} \div 211_{(3)}$
13. $3420102_{(5)} - 1203034_{(5)}$
14. $82663566_{(9)} - 81672546_{(9)}$
15. $5100122_{(6)} \div 45_{(6)}$
16. $7364516_{(9)} \div 62_{(9)}$
17. $42356100_{(7)} - 6540230_{(7)}$
18. $14323465_{(8)} - 12434575_{(8)}$

En los ejercicios 19 a 26, compara la pareja de números dados.

19. $100234_{(5)}; 10034_{(5)}$
20. $657432_{(8)}; 657342_{(8)}$
21. $100101011_{(2)}; 101001011_{(2)}$
22. $3012013_{(4)}; 3013023_{(4)}$
23. $12435687_{(9)}; 13425687_{(9)}$
24. $340011022_{(7)}; 3400110022_{(7)}$
25. $201201002_{(3)}; 201202002_{(3)}$
26. $040320010_{(6)}; 40320010_{(6)}$

En los ejercicios 27 a 34, escribe la representación del número dado en la base que se pide.

27. $123400_{(5)}$ en base 7
28. $332123_{(4)}$ en base 10
29. $5460012_{(7)}$ en base 3
30. $10231_{(9)}$ en base 2
31. $101111_{(2)}$ en base 4
32. $211012_{(3)}$ en base 5
33. $342112_{(6)}$ en base 8
34. $1762533_{(8)}$ en base 6
35. $256104_{(7)}$ en base 9

En los ejercicios 36 a 43, escribe la representación del número dado en el sistema hexadecimal.

36. 3928762
37. 1736548
38. 85798767
39. 48763456
40. 2784645
41. 7564289
42. 57562432
43. 4294967296

2.6 El sistema binario y las computadoras

Las computadoras almacenan y procesan la información en dispositivos magnéticos y ópticos, como la memoria RAM (memoria de acceso aleatorio), discos magnéticos, discos flexibles, CD-ROM (disco compacto de sólo lectura), etcétera.

Para ello, convierten la información en sucesiones de unos y ceros. Es decir, para la computadora un texto, una fotografía digitalizada, una base de datos o un archivo de sonido es sólo una cadena formada por unos y ceros.

Podemos pensar que los dispositivos de almacenamiento de la computadora son superficies que tienen la capacidad de magnetizarse en puntos específicos. La computadora guarda estos unos y ceros magnetizando o dejando de magnetizar ciertos puntos de esta superficie magnética.

Existen diferentes códigos para traducir la información proporcionada a la computadora en sucesiones de ceros y unos. Uno de los más conocidos y utilizados actualmente es el *código ASCII* (American Standard Code for Information Interchange). Este código utiliza siete posiciones binarias llamadas *bits* para representar letras, números y algunos símbolos especiales, por ejemplo:

Carácter	Código ASCII	Código binario
A	65	1000001
B	66	1000010
1	49	0110001
2	50	0110010
a	97	1100001

Como podemos ver, las letras A y a tienen diferente código ASCII, y los caracteres para representar los dígitos 0 al 9 tienen un código ASCII diferente a su valor.

Con siete posiciones binarias podemos escribir números desde 0 hasta el $127 = 1111111_{(2)}$, por lo que sólo se pueden representar 128 caracteres distintos. En estos primeros 128 caracteres no están incluidas las letras acentuadas, la *ñ* y otros caracteres importantes, por lo que fue necesario añadir una posición binaria más, creándose el *código ANSI* (American National Standard Institute). En este código podemos escribir números desde 0 hasta $255 = 11111111_{(2)}$, por lo que podemos representar 256 caracteres distintos. Los caracteres que ya estaban en el código ASCII, conservan su código; para los nuevos, su código ANSI es un número mayor que 127.

Por ejemplo:

Carácter	Código ANSI	Código binario
a	97	01100001
á	225	11100001
é	233	11101001
ñ	241	11110001

Un problema muy grave que existe es que hay otra extensión del código ASCII llamada IBM Extended Character Set, diferente a la ANSI. En este código, las letras acentuadas y la *ñ* tienen diferente valor:

Carácter	Código IBM	Código binario
á	160	10100000
é	130	10000010
ñ	164	10100100

Esto provoca que al pasar un documento de un procesador de texto a otro, las letras acentuadas aparezcan como caracteres raros. Este problema también se presenta a veces con las impresoras.

Como es difícil leer los números binarios, dada la cantidad de ceros y unos por leer, sobre todo cuando aparecen varios números seguidos, solemos agruparlos de 4 en 4. Con 4 posiciones binarias podemos representar números del 0 al 15 y podemos cambiar 4 posiciones binarias por una posición en base 16. Por ejemplo, $220_{(10)} = 1101\ 1100_{(2)} = DC_{(16)}$.

De esta manera, los códigos ANSI, vistos anteriormente, se pueden escribir en sistema hexadecimal (base 16):

Carácter	Código ANSI	Código binario	Sistema hexadecimal
a	97	0110 0001	61
á	225	1110 0001	*E*1
é	233	1110 1001	*E*9
ñ	241	1111 0001	*F*1

A un grupo de 8 bits se le llama *byte*. De esta manera podemos guardar dos cifras hexadecimales en un byte; por tanto, necesitamos un byte para guardar un caracter utilizando el código ANSI.

Para hacer operaciones aritméticas, las computadoras no utilizan estos códigos, sino que guardan los números en diferentes formatos, basados todos en el sistema binario.

Uno de estos formatos es el tipo ShortInt, o entero corto, que utiliza 8 bits; es decir, 1 byte. En este formato de tipo se pueden representar números entre −128 y 127.

En la siguiente tabla se muestran algunos de los tipos más comunes:

Tipo	Bytes	Valores
ShortInt (entero corto)	1	–128 a 127
SmallInt (entero largo)	2	–32768 a 32767
Integer (entero)	4	–2147483648 a 2147483647
Real	6	$\pm 2.9 \times 10^{-39}$ a $\pm 1.7 \times 10^{38}$
Double (doble)	8	$\pm 5.0 \times 10^{-324}$ a $\pm 1.7 \times 10^{308}$

Los tres primeros tipos forman parte del grupo de tipos enteros, ya que no pueden guardar números con punto decimal. Los dos últimos forman parte de los tipos flotantes. En ellos sí se pueden guardar números con punto. En cada uno de los dos grupos de tipos, las computadoras utilizan diferentes algoritmos para efectuar las cuatro operaciones matemáticas básicas.

capítulo

3

El campo de los números reales



3.1 Introducción
3.2 Los números enteros
3.3 Los números reales
3.4 Intervalos
3.5 Leyes de los exponentes
3.6 Logaritmos
3.7 Ejercicios de repaso

En este capítulo presentamos un repaso de los conceptos y las técnicas fundamentales de la aritmética de los números reales que son esenciales para la comprensión y manipulación de las expresiones algebraicas. Los alumnos que ingresan al bachillerato ya conocen la mayor parte del contenido de este capítulo, por lo que el profesor puede optar por estudiarlo muy rápidamente para poder dedicar más tiempo a los temas sustantivos del álgebra.

3.1 Introducción

Los números han surgido a lo largo de la historia como una herramienta para resolver problemas de conteo, medición, ordenación, etcétera. Actualmente los vemos como algo ya terminado y tendemos a creer que siempre existieron así; sin embargo, en cada época, cuando se introdujo algún número nuevo o grupo de números nuevo, a menudo se suscitaban polémicas muy fuertes, por lo que estos números tardaban muchos años en ser aceptados por la comunidad en general. Tales son los casos del cero, de los números negativos, los números irracionales, etcétera.

Los primeros números que surgieron históricamente fueron los *números naturales* 1, 2, 3, 4, ... que nos sirven para contar. Aunque el cero apareció después, es más práctico considerarlo dentro de los números naturales. Denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, es decir,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Uno de los primeros problemas a los que nos enfrentamos al considerar únicamente a los números naturales, es que al restar dos de ellos el resultado no es siempre otro natural. Por ejemplo, en la escuela primaria nos enseñaron que $5 - 8$ "no se puede efectuar". Lo que sucede es que la respuesta no es un número natural.

Para poder restar cualquier par de números naturales es necesario introducir los números enteros negativos que junto con los números naturales constituyen los *números enteros*:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Los números *naturales* también se llaman *enteros no negativos*.

Al restar cualquier par de estos números se obtiene otro entero. Los números negativos son útiles en la vida cotidiana para representar cantidades

como temperaturas por debajo del punto de congelación del agua (0° C), deudas monetarias y profundidades en relación con el nivel del mar de zonas que están por debajo de éste, entre otras cosas.

Así como enfrentamos el problema de no poder restar si tenemos sólo números naturales, también enfrentamos el problema de no poder dividir si tenemos sólo números enteros; por ejemplo, al dividir $5 \div 3$ no obtenemos un número entero, por lo que es necesario ampliar el conjunto de números.

Consideramos ahora el conjunto de los *números racionales*, que son aquellos que pueden escribirse como cociente de dos números enteros, donde el denominador no es el cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\}.$$

Observemos que como todo número entero se puede escribir como el cociente de él mismo entre uno, $n = \frac{n}{1}$, entonces todo número entero es un número racional; así,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Los números racionales son suficientemente buenos para la mayoría de las operaciones que realizamos cotidianamente; sin embargo, ya desde los pitagóricos, en el siglo V a. C., se dieron cuenta de que con una regla y un compás se podían construir segmentos cuya longitud no se podía expresar como cociente de dos enteros. Por ejemplo, en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ y este número no se puede escribir en la forma $\frac{p}{q}$ con p y q enteros; es decir, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

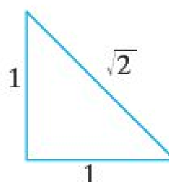


Figura 3.1 Construcción de $\sqrt{2}$

Como veremos en las secciones siguientes, todos los números racionales pueden identificarse con puntos en una recta. El hecho de que, por ejemplo $\sqrt{2}$ no sea un número racional, significa que hay un punto en la recta al que no se le ha asociado ningún número racional; de hecho, hay una infinidad de dichos puntos, por lo que es necesario inventar otros números, llamados *números irracionales*, para los puntos de la recta a los que no se les ha asociado ningún número racional. Es así como surgen los *números reales*, que son la unión de los números racionales e irracionales.

Finalmente, los números reales también presentan un problema similar al de la resta en los números naturales y la división en los números enteros; este problema consiste en que no se puede sacar raíz cuadrada de los números negativos; por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no existe ya que no hay ningún número real x tal que $x^2 = -4$. Por esto, es necesario introducir más números; los *números complejos*, para poder, ahora sí, obtener la raíz cuadrada, o cualquier otra raíz, de todo número real, o más en general, de todo número complejo.

En las siguientes secciones estudiaremos con detenimiento las propiedades de algunos de los sistemas numéricos mencionados.

3.2 Los números enteros

Los números enteros pueden representarse como puntos en la recta. Para ello, seleccionamos un punto para representar al 0 y otro para representar el 1, que normalmente colocamos a la derecha del 0. Estos puntos determinan la escala y la colocación de los demás enteros; en ella los números naturales se van colocando hacia la derecha en orden, dejando entre dos consecutivos el mismo espacio que entre 0 y 1; es decir, una unidad. Asimismo, a partir del 0, pero ahora hacia la izquierda, se colocan consecutivamente los números $-1, -2, -3,...$

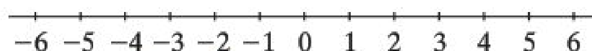


Figura 3.2 Los enteros en la recta

En la recta numérica, el 5 está colocado a la derecha del 0 y el -5 del lado izquierdo. La distancia de 5 a 0 es 5 unidades y la distancia de -5 a 0 también es 5 unidades.

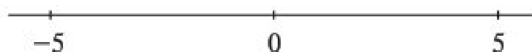


Figura 3.3 5 y -5 en la recta numérica

La distancia de un número a 0 se llama el *valor absoluto* del número y se representa encerrando al número entre dos rayas verticales, así:

$|5| = 5$ significa que el valor absoluto de 5 es 5.
$|-5| = 5$ significa que el valor absoluto de -5 es 5.

3.2.1 Suma de números enteros

Las dos operaciones principales de los números enteros son la suma y el producto. El producto también se conoce como multiplicación. Veamos primero una interpretación geométrica de la suma.

Para hallar la suma de 2 y 5, dibujamos una recta numérica. Colocamos el lápiz en el 2 y nos movemos 5 unidades hacia la *derecha*, con lo que llegamos al 7.

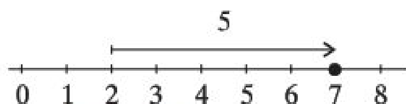


Figura 3.4 Suma de 2 y 5

Cuando a un número le sumamos un número *positivo*, entonces nos movemos hacia la derecha, y cuando le sumamos un número *negativo*, entonces nos movemos hacia la *izquierda*.

Ejemplos

1. Sumar $3+(-7)$.

   Solución: Localizamos el 3 y desde ahí nos movemos 7 unidades hacia la *izquierda*, con lo que llegamos a -4. Así que $3+(-7)=-4$.

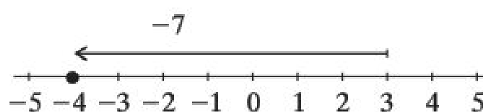


Figura 3.5 Suma de 3 y (−7)

2. Sumar $-8+(-4)$.

Solución: Localizamos a -8 y desde ahí nos movemos 4 unidades hacia la *izquierda*, con lo que llegamos a -12. Así que $-8+(-4)=-12$.

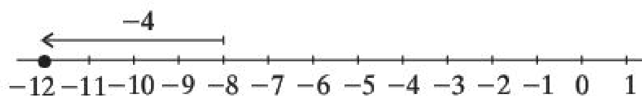


Figura 3.6 Suma de −8 y (−4)

Sería poco práctico tener que utilizar la recta numérica para poder sumar enteros positivos y negativos; las siguientes reglas nos permiten hacerlo de manera sencilla, usando lo aprendido en la escuela primaria.

Reglas para sumar números enteros

Para sumar dos números enteros con el mismo signo:

1. Se suman los valores absolutos de los números; es decir, como si fueran positivos
2. Se determina el signo de la suma:
   - **a)** Si ambos son positivos, la suma es positiva.
   - **b)** Si ambos son negativos, la suma es negativa.

Ejemplo

- Sumar $-35+(-82)$.

Solución: Sumamos valores absolutos de los números: $35+82=117$.
La suma es negativa ya que ambos son negativos: $-35+(-82)=-117$.

Para sumar dos números enteros de signo contrario:

1. Se restan los valores absolutos de los números: el menor del mayor.
2. El signo de la suma es el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto .

EJEMPLOS

1. Sumar $-17+(4)$.

Solución: El valor absoluto de -17 es 17, que es mayor que el de 4.
Restamos los valores absolutos: $17-4=13$.
La suma es negativa porque $|-17|>|4|$; así, $-17+(4)=-13$.

2. Sumar $-27+69$.

Solución: El valor absoluto de 69 es mayor que el de -27.
Restamos los valores absolutos: $69-27=42$.
La suma es positiva porque $|69|>|-27|$; así, $-27+69=42$.

Desde que aprendimos a sumar en la primaria, nos enseñaron que al sumar dos números no importa el orden en el que los sumemos; así:

$$9+4=13=4+9$$

y al sumar más de dos números, lo que debemos hacer es agrupar dos de ellos, sumarlos y el resultado sumarlo al resto; por ejemplo: la suma $3+5+2$ la podemos realizar de las siguientes dos maneras:

$$(3+5)+2=8+2=10 \quad \text{y} \quad 3+(5+2)=3+7=10$$

y simplemente escribimos

$$3+5+2=10.$$

También sabemos que sumar 0 "no hace nada":

$$4+0=4.$$

Propiedades de la suma de números enteros

A continuación se listan las propiedades de suma de los números enteros que acabamos de ejemplificar.

La suma de números enteros satisface las siguientes propiedades:

- *Propiedad de cerradura:* Si a y b son números enteros, entonces $a+b$ es un número entero.
- *Propiedad conmutativa:* Si a y b son números enteros, entonces $a+b=b+a$.
- *Propiedad asociativa:* Si a, b y c son números enteros, entonces $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- *Existencia del neutro aditivo:* El número 0 satisface la igualdad $a+0=a$ para cualquier número entero a.
- *Existencia del opuesto, inverso aditivo o simétrico:* Si a es un número entero cualquiera, existe un único número entero al que llamamos $-a$, que satisface la igualdad $a+(-a)=0$.

Observaciones:

- Los números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ satisfacen todas las propiedades anteriores, *con excepción de la existencia del inverso aditivo*, ya que, por ejemplo, el inverso aditivo de 3 es -3, que no es un número natural.
- El símbolo $(-a)$ significa el inverso aditivo de a, independientemente de que a sea positivo o negativo. Así, por ejemplo, como $4+(-4)=0$, entonces el inverso aditivo de $a=4$ es $-a=-4$, pero también, el inverso aditivo de $a=-4$ es 4; es decir, $-a=-(-4)=4$.

En general, si a es un número entero, entonces

$$-(-a)=a.$$

EJEMPLOS

1. El opuesto de 5 es -5.
2. El opuesto de -8 es 8.
3. El opuesto de 0 es 0.
4. Verificar geométricamente la propiedad conmutativa con $a=-7, b=4$.

Solución: Localizamos -7 y desde ahí nos movemos 4 unidades a la derecha y llegamos a -3.

Localizamos a 4 y desde ahí nos movemos 7 unidades a la izquierda y llegamos también a -3. Así,

$$-7+4=4+(-7)=-3$$

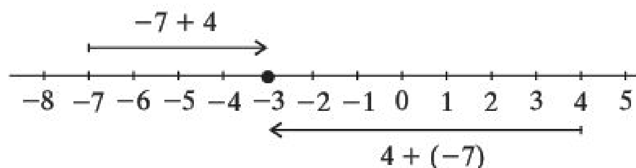


Figura 3.7

5. Verificar geométricamente la propiedad asociativa con $a=-8$, $b=6$ y $c=-5$.

Solución: Para sumar $(-8+6)+(-5)$, a partir de -8 nos movemos 6 unidades a la derecha, llegamos a -2, y si desde ahí nos movemos 5 unidades a la izquierda, llegamos a -7.

Para sumar $-8+(6+(-5))$, efectuamos primero $6+(-5)$, con lo que nos colocamos en 6 y de ahí nos movemos 5 unidades a la izquierda, con lo cual llegamos a 1. Ahora, si a partir de -8 nos movemos 1 unidad a la derecha, llegamos a -7. Así que tenemos:

$$(-8+6)+(-5)=-2+(-5)=-7$$
$$-8+(6+(-5))=-8+1=-7.$$

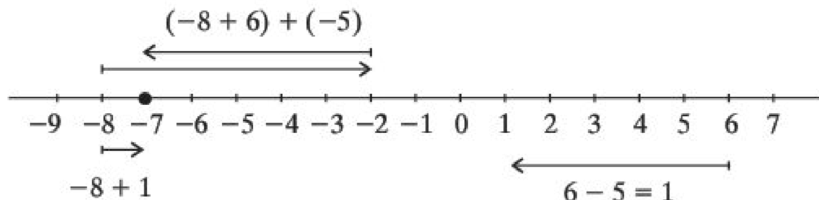


Figura 3.8 $(-8+6)+(-5)$

6. Verificar geométricamente las propiedades del neutro y del inverso aditivo con el número 8.

Solución: Localizamos el 8 y no nos movemos, entonces seguimos en el 8, así que

$$8+0=8.$$

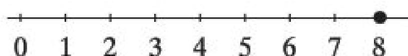


Figura 3.9 $8+0=8$

Para ver la propiedad del opuesto, localizamos el 8 y nos movemos 8 unidades hacia la izquierda, con lo que llegamos a 0; así:

$$8+(-8)=0.$$

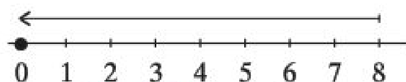


Figura 3.10 $8 + (-8) = 0$

Las propiedades conmutativa y asociativa, así como las reglas anteriores, nos permiten sumar más de dos números enteros.

Ejemplo

- Sumar $86+(-37)+(-49)+93+(-32)$.

Solución: Aplicamos la propiedad conmutativa para poner todos los números positivos juntos y todos los números negativos juntos.

$$86+93+(-37)+(-49)+(-32).$$

Sumamos por separado los números positivos y los números negativos siguiendo las reglas para sumar números del mismo signo:

$$86+93=179 \quad \text{y} \quad (-37)+(-49)+(-32)=-118,$$

sumamos estos resultados parciales

$$179+(-118)=61,$$

así,

$$86+(-37)+(-49)+93+(-32)=61.$$

3.2.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, escribe el número entero que representa cada situación.

1. Un submarino está sumergido a 93 metros.
2. La temperatura es de 4 °C.
3. Está 6 metros sobre el nivel del mar.
4. Tiene $35 en sus ahorros.
5. La temperatura es de 15 °C bajo cero.
6. 36 metros bajo el nivel del mar.
7. 18 °C sobre el punto de congelación del agua.
8. Debe $200.
9. Se hundió un metro bajo el nivel del mar.
10. 5 °C bajo el punto de congelación.
11. Debe $14 a su hermana.
12. Tiene $805 en su alcancía.
13. La cima de la montaña está a 1,500 metros sobre el nivel del mar.
14. La Ciudad de México está a 2,303 metros sobre el nivel del mar.
15. El helicóptero se elevó 1,650 metros sobre el nivel del mar.
16. Un día de invierno, la temperatura, contando el factor viento, llegó a 32 °C bajo cero.

En los ejercicios 17 a 22, encuentra el opuesto de cada número.

17. -47 **18.** 81 **19.** -13 **20.** -3 **21.** 175 **22.** -0

En los ejercicios 23 a 30, indica el número que debes sumar en cada situación.

23. Bajó 3 kilos de peso.

24. Su dieta tiene 200 calorías menos.

25. La bolsa de valores perdió 153 puntos.

26. Este barco tiene 5 metros más de ancho.

27. El resorte se estiró 5 centímetros.

28. El ritmo cardiaco aumentó 5 latidos por minuto.

29. La temperatura bajó 17° C.

30. Este pan lleva 100 gramos menos de levadura.

En los ejercicios 31 a 34, verifica la propiedad asociativa de la suma de números enteros.

31. $a = 5, b = 7$ y $c = 1$

32. $a = -2, b = 4$ y $c = 8$

33. $a = 1, b = -3$ y $c = -6$

34. $a = -9, b = -1$ y $c = -18$

En los ejercicios 35 a 48, simplifica las expresiones.

35. $-(-9)$

36. $-(-(-7))$

37. $5-(-7)$

38. $-(-124)$

39. $-(13+16)$

40. $-(634-498)$

41. $-(10-3)$

42. $-(-71)+17$

43. $5+(-11)+9+(-6)+(-5)+9$

44. $34+53+(-53)+70$

45. $(-7)+(-3)+0+14+(-3)+10$

46. $(-20)+(-3)+4+18+(-7)+1$

47. $37+(-48)+62+(-15)+19+(-21)$

48. $(-36)+(-24)+(-51)+(-612)$

Dios inventó los enteros; todo lo demás es trabajo del hombre.
Leopold Kronecker (1823-1891).

3.2.3 Resta de números enteros

Dados dos números enteros a y b, la diferencia $a-b$ se define como:

$$a-b=a+(-b),$$

es decir, restar b significa sumar el opuesto de b.

EJEMPLOS

1. Simplificar $5-9$.

Solución: Restar 9 significa sumar -9, así que aplicamos la regla de la suma de dos números de signo contrario:

$$5-9=5+(-9)=-4.$$

2. Simplificar $4-(3-1)$.

Solución: Resolvemos primero lo que está dentro del paréntesis

$$3-1=2$$

y ahora efectuamos la resta:

$$4-2=2,$$

así,

$$4-(3-1)=2.$$

3. Efectuar la diferencia entre 76 y -11, menos 54.

Solución: Traducimos el problema

$$(76-(-11))-54.$$

Ahora realizamos las operaciones indicadas

$$(76-(-11))-54=87-54=33.$$

En el conjunto de los números enteros, la ecuación

$$a+x=b,$$

donde a y b son números enteros, siempre tiene solución, a saber

$$x=b-a.$$

Ejemplo

- Encontrar los valores de x que satisfacen la igualdad $15+x=5$.

Solución:

$$x=5-15=-10,$$

es la única solución de la igualdad.

3.2.3.1 Inverso de una suma

Es claro que $(5+7)+(-5-7)=0$; esto quiere decir que el inverso aditivo de $5+7$ es $-5-7$, pero también es cierto que $(5+7)-(5+7)=0$, es decir, el opuesto de $5+7$ también es $-(5+7)$, pero como cada número tiene un único inverso, entonces

$$-(5+7)=-5-7.$$

En general, si a y b son números enteros, entonces,

$$-(a+b)=-a-b.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $-(-15+9)$.

   Solución: Podemos efectuar primero la operación dentro del paréntesis y después tomar el inverso aditivo del resultado:

   $$-(-15+9)=-(-6)=6,$$

   o bien, podemos eliminar el paréntesis poniendo el inverso aditivo de cada sumando y efectuando la operación resultante.

   $$-(-15+9)=+15-9=6.$$

2. Simplificar $3-(7+4-9)$.

   Solución:

   $$3-(7+4-9)=3-(2)=1,$$

o bien,

$$3-(7+4-9)=3-7-4+9=1.$$

3.2.4 Ejercicios

Efectúa las siguientes operaciones.

1. $8-(-2)$
2. $-4-11$
3. $7-(-8)$
4. $-9-(-3)$
5. $-14-(-14)$
6. $12-5$

Efectúa las siguientes operaciones y simplifícalas.

7. $143-(27-8)$
8. $(47-75)-(33-65)$
9. $(-37+16)-(48-5)$
10. $-[-18-(-3)]-7-20$
11. $20-[-2-(-14)]-4$
12. $121+(-33)-(66+44)$

Traduce al lenguaje algebraico y simplifica.

13. La resta de 92 menos −13, menos −25.
14. −62 sumado a la resta de 38 menos −11.
15. La suma de −47 y 20, menos 15.
16. Un día de invierno, la temperatura en la madrugada era de 8 °C. Durante la mañana subió 12 °C, en la tarde descendió 5 °C y en la noche bajó 3 °C. ¿Qué temperatura había en la noche?
17. Un submarino está a 210 metros bajo el nivel del mar. Debido a las fuertes corrientes tiene que descender 74 metros. Más tarde decide subir 50 metros. ¿A qué profundidad está el submarino?
18. Un avión subió hasta una altitud* de 8,825 metros. Debido al mal tiempo, tuvo que elevarse 1,547 metros. Después descendió 1,239 metros para continuar su viaje. ¿Qué altitud llevaba?
19. Un elevador estaba en el piso 12. Bajó 5 pisos, subió 13 y bajó 2. ¿En qué piso está ahora?
20. Ricardo tiene una tarjeta de crédito con un saldo a favor de $229. Pagó con la tarjeta $296, $103 y $76. Como había gastado mucho, depositó $130. ¿Qué saldo tiene ahora en la tarjeta de crédito?
21. Un alpinista está en la cima del Popocatépetl cuya altitud es 5,452 metros. Desciende 476 metros. Otro alpinista está al pie del volcán, en Tlamacas, a 4,000 metros, y asciende 892 metros. ¿Cuál es la diferencia entre las altitudes a las que están los dos alpinistas?
22. La Ciudad de México tiene una altitud de 2,303 metros. Un helicóptero de noticias sobrevuela la ciudad. Sube 193 metros, desciende 24 metros, baja 9 metros y se eleva 38 metros. Después de todos estos movimientos, ¿qué altitud tiene?

3.2.5 Multiplicación de números enteros

Desde la primaria sabemos cómo multiplicar números positivos; veamos ahora una interpretación geométrica de la multiplicación que nos permitirá entender mejor la multiplicación con números negativos.

EJEMPLOS

- Multiplicar 4×3.

  Solución: Marcamos el 4 en el eje horizontal, y en el eje vertical marcamos el 1 y el 3.

  Unimos con una recta el 4 del eje horizontal con el 1 del eje vertical.

  Por el 3 del eje vertical, trazamos una recta paralela a la anterior y observamos el punto donde corta al eje horizontal.

  El punto donde corta es el resultado de la multiplicación: $4\times 3=12$.

*Altitud = altura sobre el nivel del mar.

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y, por consiguiente, sus lados correspondientes son proporcionales.

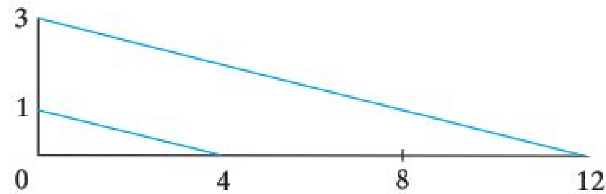


Figura 3.11 Interpretación geométrica de 4×3

La razón de lo anterior es que los triángulos formados son semejantes, así que si la altura del mayor es 3 veces la altura del menor, entonces la base del mayor es 3 veces la base del menor, es decir, $3 \times 4 = 12$.

Hagamos la misma construcción cuando uno de los factores es negativo:

1. Multiplicar $4 \times (-3)$.

Solución: Marcamos el 4 en el eje horizontal, y en el eje vertical marcamos el 1 y el (-3). Observa que (-3) está en la parte inferior del eje.

Unimos con una recta el 4 del eje horizontal con el 1 del eje vertical.

Por el (-3) del eje vertical, trazamos una recta paralela a la anterior y observamos el punto donde corta al eje horizontal. El punto donde corta es el resultado de la multiplicación $4 \times (-3)$; así,

$$4 \times (-3) = -12.$$

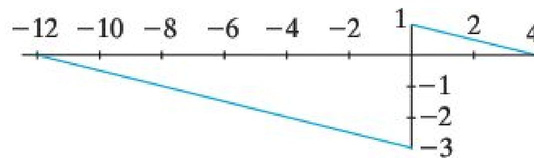


Figura 3.12 Interpretación geométrica de $4 \times (-3)$

2. Multiplicar $(-4) \times 3$.

Solución: Marcamos -4 en el eje horizontal (observa que -4 está en la parte izquierda del eje), y en el eje vertical marcamos el 1 y el 3.

Unimos con una recta el (-4) del eje horizontal con el 1 del eje vertical.

Por el 3 del eje vertical, trazamos una recta paralela a la anterior y observamos el punto donde corta al eje horizontal; así, el punto -12, donde corta, es el resultado de la multiplicación, $(-4) \times 3$:

$$(-4) \times 3 = -12.$$

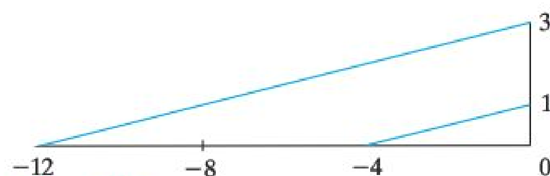


Figura 3.13 Interpretación geométrica de -4×3

Veamos ahora el caso en el que ambos factores son negativos:

3. Multiplicar $(-4) \times (-3)$.

Solución: Marcamos -4 en el eje horizontal, y en el eje vertical marcamos el 1 y el (-3).

Unimos con una recta el -4 del eje horizontal con el 1 del eje vertical.

Por el -3 del eje vertical, trazamos una recta paralela a la anterior y observamos el punto donde corta al eje horizontal.

El punto donde corta es el resultado de la multiplicación, que en este caso es:

$$(-4)\times(-3)=12.$$

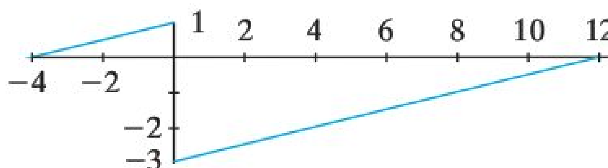


Figura 3.14 Interpretación geométrica de $(-4)\times(-3)$

Notación para la multiplicación

En aritmética, usualmente usamos el signo $\times$ para denotar la multiplicación, pero en álgebra hay veces que podemos suprimirlo para simplificar la notación.

- Cuando utilizamos letras para representar números, simplemente las ponemos una junto a otra para denotar el producto; así

$$ab \text{ es lo mismo que } a\times b.$$

- Cuando el signo de multiplicación está junto a un paréntesis, podemos suprimirlo:

$$(-4)(-3) \quad \text{es lo mismo que} \quad (-4)\times(-3)$$
$$5\times(2+9) \quad \text{es lo mismo que} \quad 5(2+9).$$

Leyes de los signos de la multiplicación

Los cuatro modelos anteriores ejemplifican las *leyes de los signos*:

- El producto de dos números del mismo signo es positivo.
- El producto de dos números de signo contrario es negativo.

Podemos recordar estas reglas con el siguiente cuadro:

(+)	×	(+)	=	(+)
(+)	×	(−)	=	(−)
(−)	×	(+)	=	(−)
(−)	×	(−)	=	(+)

EJEMPLOS

1. Multiplicar $(-3)2$.

Solución:

$$(-3)\times 2 = -6.$$

2. Multiplicar -247×0.

Solución: Recuerda que el producto de cero por cualquier número es cero. Así

$$-247\times 0 = 0.$$

3. Multiplicar $-9(-8)$.

Solución:

$$-9(-8) = +72.$$

Al multiplicar dos números, no importa el orden en que lo hacemos, de ahí la famosa frase: "El orden de los factores no altera el producto"

$$5\times 7 = 35 = 7\times 5$$

Y para multiplicar más de dos números, debemos agrupar dos de ellos, multiplicarlos y multiplicar el resultado por el resto; por ejemplo:

$$4(3\times 6) = 4\times 18 = 72; \qquad (4\times 3)6 = 12\times 6 = 72$$

así, podemos escribir simplemente

$$4\times 3\times 6 = 72.$$

Por otro lado, cuando tenemos una suma y un producto, debemos tener cuidado, ya que no es lo mismo efectuar primero el producto y después la suma, que hacerlo en el otro orden; por ejemplo:

$$5+(2\times 3) = 5+6 = 11 \quad \text{y} \quad (5+2)3 = 7\times 3 = 21.$$

Por eso es necesario establecer de manera inequívoca qué significa $5 + 2 \times 3$. La regla que se sigue es:

Primero se efectúan las multiplicaciones y después las sumas.

Más adelante veremos con más detalle este tipo de expresiones (véase la sección 3.3.8).

Así, $5+2\times 3 = 5+6 = 11$, aunque es preferible usar paréntesis.

Cuando tenemos una expresión como

$$2(3+5)$$

para poder efectuar la multiplicación, primero debemos saber el resultado de la suma $3+5$, para después poder multiplicarlo por 2; así:

$$2(3+5) = 2\times 8 = 16,$$

sin embargo, también podríamos haberlo hecho de otra manera: multiplicar por 2 cada uno de los números que están en el paréntesis y después sumar los resultados:

$$2(3+5) = 2\times 3 + 2\times 5 = 6+10 = 16.$$

Que estas dos maneras de efectuar esta operación nos lleven al mismo resultado se le conoce como *propiedad distributiva* o *ley distributiva*.

EJEMPLOS

1. Podemos ejemplificar lo anterior con peras y manzanas para entenderlo mejor.

   Si tenemos dos bolsas y en cada una hay 3 peras y 5 manzanas, ¿cuántas frutas tenemos?

   Primer razonamiento: En cada bolsa hay $(3+5)=8$ frutas, así que tenemos $2\times 8=16$ frutas.

   Segundo razonamiento: Tenemos $2\times 3=6$ peras y $2\times 5=10$ manzanas, así que tenemos $6+10$ frutas.

2. Otra manera de ejemplificar la propiedad distributiva es la siguiente:

$$(2\times 4)+(2\times 3)=2(4+3).$$

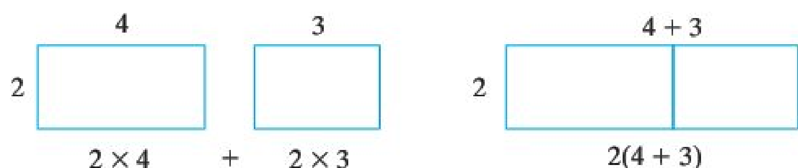


Figura 3.15 Propiedad distributiva

3. Podemos utilizar la ley distributiva para hacer las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} 5\times 43 &= 5(40+3) \\ &= (5\times 40)+(5\times 3) \\ &= 200+15 \\ &= 215. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3\times 69 &= 3(70-1) \\ &= (3\times 70)-(3\times 1) \\ &= 210-3 \\ &= 207. \end{aligned}$$

Propiedades del producto de números enteros

A continuación enunciamos las *propiedades del producto de números enteros* que hemos ejemplificado.

- *Propiedad de cerradura:* Si a y b son números enteros, entonces ab es un número entero.
- *Propiedad conmutativa:* Si a y b son números enteros, entonces $ab=ba$.
- *Propiedad asociativa:* Si a, b y c son números enteros, entonces $(ab)c=a(bc)$.
- *Existencia del neutro multiplicativo:* El número 1 satisface la igualdad $a\times 1=a$ para cualquier número entero a.

La siguiente propiedad relaciona la suma y el producto y se llama *propiedad distributiva* de los números enteros:

Si a, b y c son números enteros, entonces $a(b+c)=(ab)+(ac)$.

3.2.6 Ejercicios

Haz la construcción geométrica para la multiplicación de los siguientes números.

1. 6 y 2 **3.** −1 y −5 **5.** 2 y −2 **7.** −3 y −3 **9.** −6 y 0

2. −3 y 5 **4.** −1 y 4 **6.** −4 y 2 **8.** 7 y 1 **10.** 8 y 2

Resuelve los ejercicios usando la propiedad distributiva.

11. $9(30-1)$ **13.** $-7(58)$ **15.** $-3(82)$

12. $7(80-3)$ **14.** $8(64)$ **16.** $5(-41)$

Efectúa las siguientes multiplicaciones.

17. 5×15

18. $(-1)(12)(-3)$

19. $(-31)(27)$

20. $6(-8)$

21. $13(4)(2)$

22. $2(-11)(-10)(-2)$

23. $(-1)3$

24. $(-42)(-11)(0)(-5)$

25. $(-10)(21)(-1)$

Calcula:

26. El producto de -12 por la resta de -73 menos -56.

27. La suma de 34 más el producto de -11 por -2.

28. La resta de 60 menos 25, por la suma de -43 y 15.

29. El producto de la suma de -82 y 17 por la diferencia de 13 menos 3.

30. En un gas ideal, cuando la temperatura es constante se tiene que el producto de la presión por el volumen del gas es constante. Si de un instante a otro la presión aumenta al doble, ¿qué sucede con el volumen si la temperatura se mantuvo constante?

31. El área de un rectángulo es igual a 24 cm^2. Si se deforma el rectángulo disminuyendo la altura y permaneciendo el área constante, ¿qué le sucede a la base?

3.2.7 El orden en los números enteros

- Cuando discutimos sobre la belleza de dos artistas de cine, no siempre llegamos a un acuerdo, porque "en gustos se rompen géneros"; en cambio, dados dos números naturales, siempre podemos decidir cuál de ellos es mayor; por ejemplo, $5 < 7$. Esto ejemplifica la propiedad conocida como *tricotomía*.
- Cuando comparamos tres equipos de fútbol, tampoco podemos decir siempre cuál es el mejor. Por ejemplo, en un torneo de todos contra todos, los Pumas les ganaron a las Águilas, las Águilas les ganaron a las Chivas y las Chivas les ganaron a los Pumas, así que no podemos decidir cuál es mejor. En cambio, con los números no hay tal ambigüedad; por ejemplo, como sabemos que $2 < 7$ y $7 < 9$, sin pensarlo más sabemos que $2 < 9$. Es decir, el orden en los números naturales es *transitivo*.
- Si Cristina es mayor que su hermano Juan, entonces dentro de cinco años, Cristina seguirá siendo mayor que Juan; es decir, si a la edad de ambos le sumamos 5, el orden no se altera.
- Si un refresco es más barato que una bolsa de papas y, debido a la inflación, el año próximo el precio de ambos se multiplica por 2, entonces el refresco seguirá siendo más barato que la bolsa de papas.

Para poder comparar los números, debemos establecer sin ambigüedad un orden entre ellos. Para ello, hacemos lo siguiente:

Definición

Dados dos números enteros a y b, decimos que a es menor que b si al colocarlos en la recta, a queda a la izquierda de b, y escribimos $a < b$, que se lee "a es menor que b" o "b es mayor que a"



Figura 3.16

Otra manera de escribir $a < b$ es $b > a$, en cuyo caso leemos "b es mayor que a".

Escribimos $a \leq b$ para indicar que $a < b$, o bien $a = b$, y leemos "a es menor o igual que b".

EJEMPLOS

- 7 canicas son más que 3 canicas.
- –\$10 es menor que –\$5 (se tiene menos dinero cuando se debe 10 que cuando se debe 5).
- −4 °C es menor que 2 °C, ya que es más alta la temperatura a 2 °C que a −4 °C.

Podemos escribir las desigualdades anteriores así:

$$7 > 3$$
$$-10 < -5$$
$$-4 < 2.$$

Propiedades de orden de los enteros

El orden en los enteros satisface las siguientes propiedades:

- *Tricotomía*

  Dados a y b números enteros, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones

  $$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b.$$

  Decir que a es positivo equivale a decir que $a > 0$; y que b es negativo equivale a decir que $b < 0$.

- *Transitividad*

  Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

  Es decir, si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c, entonces a está a la izquierda de c.

- *Relación con la suma*

  Si $a < b$ y c es cualquier entero, entonces $a + c < b + c$.

- *Multiplicación por un número positivo*

  Si $a < b$ y c es cualquier entero positivo, entonces $ac < bc$. (No se altera el sentido de la desigualdad).

- *Multiplicación por un número negativo.*

  Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. (Se invierte el sentido de la desigualdad).

EJEMPLOS

1. Verificar la transitividad cuando $a = 4$, $b = 7$ y $c = 15$.

   Solución: Debemos verificar que: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. En efecto,

   $$4 < 7 \text{ y } 7 < 15 \text{ entonces } 4 < 15.$$

2. Multiplicar $-3 < 5$ por 4.

Solución: Al multiplicar una desigualdad por un número positivo, el sentido de la desigualdad no se altera, así que

$$-3 < 5$$
$$-3(4) < 5(4)$$
$$-12 < 20.$$

3. Multiplicar $-2 < 3$ por -6.

Solución: Puesto que vamos a multiplicar por un número negativo, debemos recordar que al hacerlo se debe intercambiar el signo < por >. Entonces

$$-2 < 3$$
$$(-2)(-6) > 3(-6)$$
$$12 > -18.$$

4. Mostrar que la desigualdad $-17 < -11$ se puede obtener a partir de la desigualdad, $11 < 17$.

Solución: Puesto que $11 < 17$, multiplicando por (-1) a ambos lados de la desigualdad, tenemos:

$$11 < 17$$
$$11(-1) > 17(-1)$$
$$-11 > -17,$$

o lo que es lo mismo, $-17 < -11$.

3.2.8 Ejercicios

Coloca en el cuadro, <, > o = para que sea cierta cada afirmación.

1. 3 □ 5

2. 1 □ − 1

3. −5 □ − 6

4. −34 □ − 34

5. 67 □ − 67

6. 0 □ − 12

7. −21 □ − 20

8. 8 □ 25

En cada ejercicio escribe los números de menor a mayor.

9. 0, −3, 4, −1

10. 1, −1, 2, −2

11. −54, −56, −61, −51

12. 3, −3, 7, −7

3.2.9 Factores primos y máximo común divisor

Si tenemos 12 mosaicos cuadrados y deseamos formar un rectángulo con ellos, entonces podemos hacerlo de diversas maneras:

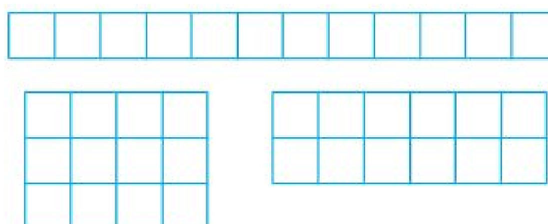


Figura 3.17

En cambio, si tenemos 7 mosaicos cuadrados, sólo podemos acomodarlos de una manera para obtener un rectángulo

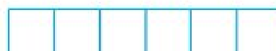


Figura 3.18

La diferencia entre 12 y 7 es que podemos factorizar el 12 de varias maneras: 1×12, 2×6, 3×4; en cambio, el 7 únicamente podemos factorizarlo como 1×7.

Factorizar un número natural significa expresarlo como producto de otros números naturales.

Un número primo es un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son 1 y él mismo. También podemos decir que un número es *primo* si es mayor que 1 y tiene exactamente *dos factores distintos*: el 1 y él mismo.

Los primeros números primos son:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23.$$

Un número mayor que uno, que no es un número primo, se llama *número compuesto*.

Un número que es factor de dos o más números se llama *factor común* de ellos.

EJEMPLOS

1. Encontrar los factores primos de 240, todos sus factores y escribirlo como producto de potencias de primos.

   Solución: Factorizamos:

   $$240 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 5$$

   entonces sus factores primos son 2, 3 y 5.

   Todos sus factores son:

   $$1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120 \text{ y } 240.$$

   Su factorización en producto de potencias de primos es:

   $$240 = 2^4\times 3\times 5.$$

2. Encontrar los factores primos de 650, todos sus factores y escribirlo como producto de potencias de primos.

   Solución: Factorizamos:

   $$650 = 2\times 5\times 5\times 13$$

   entonces sus factores primos son 2, 5 y 13.

   Todos sus factores son:

   $$1, 2, 5, 10, 25, 50, 13, 26, 65, 130, 325, 650.$$

   Su factorización en producto de potencias de primos es:

   $$650 = 2\times 5^2\times 13.$$

3. Encontrar los factores comunes de 50 y 80.

Solución:

Los factores de 50 son: 1, 2, 5, 10, 25 y 50.
Los factores de 80 son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 y 80.
Los números que aparecen en ambas listas, es decir, los factores comunes son: 1, 2, 5 y 10.

4. Encontrar los factores comunes de 32 y 15.

Solución:

Los factores de 32 son: 1, 2, 4, 8, 16 y 32.
Los factores de 15 son: 1, 3, 5 y 15.
El único número factor común es 1.

Cuando el único factor común que tienen dos números es el 1, decimos que los números son *primos entre sí* o *primos relativos*.

El *Máximo Factor Común* (MFC) o *Máximo Común Divisor* (MCD) de dos o más números es el máximo de sus factores comunes.

Para encontrar el máximo común divisor de dos números, podemos utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

1. Encontrar las lista de todos los factores de cada número, fijarse en los comunes a ambas listas y elegir el mayor de ellos. Este número es el MCD de los números dados. Si el único número que está en ambas listas es el 1, entonces el MCD de ellos es 1; es decir, los números son primos entre sí.
2. Encontrar las descomposiciones en potencias de primos de ambos números. Considerar aquellos primos que son factores de ambos números. Para cada uno de éstos, comparar sus exponentes y elegir el menor de ellos. El producto de dichos primos elevados a los menores exponentes es el MCD de los números dados.
3. **Algoritmo de Euclides.** Se divide el número mayor entre el menor. Si el residuo no es cero, se divide el divisor anterior entre el residuo obtenido y se continúa de esta manera hasta que el residuo es cero. El último residuo distinto de cero es el MCD de los números dados.

Euclides de Alejandría (siglo III a. C.).
Uno de los matemáticos más prominentes de la antigüedad. Su máxima aportación se denomina *Los elementos*. En ella, hace una compilación de los resultados conocidos en su época sobre geometría. Ofrece demostraciones de esos resultados y aparecen además otras aportaciones originales. Uno de los libros que componen esta obra es un tratado sobre las proporciones basado en los trabajos de Eudoxo.

Ejemplo

- Encontrar el MCD de 25 y 70 utilizando cada uno de los métodos anteriores.

Solución:

- Los factores de 25 son: 25, 5, 1.
  Los factores de 70 son: 70, 35, 14, 10, 7, 5, 2, 1.
  Los factores comunes son: 5 y 1; y el mayor es 5. Así, el MCD es 5.
- La descomposición en potencias de primos de 25 es: 5^2.
  La descomposición en potencias de primos de 70 es: $2 \times 5 \times 7$.
  El único primo que aparece en ambas descomposiciones es 5, y el exponente más bajo con que aparece es 1, así que el MCD de 25 y 70 es 5.
- Aplicamos el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r} 2 \\ 25\overline{)70} \\ 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 20\overline{)25} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 5\overline{)20} \\ 0 \end{array}$$

  El 5 es el último residuo distinto de cero, así que el MCD de 25 y 70 es 5.

3.2.10 Ejercicios

En cada caso factoriza el número dado como producto de factores primos.

1. 396
2. 1024
3. 91
4. 101
5. 11368
6. 6525

7. El gran matemático del siglo XVII, Pierre Fermat, conjeturó que todos los números de la forma $2^{(2^n)}+1$ son primos. A estos números se les conoce como números de Fermat. Para $n = 1$, el número es 5. Encuentra los números de Fermat para $n = 2, 3, 4$ y verifica que sean primos. Posteriormente se descubrió que el quinto número de Fermat, $2^{(2^5)}+1 = 4\,294\,967\,297$ no es primo, ya que $4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$.

En los ejercicios 8 a 19, encuentra el MCD de los números dados.

8. 24 y 36
9. 60 y 420
10. 12 y 90
11. 28 y 120
12. 37 y 54
13. 120 y 720
14. 150 y 210
15. 1350 y 90
16. 1323 y 4851
17. 1300 y 2548
18. 2106 y 1628
19. 1716 y 2772

20. Divide el número 403 327 884 entre 280 869, 270 327 y 267 814, respectivamente. La solución que hallarás en los tres casos es un número entero, el cual corresponde al año en que nació Cristóbal Colón, al año en que descubrió América y al año en que murió, respectivamente.
21. Un tinaco de 1200 litros se llena en 5 horas. ¿Cuántos litros por minuto arroja la llave?
22. Si escribes 3 páginas en una hora y trabajas 8 horas al día, ¿cuántos días requieres para escribir un libro de 912 páginas?
23. Si se quiere dividir un número entre 2, el resultado entre 3 y después dividir nuevamente entre 5, ¿entre qué número se debe dividir para efectuar una sola división y obtener el mismo resultado?

3.3 Los números reales

3.3.1 Los números racionales

Un problema al que nos enfrentamos al considerar únicamente los números enteros es que si a y b son números enteros, la ecuación

$$ax = b$$

no siempre tiene solución en dicho conjunto.

Ejemplo

- Una cartulina rectangular tiene un área de 1 m^2; si la base mide 2 m, ¿cuánto mide la altura?

Solución: Buscamos un número x tal que

$$2x = 1.$$

Claramente, no hay ningún número entero con esta característica, pero podemos resolver este problema ya sea con números decimales $2 \times 0.5 = 1$, o con fracciones $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Es decir, la altura de la cartulina es medio metro: $0.5 \text{ m} = \frac{1}{2}$ m.

Este problema no tiene solución en los números enteros, ya que 0.5 no es un número entero.

Por eso es que necesitamos introducir una colección mayor de números para poder hacer divisiones. Estos números son los *números racionales*, que son

los números que pueden escribirse como cociente de dos enteros $\frac{p}{q}$, en donde $q \neq 0$. Denotaremos al conjunto de números racionales mediante la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Por ejemplo, los siguientes números son racionales

$$\frac{3}{4},\ \frac{-1}{7},\ 3\frac{2}{17} = \frac{53}{17},\ 0 = \frac{0}{5},\ -12 = \frac{12}{-1},\ 3.19 = \frac{319}{100}.$$

Un número racional $\frac{p}{q}$ suele llamarse también *fracción* o *quebrado*, en donde el número p se llama *numerador* y el número q se llama *denominador*.

Dos fracciones pueden representar el mismo número; por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan al mismo número, que en expresión decimal es 0.5, así que decimos que estas fracciones son *iguales* y podemos escribir

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Si se multiplica el numerador y denominador de una fracción por el mismo número entero distinto de cero, se obtiene una fracción igual a ella.

Hay veces que no es tan evidente que dos fracciones son iguales; por ejemplo, $\frac{21}{28}$ y $\frac{15}{20}$. Para averiguarlo, debemos escribir ambas con el mismo denominador.

Multiplicamos:

- El numerador y denominador de la primera por 20 (el denominador de la segunda) y
- El numerador y denominador de la segunda por 28 (el denominador de la primera)

$$\frac{21 \times 20}{28 \times 20} = \frac{420}{28 \times 20} \quad \text{y} \quad \frac{15 \times 28}{20 \times 28} = \frac{420}{20 \times 28}.$$

Ahora es obvio que las fracciones son iguales.

Intencionalmente, no hemos efectuado la multiplicación en los denominadores porque no hace falta; en ambos casos es 28×20.

Viendo este ejemplo nos damos cuenta de que, en realidad, basta trabajar con los numeradores

$$21 \times 20 = 420 \ \text{ y } \ 15 \times 28 = 420.$$

En general, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \text{ si, y sólo si } \ ad = bc.$$

EJEMPLOS

Determinar si los siguientes números son iguales:

1) $\frac{4}{12}$ y $\frac{5}{15}$.

Solución: Como

$$4 \times 15 = 60 \ \text{ y } \ 12 \times 5 = 60$$

entonces son iguales.

2) $\frac{2}{10}$ y $\frac{4}{15}$.

Solución: Como

$$2 \times 15 = 30 \;\; \text{y} \;\; 10 \times 4 = 40$$

entonces son diferentes.

3.3.2 Localización en la recta

Podemos incorporar los números racionales en la recta numérica. Para ello, veamos cómo se divide un segmento en un número dado de partes iguales:

Ejemplo

- Dividir el segmento AB en 5 partes iguales.



Figura 3.19

Solución: Tomamos una semirrecta auxiliar ℓ que pase por A y, con ayuda de un compás, dibujamos en ella cinco segmentos consecutivos de igual tamaño (ver la figura siguiente). Unimos el extremo B' del último arco con el punto B y trazamos rectas paralelas a ésta, pasando por los extremos de los segmentos construidos sobre ℓ. La semejanza de los triángulos obtenidos garantiza la igualdad de las longitudes de los segmentos obtenidos en AB.

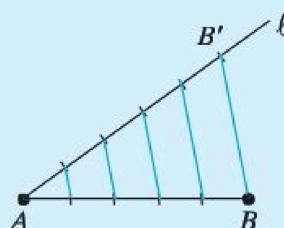


Figura 3.20

Con el procedimiento anterior podemos dividir un segmento en cualquier número de partes iguales.

Para localizar en la recta numérica el punto correspondiente a un número racional $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos, dividimos la unidad en b partes iguales; cada una de estas partes tiene longitud $\frac{1}{b}$, y tomamos ahora a de estos segmentos hacia la derecha a partir de cero; el extremo corresponde al número $\frac{a}{b}$.

Puesto que

$$,\frac{a}{b} < \frac{,a}{b} < \frac{a}{,b},$$

si el número racional $\frac{a}{b}$ es negativo, es decir, si $ab \,;\, 0$, dibujamos $,\frac{a}{b}$ (que es positivo) y reflejamos con respecto al origen.

Ejemplos

1. Localizar en la recta numérica el punto correspondiente a $\frac{8}{3}$.

Solución: Dividimos la unidad en 3 partes iguales y a partir del 0 tomamos 8 de estas partes iguales.

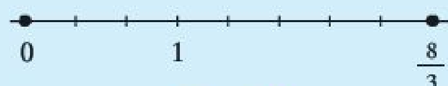


Figura 3.21

2. Localizar en la recta numérica el punto correspondiente a $\frac{-2}{7}$.

Solución: Puesto que $\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$ es negativo, localizamos primero $\frac{2}{7}$ y después lo reflejamos respecto al origen.

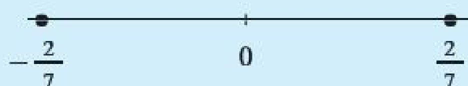


Figura 3.22

3. Localizar en la recta numérica los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y a $\frac{6}{8}$.

Solución: Para el primer caso, dividimos la unidad en 4 partes iguales y a partir de 0 tomamos 3 de ellas. En el segundo caso, dividimos la unidad en 8 partes iguales y a partir de 0 tomamos 6 de ellas. Observa que se obtiene el mismo punto en la recta.

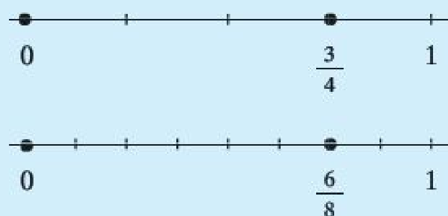


Figura 3.23

3.3.3 Expresiones decimales

Las siguientes son expresiones decimales

$$1.71305, \qquad -28.00000\ldots, \qquad -4.8372\ldots, \qquad 0.300113.$$

En general, una expresión de la forma:

$$^\circ\, n.x_1x_2x_3\ldots$$

donde n es un número natural y $x_1, x_2, x_3, \ldots$ son dígitos, es una *expresión decimal*.

Cualquier número racional puede ser escrito en forma decimal; para encontrar la expresión basta con efectuar la división correspondiente.

EJEMPLOS

1. Escribir la expresión decimal de $\frac{5}{4}$.

Solución:

$$
\begin{array}{l}
1.25\\
4\overline{)5}\\
10\\
20\\
0
\end{array}
$$

Entonces $\frac{5}{4} = 1.25$.

2. Escribir la expresión decimal de $\frac{2}{3}$.

Solución:

$$
\begin{array}{l}
0.66\\
3\overline{)20}\\
20\\
20\\
2
\end{array}
$$

Entonces $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$

3. Escribir la expresión decimal de $-\frac{314}{13}$.

Solución: Efectuamos la división, sin considerar el signo.

$$
\begin{array}{l}
24.1538461\ldots\\
13\overline{)314}\\
054\\
20\\
70\\
50\\
110\\
060\\
080\\
020\\
7
\end{array}
$$

Observamos que el residuo 2 ya se había obtenido antes; así que el cociente 1 se repite y el siguiente residuo debe ser 7, así que $-\frac{314}{13} = -24.1538461\ldots$

La expresión decimal de un número racional es finita o se repite sistemáticamente; es decir, es periódica. Por ejemplo $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ (el 6 se repite indefinidamente). Escribimos una barra arriba del número o grupo de números que se repite indefinidamente; así, $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ y $-\frac{314}{13} = -24.\overline{153846}$.

Las expresiones finitas pueden pensarse como expresiones decimales en las cuales, a partir de cierto momento, se repite el cero. Es decir,

$$\frac{5}{4} = 1.25 = 1.25000\ldots$$

Los hechos anteriores pueden justificarse observando que al efectuar la división, el número de residuos distintos no puede ser mayor que el divisor.

3.3.4 Suma y producto de números racionales

Para sumar dos fracciones que tengan el mismo denominador, simplemente se suman los numeradores y se pone el mismo denominador; por ejemplo,

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Cuando tienen denominadores distintos, lo que se debe hacer es escribirlos primero con el mismo denominador. Para ello, podemos utilizar el procedimiento de multiplicación que usamos en la sección anterior para comparar fracciones.

Ejemplo

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{8}=\frac{4\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{32}{40}+\frac{15}{40}=\frac{47}{40}.$$

En general,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Por supuesto, hay veces que se puede multiplicar por números más pequeños para obtener el mínimo común denominador; de esta manera se trabaja con números más chicos y se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}=\frac{30+28}{40}=\frac{58}{40}=\frac{29}{20}$$

pero también,

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}=\frac{3\times 5}{4\times 5}+\frac{7\times 2}{10\times 2}=\frac{15+14}{20}=\frac{29}{20}.$$

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y el resultado es el numerador del producto y se multiplican los denominadores y el resultado es el denominador del producto.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo

$$\frac{4}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}.$$

Dos números racionales son *recíprocos* uno del otro si su producto es 1. Por ejemplo, $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son recíprocos, ya que $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$. En general, si a y b son distintos de cero,

$$\text{el recíproco de } \frac{a}{b} \text{ es } \frac{b}{a}.$$

Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera por el recíproco de la segunda, que debe ser distinta de cero; así,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}.$$

Los números mixtos no son más que la suma de un entero y una fracción, así que para multiplicar un número mixto por un entero, utilizamos la propiedad distributiva.

$$4\left(3\tfrac{1}{16}\right) = 4\left(3 + \tfrac{1}{16}\right) = (4 \times 3) + \left(4 \times \tfrac{1}{16}\right) = 12 + \tfrac{1}{4} = 12\tfrac{1}{4}.$$

3.3.5 Ejercicios

Localiza en la recta los siguientes números racionales.

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{8}{3}$
3. $-\frac{2}{4}$
4. $-\frac{6}{7}$
5. $3\frac{1}{2}$
6. $-1\frac{1}{3}$
7. 3.2
8. -4.1

Escribe los siguientes números racionales en su expresión decimal.

9. $\frac{2}{5}$
10. $\frac{7}{8}$
11. $\frac{2}{3}$
12. $4\frac{5}{10}$
13. $\frac{21}{100}$
14. $\frac{3}{11}$
15. $\frac{4}{7}$
16. $\frac{1}{13}$

Efectúa las siguientes sumas.

17. $(-8) + 11$
18. $(-32) + (-71)$
19. $4.3 + (-0.75)$
20. $4\frac{1}{6} + \left(-10\frac{5}{6}\right)$
21. $\left(50\frac{1}{3}\right) + \left(-68\frac{2}{3}\right)$
22. $15\frac{5}{9} + \left(-15\frac{2}{3}\right)$
23. $89.65 + (-70.09)$
24. $(-5.03) + (-7.9)$
25. $6 + (-12)$
26. $(-125) + (-89.7)$
27. $5.68 + (-5.68)$
28. $549 + (-789)$
29. $\frac{11}{6} + \left(-\frac{21}{8}\right)$
30. $\left(-\frac{13}{4}\right) + \left(-\frac{13}{4}\right)$
31. $(-0.75) + \frac{3}{4}$
32. $\left(-\frac{16}{5}\right) + \frac{7}{5}$
33. $\left(-\frac{12}{5}\right) + \left(-\frac{8}{5}\right)$
34. $\left(-\frac{7}{4}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right)$
35. $9.132 + 0$
36. $8.2 + 45.7$
37. $(-6.73) + (-6.73)$
38. $0 + (-14.728)$
39. $(-3.2) + \left(-\frac{16}{5}\right)$
40. $-\frac{64}{11} + \left(-\frac{25}{22}\right)$
41. $3\frac{1}{4} + (-3.25)$
42. $-3.1416 + 3.1416$
43. $82\frac{1}{3} + \left(-67\frac{1}{2}\right)$
44. $408 + 137$
45. $-5.39 + (-9.27)$
46. $71.01 + (-71.23)$
47. $\frac{7}{8} - \frac{5}{12}$
48. $\frac{3}{7} + \frac{6}{5}$
49. $\left(-\frac{10}{13}\right) + \left(-\frac{10}{13}\right)$
50. $\left(-\frac{8}{19}\right) + 0$
51. $-\frac{25}{6} + \left(-\frac{11}{5}\right)$
52. $-38 + \frac{55}{7}$
53. $(-4.6) + 5.3 + (-8.7) + (-1.2)$
54. $\frac{2}{3} + \left(-2\frac{2}{3}\right) + 4 + \left(-\frac{5}{3}\right)$
55. $2.9 + 1 + (-6.8) + (-3.1) + 7$
56. $(-3.75) + (-7.52) + (-11.1)$
57. $0.5 + 0.25 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 0.75$
58. $\frac{1}{2} + \frac{13}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{15}{2}\right)$
59. $\left(-\frac{7}{2}\right) + 6 + \left(-\frac{5}{2}\right)$
60. $\left(-\frac{1}{4}\right) + 3 + \left(-1\frac{3}{4}\right) + (-1)$
61. $\left(-12\frac{3}{5}\right) + \left(-40\frac{4}{5}\right) + \left(-6\frac{2}{5}\right)$
62. $\frac{9}{8} + \left(-\frac{13}{6}\right) + \left(-\frac{17}{2}\right) + \frac{27}{8} + \left(-\frac{35}{8}\right)$
63. $\left(-\frac{14}{3}\right) + \left(\frac{17}{4}\right) + \left(-\frac{85}{12}\right) + \left(\frac{97}{4}\right)$
64. $(-3.6) + (-2.4) + (-5.1) + (-6.12)$
65. $10\frac{1}{6} + \left(-22\frac{1}{3}\right) + \left(15\frac{4}{9}\right) + 12\frac{5}{6}$
66. $25.9 + 37.4 + (-19.7) + (42.6) + (-52.8)$
67. $\frac{32}{27} + \left(-\frac{10}{3}\right) + \left(\frac{14}{9}\right) + \left(-\frac{68}{27}\right) + \left(-\frac{10}{9}\right)$
68. $(-35.9) + (-49.8) + 172.4 + (-53.4) + (-33.3)$

Efectúa las siguientes multiplicaciones y simplifica.

69. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{21}$
70. $\frac{5}{2} \times \frac{3}{10}$
71. $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$
72. $\frac{9}{4} \times \frac{20}{27}$
73. $\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5}$
74. $4\frac{1}{3} \times 2\frac{6}{5}$
75. $6\left(5\frac{2}{7}\right)$
76. $15\left(1\frac{1}{3}\right)$
77. $24\left(7\frac{3}{4}\right)$
78. $12(9.5)$
79. $-7(5.8)$
80. $14(10.27)$

Pitágoras de Samos (¿582-497? a. C.).
Filósofo griego que nació en la isla de Samos y murió en Metaponto, es considerado uno de los siete grandes sabios de Grecia y su vida estuvo siempre envuelta por la leyenda. Viajó a Egipto y Babilonia, donde asimiló conocimientos tanto matemáticos como astronómicos, así como un gran bagaje religioso. Fundó una secta caracterizada por el retiro, ascetismo y misticismo. Se atribuye a la escuela pitagórica la demostración del teorema de Pitágoras y el descubrimiento de los números irracionales, como la raíz cuadrada de 2, que no se puede expresar como una fracción.

3.3.6 Los números reales

Utilizando los números racionales, podemos medir cualquier longitud con el grado de precisión que queramos, pero solo con ellos hay longitudes que no podemos medir exactamente. Desde el siglo V antes de nuestra era, los pitagóricos se dieron cuenta que no se puede medir, con un número racional, la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1; es decir, el número $\sqrt{2}$ no se puede escribir como cociente de dos enteros $\frac{p}{q}$, lo cual llegó a provocarles incluso problemas teológicos, pues llegaron a pensar que se debía a un error de los dioses, por lo cual guardaron en secreto este descubrimiento.

El hecho de que haya longitudes que no se pueden medir con los números racionales, significa geométricamente que en la recta numérica hay puntos a los cuales aún no les hemos asignado ningún número racional. Para subsanar esta deficiencia de los números racionales, es necesario considerar otros números, de manera que ahora a todo punto de la recta le corresponda un número. Los números que añadimos se llaman *números irracionales*.

EJEMPLOS

Los siguientes números son ejemplos de irracionales.

1. $\sqrt{2}$, que es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos miden 1.
2. π, que es el número de veces que cabe el diámetro de un círculo en su perímetro.

En general, para cualquier entero positivo n, que no sea cuadrado perfecto ($n \neq m^2$ para todo $m \in \mathbb{Z}$), la raíz cuadrada, $\sqrt{n}$, es un número irracional.

La colección de números formada por los números racionales y los números irracionales se llama el conjunto de los *números reales*.

$$\mathbb{R} = \{\text{Números racionales}\} \cup \{\text{Números irracionales}\}.$$

En la práctica, cuando necesitamos hacer operaciones con números irracionales, lo que hacemos es aproximar al número mediante un número decimal finito, con tantos decimales como necesitemos para obtener la precisión deseada; usualmente, cuando trabajamos a mano consideramos dos cifras decimales, pero cuando trabajamos con calculadora solemos usar ocho cifras decimales, que es lo que cabe en la pantalla de la mayoría de las calculadoras portátiles. Así, escribimos $\sqrt{2} = 1.41421356$ y $\pi = 3.14159265$, pero no debemos olvidar que esto es una aproximación.

El conjunto de los números reales tiene una propiedad adicional de completez, que no abordaremos aquí: sin embargo, podemos decir que dicha propiedad nos permite asociar a cada número un punto en la recta y, recíprocamente, cada punto en la recta tiene asociado un número real y es la que distingue a los racionales de los reales.

Con ayuda de esta propiedad puede probarse que, ahora sí, a cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real.

La recta numérica, en la cual a cada punto de ella se le ha asignado un número real, se llama la *recta real*.

Para los números irracionales también podemos encontrar una expresión decimal. En este caso, la expresión decimal correspondiente no es finita ni se repite periódicamente.

EJEMPLOS

1. $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$
2. $\pi = 3.141592\ldots$

Utilizando la expresión decimal, podemos encontrar de manera aproximada el punto que corresponde a cada número irracional en la recta. Ilustramos el procedimiento mediante el siguiente

Ejemplo

- Encontrar en la recta el punto correspondiente a π.

Solución: Localizamos el punto correspondiente a la cifra entera, que en este caso es 3.

Localizamos el punto correspondiente al entero consecutivo, de manera que el punto que buscamos se encuentre entre los dos. En este caso el punto es 4.

Dividimos el segmento que va de 3 a 4 en 10 partes iguales, puesto que cada una de las divisiones corresponde a un décimo de longitud; entonces, la primera división corresponde a 3.1. Así, π está entre 3.1 y 3.2.

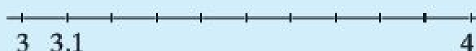


Figura 3.24

Dividimos el segmento que va de 3.1 a 3.2 en 10 partes iguales y tomamos el cuarto de los puntos determinados, que es el correspondiente a 3.14. Así, π está entre 3.14 y 3.15.



Figura 3.25

Continuando el procedimiento, podemos aproximarnos, de manera tan precisa como queramos, al punto de la recta correspondiente a π.

3.3.7 Propiedades de las operaciones en los números reales

Las propiedades de las operaciones en los números reales son las mismas que se cumplen en los números enteros, pero además, en los números reales todo número distinto de cero tiene inverso multiplicativo.

Si el producto de dos números es 1, decimos que los números son *recíprocos*, o que uno es el *inverso multiplicativo* del otro.

EJEMPLOS

- 8 y $\frac{1}{8}$ son recíprocos porque $8 \times \frac{1}{8} = 1$.
- $-\frac{1}{7}$ y -7 son recíprocos porque $\left(-\frac{1}{7}\right) \times (-7) = 1$.
- $\frac{6}{13}$ y $\frac{13}{6}$ son recíprocos porque $\frac{6}{13} \times \frac{13}{6} = 1$.

- 2.5 y 0.4 son recíprocos porque $2.5 \times 0.4 = 1$.
- -0.625 y -1.6 son recíprocos porque $(-0.625)(-1.6) = 1$.

Los siguientes casos son de particular importancia:

- 1 es su propio inverso multiplicativo, ya que $1 \times 1 = 1$.
- -1 es su propio inverso multiplicativo, ya que $(-1)(-1) = 1$.
- 0 no tiene inverso multiplicativo, ya que 0 multiplicado por cualquier número da 0, no 1.

Denotaremos al inverso de un número real a por $\frac{1}{a}$ o a^{-1}.

De acuerdo con los ejemplos anteriores,

$$\frac{1}{-\frac{1}{7}} = -7, \quad \frac{1}{\frac{6}{13}} = \frac{13}{6}, \quad \frac{1}{2.5} = 0.4, \quad \frac{1}{-0.625} = -1.6 \text{ y } \frac{1}{-1} = -1.$$

Propiedades fundamentales de la suma y el producto de los números reales

- *Propiedad de cerradura de la suma:* Si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real.
- *Propiedad conmutativa de la suma:* Si a y b son números reales, entonces $a + b = b + a$.
- *Propiedad asociativa de la suma:* Si a, b y c son números reales, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Existencia del neutro aditivo:* El número 0 satisface la igualdad $a + 0 = a$ para cualquier número real a.
- *Existencia del opuesto o inverso aditivo:* Si a es un número real cualquiera, existe un único número real al que llamamos $-a$, que satisface la igualdad $a + (-a) = 0$.
- *Propiedad de cerradura del producto:* Si a y b son números reales, entonces ab es un número real.
- *Propiedad conmutativa del producto:* Si a y b son números reales, entonces $ab = ba$.
- *Propiedad asociativa del producto:* Si a, b y c son números reales, entonces $(ab)c = a(bc)$.
- *Existencia del neutro para el producto:* El número 1 satisface la igualdad $a \times 1 = a$ para cualquier número real a.
- *Existencia del recíproco o inverso multiplicativo:* Si a es un número real distinto de cero, existe un único número real denotado como a^{-1} o $\frac{1}{a}$, que satisface la igualdad

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

- *Propiedad distributiva:* Esta propiedad relaciona la suma y el producto. Si a, b y c son números reales, entonces $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

Al igual que con los números naturales, el inverso aditivo satisface las siguientes propiedades:

Si a y b son números reales,

- $-(-a)=a.$
- $-(a+b)=-a-b.$

El inverso multiplicativo satisface propiedades semejantes.

Si a y b son números reales distintos de cero,

- $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$, o con la notación de fracciones, $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$
- $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, o con la notación de fracciones, $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\frac{1}{b}.$

3.3.7.1 División de números reales

La división entre un número real distinto de cero se define como la multiplicación por el inverso multiplicativo de dicho número, por ejemplo,

$$\text{La división } 6\div 2=3 \text{ equivale a la multiplicación } 6\times\frac{1}{2}=3.$$

Definición de la división

Si a y b son números reales, y $b\neq 0$, entonces

$$a\div b=a\left(\frac{1}{b}\right),$$

es decir, dividir entre un número distinto de cero es multiplicar por su recíproco.

Observa que la fracción $\frac{6}{2}$ significa dividir 6 entre 2, y en general el número racional $\frac{p}{q}$ significa dividir el entero p entre el entero q. Utilizamos esta misma notación para representar a la división de números reales.

$$\frac{a}{b}=a\div b.$$

EJEMPLOS

$$\frac{2.5}{20}=0.125,\ \frac{30}{4.5}=\frac{300}{45}=\frac{20}{3}\approx 6.6667,\ \frac{2}{\pi}\approx 0.63662$$

donde el símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual a".

Veamos una interpretación geométrica de la división.

Ejemplo

- Dividir $6\div 2$.

Solución: Marcamos el 6 en el eje horizontal, y en el eje vertical marcamos el 1 y el 2.

Unimos con una recta el 6 del eje horizontal y el 2 del eje vertical.

Por el 1 del eje vertical, trazamos una recta paralela a la anterior y nos fijamos en el punto donde corta al eje horizontal.

El punto donde corta es el resultado de la división.

La razón de lo anterior es que los triángulos formados son semejantes, así que si la altura del menor es la mitad de la altura del mayor, entonces la base del menor es la mitad de la base del mayor.

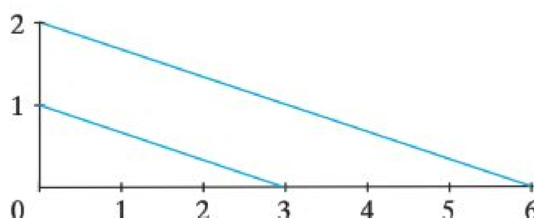


Figura 3.26 Interpretación geométrica de $6 \div 2$

De acuerdo con las leyes de los signos, para que el resultado de una multiplicación sea positivo, es necesario que ambos factores tengan el mismo signo, como:

$$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$$

y 1 es positivo, entonces a y $\frac{1}{a}$ tienen el mismo signo; es decir, un número y su recíproco tienen el mismo signo.

Tomemos ahora dos números reales a y b, ¿qué signo tiene $\frac{a}{b}$?

Si a y b tienen el mismo signo, como $\frac{1}{b}$ tiene el mismo signo que b, entonces a y $\frac{1}{b}$ tienen el mismo signo y, por tanto, $\frac{a}{b}$ es positivo.

Si a y b tienen signo contrario, como $\frac{1}{b}$ tiene el mismo signo que b, entonces, a y $\frac{1}{b}$ tienen signo contrario y, por tanto, $\frac{a}{b}$ es negativo.

Esto lo podemos resumir en las siguientes

Leyes de los signos de la división

- El cociente de dos números reales con el mismo signo es positivo.
- El cociente de dos números reales con distinto signo es negativo.

También podemos expresar las leyes anteriores mediante la siguiente tabla:

(+)	÷	(+)	=	(+)
(+)	÷	(−)	=	(−)
(−)	÷	(+)	=	(−)
(−)	÷	(−)	=	(+)

EJEMPLOS

1. Dividir $(-45) \div 9$.

Solución: Como -45 y 9 tienen signos contrarios, el resultado es negativo:

$$(-45) \div 9 = -5.$$

2. Simplificar $\frac{-8.6}{-3.1}$.

Solución: Como -8.6 y -3.1 tienen el mismo signo, el resultado es positivo:

$$\frac{-8.6}{-3.1} = \frac{8.6}{3.1}.$$

Simplificar $63 \div ((-18) \div 2)$.

Solución: Resolvemos primero la operación que está entre paréntesis:

$$(-18) \div 2 = -9,$$

entonces:

$$63 \div ((-18) \div 2) = 63 \div (-9) = -7.$$

Observa que si calculamos $(63 \div (-18)) \div 2$, obtenemos:

$$(63 \div (-18)) \div 2 = (-3.5) \div 2 = -1.75,$$

obteniendo un resultado distinto al anterior.

Observaciones importantes

- Como vimos en el último ejemplo, *la división no es asociativa;* es decir, en general,

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c).$$

- *La división no es conmutativa;* es decir, en general,

$$a \div b \neq b \div a;$$

por ejemplo:

$$16 \div 2 = 8 \;\text{ y }\; 2 \div 16 = 0.125.$$

- *El cociente de cero entre cualquier número distinto de cero siempre es cero,* ya que

$$0 \div b = 0 \times \frac{1}{b} = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{0}{b} = 0 \times \frac{1}{b} = 0;$$

por ejemplo:

$$\frac{0}{9} = 0 \times \frac{1}{9} = 0.$$

- *No se puede dividir entre cero,* ya que habría que multiplicar por el recíproco de cero y, como vimos, el cero no tiene recíproco.

- La regla para sumar fracciones con el mismo denominador es una consecuencia de la definición de la división y de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=a\left(\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}\right)=(a+b)\frac{1}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

  Observa que esta regla es cierta para números a, b, c reales y no sólo para enteros.

3.3.8 Agrupamiento

Como la suma y la multiplicación son operaciones asociativas, cuando tenemos expresiones como $5+4+7$ o $3\times5\times2$, están perfectamente determinadas, ya que:

$$(5+4)+7=9+7=16 \text{ y } 5+(4+7)=5+11=16$$

y también:

$$(3\times5)2=15\times2=30 \text{ y } 3(5\times2)=3\times10=30.$$

En cambio, si tenemos la expresión $4+3\times2$, y si efectuamos

primero la suma:	primero la multiplicación:
$\underbrace{4+3}\times2 =$	$4+\underbrace{3\times2} =$
$7\times2 = 14$	$4+6 = 10$

entonces obtenemos, en general, respuestas diferentes. ¿Cuál es el resultado correcto? Para evitar confusiones, cuando hay más de una operación, se ha convenido un orden de precedencia.

Orden de las operaciones

- Primero, efectuar todas las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Después, efectuar todas las sumas y restas de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

1. Simplificar $3+4\times5-8\div2$.

   Solución:

$$\begin{aligned}3+\underbrace{4\times5}-\underbrace{8\div2} &=\\ 3+20-4 &= 19.\end{aligned}$$

2. Simplificar $15-72\div9\times3$.

   Solución:

$$\begin{aligned}15-\underbrace{72\div9}\times3 &=\\ 15-\underbrace{8\times3} &=\\ 15-24 &= -9.\end{aligned}$$

Cuando queremos cambiar el orden en que se van a realizar las operaciones, utilizamos símbolos de agrupamiento, como paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }.

Efectuamos primero las operaciones dentro de los símbolos de agrupamiento siguiendo las reglas de precedencia anteriores.

Si hay varios símbolos de agrupamiento, uno dentro de otro, primero efectuamos las operaciones de los símbolos interiores y luego los exteriores.

La raya de las fracciones — también podemos pensarla como un signo de agrupamiento, ya que, por ejemplo, $\frac{9+5}{6-4}$ significa

$$\frac{9+5}{6-4}=(9+5)\div(6-4)=14\div 2=7.$$

Así que cuando tenemos operaciones en el numerador o en el denominador de una fracción, primero efectuamos éstas y luego efectuamos la división.

EJEMPLOS

1. Simplificar $5(3+6)$.

Solución: Efectuamos primero la suma dentro del paréntesis y luego la multiplicación:

$$5(3+6)=5\times 9=45.$$

2. Simplificar $4-[5-(3+8)]$.

Solución:

$$4-[5-(3+8)]=4-[5-11]=4-[-6]=10.$$

3. Simplificar $\frac{2(4.3-7)}{4.3+4.7}$.

Solución:

$$\frac{2(4.3-7)}{4.3+4.7}=\frac{2(-2.7)}{9}=\frac{-5.4}{9}=-0.6.$$

4. ¿A cuánto equivale la mitad de dos más dos?

Solución: Tenemos dos posibles interpretaciones:

- La mitad de dos es uno, más dos, da tres.

$$\frac{2}{2}+2=1+2=3.$$

- Dos más dos es cuatro y su mitad es dos.

$$\frac{2+2}{2}=(4)\frac{1}{2}=2.$$

Esta frase requiere precisarse para que no haya confusión.

Propiedades de orden

En los números reales definimos el orden de la misma manera en que lo hicimos en el caso de los números enteros (véase la sección 3.2.7).

Definición

Dados dos números enteros a y b, decimos que *a es menor que b* si al colocarlos en la recta a queda a la izquierda de b, y escribimos $a < b$, que se lee "a es menor que b" o "b es mayor que a".



Figura 3.27

Como en el caso de los enteros, el orden en los números reales satisface las siguientes propiedades:

- *Tricotomía*

  Se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

  $$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b.$$

- *Transitividad*

  Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

  Es decir, si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c, entonces a está a la izquierda de c.

- *Relación con la suma*

  Si $a < b$ y c es cualquier número real, entonces $a + c < b + c$.

- *Multiplicación por un número positivo*

  Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

- *Multiplicación por un número negativo*

  Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

EJEMPLOS

1. Comparar -3.2 y 1.7.

   Solución: Como $-3.2 < 0$ y $0 < 1.7$, entonces, por la transitividad, $-3.2 < 1.7$.

   En general, *un número negativo siempre es menor que un número positivo.*

2. Comparar 123.6 y 98.1.

   Solución: Comparamos de izquierda a derecha los dígitos que lo forman, teniendo en cuenta su valor posicional, hasta encontrar una diferencia.

   $1 > 0$ ojo: 98.1 tiene 0 centenas

así que $123.6 > 98.1$

Analizando con más cuidado, el hecho de que 123.6 tenga un 1 en la posición de las centenas significa que $123.6 \geq 100$, mientras que el hecho de que 98.1 tenga un 0 en esa posición significa que $98.1 < 100$, así que por la transitividad, $123.6 > 98.1$.

3. Comparar 0.250 y 0.025.

Solución: En la posición de los décimos tenemos $2 > 0$, por lo que $0.250 > 0.025$.

4. Comparar −27.35 y −27.86.

Solución: Es más fácil comparar primero 27.35 y 27.86. Como en la posición de los décimos $3 < 8$, entonces, $27.35 < 27.86$. Ahora, por la propiedad de multiplicación por un número negativo, si multiplicamos la desigualdad anterior por (-1) en ambos lados, obtenemos

$$-27.35 > -27.86.$$

■

3.3.9 Ejercicios

Efectúa las siguientes operaciones y simplifícalas.

1. $(-1.23-3.9)-(2.6-5.4)$
2. $125-(97.65-101.4)$
3. $(30.8-27.6)-75.4$
4. $\left(\frac{25}{6}-\frac{55}{6}\right)-\left(\frac{43}{6}-\frac{85}{6}\right)$
5. $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$
6. $50\frac{4}{7}-\left(121-39\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{7}=-\frac{219}{7}$
7. $3\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\right)-1=\frac{22}{3}$
8. $9.7-3.2+7.1-2.6-0.4$
9. $\frac{9}{4}-\frac{4}{9}+\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{4}-6\right)-\frac{8}{9}$
10. $\left[-\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[-\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right]$
11. $[-3.8+(-5.3)]-[-(-3.8+5.3)]$
12. $2.5+(1.8-0.6)-(3.9-4.1)-8$

Encuentra el recíproco de los siguientes números.

13. 83
14. −42
15. −2.5
16. $\frac{1}{6}$
17. $-\frac{6}{7}$
18. 6.25
19. $\frac{1}{14}$
20. −0.40
21. 0.25
22. −0.35
23. −9.15
24. 24
25. −0.03125
26. −15
27. $-2\frac{2}{5}$
28. $3\frac{1}{3}$
29. $-5\frac{2}{7}$
30. $\frac{21}{4}$
31. $-\frac{5}{7}$
32. $\frac{32}{21}$

Simplifica las expresiones siguientes.

33. $\frac{-81}{-9}$
34. $144\left(-\frac{1}{12}\right)$
35. $\frac{-(3.86-7.1)}{6}$
36. $-56\div 7$
37. $0.25(4)$
38. $33\div 0.03$
39. $(-16.9)\div 1.3$
40. $(3.36\div 2.1)\div(-0.4)$
41. $0\div 5\frac{3}{7}$
42. $\left(-1\frac{1}{2}\right)\div 1\frac{1}{16}$
43. $5\frac{1}{3}\div\left(-\frac{4}{9}\right)$
44. $-\left(4\frac{1}{6}\div 2\frac{1}{2}\right)\div 1\frac{2}{3}$
45. $-72\div(56\div(-7))$
46. $(-84\div 6)\div(-2)$
47. $5[(208\div(-4))\div 4]$
48. $\left(-\frac{25}{3}\right)\div\left(\frac{8}{5}+\frac{2}{5}\right)$
49. $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$
50. $\left(2\frac{7}{9}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)$
51. $(-9+2-7+4)\div(-6-7+18)$
52. $(-28+6-8+2)\div(2(-9)+4)$
53. $\left(\frac{5}{9}\div 6\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)$
54. $\dfrac{(-23+35)+2(56-48)}{17-31}$
55. $((-72\div 4)+9)-12$
56. $(63.58-(-21.56))\div(12.34-15.64)$

57. Para cambiar grados Fahrenheit a grados centígrados (o Celsius) se utiliza la fórmula: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresa en grados centígrados las siguientes temperaturas:

a. –13 °F. **b.** 0 °F. **c.** 23 °F. **d.** 100 °F.

58. Para cambiar grados centígrados a grados Fahrenheit se utiliza la fórmula: $F = \frac{9}{5}C + 32$. Expresa en grados Fahrenheit las siguientes temperaturas:

a. 15 °C. **b.** 0 °C. **c.** –7 °C. **d.** 31 °C.

Resuelve los siguientes problemas.

59. María tenía $897. Tuvo que pagar una cuenta de $78.65, una de $53 y una de $8.50. Juan le pagó $101.80 que le debía. ¿Cuánto dinero tiene ahora María?

60. Una persona está a dieta para aumentar de peso. El primer mes subió 0.75 kilogramos. El segundo mes bajó $\frac{1}{2}$ kilo. El tercer mes aumentó $1\frac{3}{4}$ kilos y el cuarto mes bajó $\frac{2}{3}$ de kilo. ¿Cuántos kilos subió?

61. Una persona está siguiendo una dieta para adelgazar. El primer mes bajó $2\frac{1}{4}$ kilos, el segundo bajó $1\frac{1}{8}$, el tercero subió $\frac{3}{4}$ de kilo y el cuarto perdió $1\frac{1}{2}$ kilos. ¿Cuántos kilos bajó en total?

62. ¿Cuánto debemos recortar en la base a un rectángulo de 10 metros de base y 8 metros de altura para tener un rectángulo cuya área sea de 44 m²?

63. Una señora tenía 8 tazas de leche en un recipiente. Utilizó $2\frac{2}{3}$ tazas para hacer un pastel y $3\frac{1}{4}$ tazas para hacer un flan. ¿Cuántas tazas de leche le quedan?

64. En la expresión $9 \times 8 - 12 \div 3$ coloca los paréntesis de manera que su valor sea:

a. 68 **b.** 20 **c.** –12 **d.** 36

65. En la expresión $7 \times 2 + 10 - 4 \div 2$ coloca los paréntesis de manera que su valor sea:

a. 17 **c.** 28 **e.** –48

b. 10 **d.** 22 **f.** 40

66. En la expresión $16 - 12 - 8 - 24 \div 4$ coloca los paréntesis de manera que su valor sea:

a. 2 **c.** –3 **e.** 8 **g.** 21 **i.** –7

b. 9 **d.** –10 **f.** 5 **h.** 6 **j.** 18

3.3.10 Números algebraicos y trascendentes

Un número es *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros; en caso contrario, decimos que el número es *trascendente*.

EJEMPLOS

1. El número racional $r = \frac{5}{3}$ es algebraico ya que es raíz de la ecuación $5x - 3 = 0$. Lo mismo puede hacerse para cualquier racional $\frac{a}{b}$.

2. Los números e y π son trascendentes, además de irracionales.

Observación:

Hay números irracionales que no son trascendentes. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico ya que es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

3.3.11 Problemas sin solución en los números reales

Como en el caso de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, hay también ecuaciones que no tienen solución.

EJEMPLOS

- Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Solución: Cualquier solución de la ecuación dada debe cumplir $x^2 = -1$. Puesto que cualquier número real elevado al cuadrado es mayor o igual que cero, no hay un número real que sea solución de la ecuación.

Para poder resolver este tipo de ecuación, hay que introducir una clase de números llamados *complejos,* que se denotan mediante $\mathbb{C}$. Para ello, se define un número i, cuyo cuadrado es –1, es decir, $i^2 = -1$, y se consideran todos los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

El estudio de los números complejos está más allá de los objetivos de este libro; más adelante veremos una introducción. Aquí únicamente damos su definición. La razón de ser del conjunto de números complejos es poder garantizar que toda ecuación polinomial de grado n tendrá n raíces en el campo de los números complejos.

3.3.12 Razones y proporciones

Una *razón* es el cociente de dos números. Podemos representar una razón como una fracción, al utilizar el símbolo de la división o separar las cantidades por medio de dos puntos.

EJEMPLOS

1. La razón 8 es a 5 la escribimos como:

$$\frac{8}{5} \quad \text{o} \quad 8 \div 5 \quad \text{o} \quad 8 : 5$$

2. Escribir una razón para comparar 45 minutos con 2 horas.

Solución: Escribimos las dos cantidades en la misma unidad.

$$2 \text{ horas } = 120 \text{ minutos.}$$

Escribimos la razón y simplificamos

$$\frac{45 \text{ minutos}}{120 \text{ minutos}} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

La razón es $\frac{3}{8}$.

3. ¿Cuál es la razón entre la altura de una casa de 10 metros y la altura de su maqueta de 20 centímetros?

Solución: Escribimos la altura de la casa en centímetros y escribimos la razón.

$$\frac{1000 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \frac{50}{1}.$$

La razón es $\frac{50}{1}$.

Una *proporción* es una igualdad que establece que dos razones son iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

Propiedad de la proporción

Para cualesquiera números enteros a, b, c y d donde $b \neq 0, d \neq 0$

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } ad = bc.$$

EJEMPLOS

1. Una inversión de $3 324 produce $277 de rédito en un año, ¿cuánto producirán $3 780 a la misma tasa de interés?

Solución: Llamamos x al rédito producido por la segunda inversión.
La razón del capital a los réditos en el primer caso es:

$$\frac{3\,324}{277}$$

y en el segundo caso es:

$$\frac{3\,780}{x}.$$

Como la tasa de interés es la misma, igualamos las dos razones y resolvemos la ecuación:

$$\frac{3\,324}{277} = \frac{3\,780}{x}$$
$$3\,324x = 3\,780 \times 277$$
$$x = \frac{3\,780 \times 277}{3\,324} = 315.$$

Por tanto, el rédito generado por $3 780 es $315.

2. Un automóvil recorrió 255 kilómetros en 3 horas, ¿cuánto recorrerá en 5 horas si mantiene la misma velocidad?

Solución: Llamamos x a la distancia recorrida en 5 horas.
La razón de la distancia entre el tiempo debe ser la misma en los dos casos, así que

$$\frac{255}{3} = \frac{x}{5}.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{255}{3} = \frac{x}{5}$$
$$\frac{255 \times 5}{3} = x$$
$$85 \times 5 = x$$
$$425 = x.$$

Por tanto, el automóvil recorrerá 425 kilómetros en 5 horas.

3.3.13 Ejercicios

1. Dos números están en razón $\frac{3}{7}$. Si el menor de ellos es 189, ¿cuál es el otro?

2. Dos obreros trabajan en una fábrica empacando calcetines, pero mientras uno empaca 3 cajas, el otro empaca 7 cajas. Si el más hábil ha empacado 91 cajas, ¿cuántas ha empacado el otro?

3. Dos números se encuentran en razón $\frac{1}{4}$. Si se sabe que uno es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

4. Si al comer 90 gramos de cereal se consumen 360 calorías, ¿qué cantidad de cereal debe comerse para consumir solamente 80 calorías?

5. Dos ángulos están en razón 6 a 7. Si el menor mide 30°, ¿cuánto mide el otro?

6. En un triángulo isósceles, el lado desigual está en razón $\frac{1}{3}$ a los lados iguales. Si el lado mayor mide 1.8 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

7. En la república de Haití, en 1970 la razón entre el número de km^2 de superficie y el número de habitantes era de 1 a 175. Si el número de habitantes en ese momento era de 4 856 250, ¿qué superficie tiene Haití?

8. Las velocidades máximas de una mariposa y un avestruz están en razón $\frac{2}{3}$. Si la mariposa, que es la que alcanza menor velocidad puede recorrer 48 km en una hora, ¿cuántos kilómetros recorrerá el avestruz en el mismo tiempo?

9. Se estima que uno de cada 25 bebés hijos de madres que contrajeron rubeola durante el cuarto mes de embarazo sufre alguna anomalía congénita. ¿Qué número de bebés afectados habrá en 25 575 niños, hijos de madres que contrajeron la enfermedad?

10. En 1974, la razón entre las especies de insectos descritos hasta entonces y el total de ellos era $\frac{19}{60}$. Si entonces se tenía la descripción de 950 000 especies, ¿cuál era el total de especies de insectos?

3.3.14 Valor absoluto de un número real

Cuando vimos los números enteros, hablamos brevemente del valor absoluto de un número. Ahora analizaremos con más detalle este concepto.

El *valor absoluto* de un número real es su distancia al cero. Puesto que un número real puede ser positivo, negativo o cero, se tiene:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

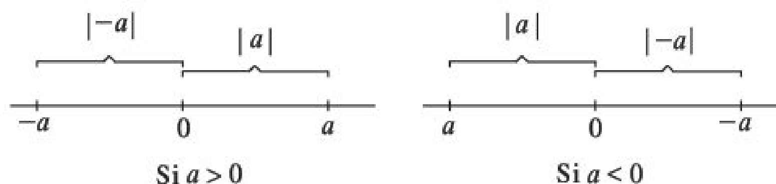


Figura 3.28

Ya vimos este concepto cuando estudiamos los números enteros, así que lo recordaremos brevemente y veremos algunas de sus propiedades adicionales en $\mathbb{R}$.

Recuerda que si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Es claro que

$$|a| = |-a|$$

pues a dista de 0 lo mismo que su simétrico.

Observación:

La letra a representa un número que puede ser positivo, negativo o cero. Por consiguiente $-a$ no es necesariamente un número negativo, y podremos decirlo hasta que sepamos qué número representa a.

EJEMPLOS

1. Si $a = \frac{3}{4}$, entonces $-a = -\frac{3}{4}$.
2. Si $a = -1.6$, entonces $-a = 1.6$.
3. Si $a = 0$, entonces $-a = 0$.

Observaciónes:

- El valor absoluto de cualquier número es no negativo.

  $-x$ no es necesariamente un número negativo; por ejemplo, si $x=-8$, entonces

  $$-x=-(-8)=8.$$

  que es positivo.

Algunas propiedades del valor absoluto

Si a y b son dos números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $|-a|=|a|$.
- $|a|^2=a^2$.
- $|a|=\sqrt{a^2}$, donde $\sqrt{b}$ denota la raíz no negativa de b, para cualquier número $b\geq 0$.
- $|ab|=|a||b|$.
- $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

EJEMPLOS

1. $|-11|=|11|=11$
2. $|-12|^2=(-12)^2=144$
3. $|5|=\sqrt{5^2}=5$
4. $|8\cdot 15|=|8||15|=120$
5. $\left|\frac{-7}{3}\right|=\frac{|-7|}{|3|}=\frac{7}{3}$
6. Resolver la ecuación $|x|=7$.

   Solución: Puesto que en la ecuación aparece un valor absoluto, consideramos tres casos:

   Si $x=0$, entonces $|x|=0$. Como $0\neq 7$, entonces no se satisface la igualdad.
   Si $x>0$, entonces $|x|=x$, de donde $x=7$.
   Si $x<0$, entonces $|x|=-x$, de donde $-x=7$. Así, $x=-7$.

   Por tanto, $x=7$ y $x=-7$ satisfacen la igualdad. Esto era de esperarse ya que 7 y -7 son los únicos puntos cuya distancia al cero es 7.



Figura 3.29

3.4 INTERVALOS

Para definir intervalos utilizamos la notación de conjuntos.

- Si $a < b$, el conjunto

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

se llama *intervalo abierto* y lo representamos geométricamente como



Figura 3.30

- Si a y b están incluidos en el conjunto, es decir,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

se llama *intervalo cerrado* y lo representamos geométricamente como



Figura 3.31

- Un intervalo es *semiabierto* si contiene sólo uno de los dos extremos; es decir,

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \quad \text{o} \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

y los representamos geométricamente como



Figura 3.32

Utilizamos el símbolo ∞ para representar "infinito"; ∞ no es un número real y no satisface las reglas de la suma y el producto de los números reales.

- Si $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x > a$ lo denotamos por

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

y lo representamos geométricamente como

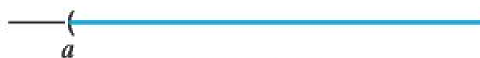


Figura 3.33

y lo llamamos el rayo que parte de a.

- Si $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x < a$ lo denotamos por

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

y lo representamos geométricamente como



Figura 3.34

Éste es también un rayo que llega a a pero que se extiende en dirección contraria al del inciso anterior.

- De la misma manera que antes, si queremos que el punto a esté incluido, escribimos

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\} \qquad \text{o} \qquad (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$$

respectivamente, y lo representamos geométricamente como:



Figura 3.35

Utilizando las operaciones de conjuntos podemos hablar de uniones e intersecciones de intervalos.

EJEMPLOS

1. Encontrar $(-2,5)\cap[1,7]$.

Solución:

$$(-2,5)\cap[1,7]=[1,5).$$



Figura 3.36

2. Escribir usando notación de intervalos,
$\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<5\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\}$

Solución:

$$\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<5\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\}=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\}=(-2,\infty)$$



Figura 3.37

3.4.1 Ejercicios

Simplifica los siguientes valores absolutos.

1. $|-19|$
2. $-|48|$
3. $|0.63|$
4. $\left|\frac{0}{14}\right|$
5. $\left|-\frac{21}{13}\right|$
6. $\left|-\frac{1}{5}\right|$
7. $|-\sqrt{3}|$
8. $-|-\sqrt{6}|$
9. $-|\sqrt{2}|$
10. $-|37.95|$
11. $|-\pi|$
12. $-|-(-1.28)|$
13. $|-0.25|$
14. $|0.58|$
15. $|-(-9)|$
16. $-|68|$
17. $-|-1.3|$
18. $|-76.05|$
19. $\left|5\tfrac{3}{4}\right|$
20. $-\left|-3\tfrac{7}{12}\right|$

Escribe usando notación de intervalos

21. $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$

22. $\{b \in \mathbb{R} \mid b < \frac{1}{2}\}$

23. $\{z \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < z \le 9\}$

24. $\{w \in \mathbb{R} \mid -21 \le w < -7\}$

25. $\{a \in \mathbb{R} \mid -8.74 \le a\}$

26. $\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{12}{11} \le y \le \frac{25}{3}\}$

27. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{45}{4} < x < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{11}{2} < x < \frac{11}{2}\}$

28. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

29. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 10\}$

30. $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 4\}$

Encuentra:

31. $(-8,5) \cap [-3,6]$

32. $(5,9) \cup (-2,8)$

33. $(7,\infty) \cap (-\infty,-1)$

34. $(-\infty,1] \cap [-\frac{3}{5},1)$

35. $(-\infty,-4] \cup (0,\frac{12}{7}]$

36. $(-\infty,-\frac{11}{5}) \cap (-2,\infty)$

37. $(-\infty,-2) \cup (-4,\infty)$

38. $(-3,\infty) \cap (\frac{9}{2},\infty)$

39. $(-\infty,-7.9) \cap (-\infty,-9.7)$

40. $(\frac{25}{4},\infty) \cup (6.5,\infty)$

41. $(-21,0) \cap \varnothing$

42. $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

43. $(-\infty,-5) \cap (9,\infty)$

44. $(-\infty,-\frac{22}{15}) \cup (-\frac{4}{9},\frac{5}{6})$

45. $(\frac{3}{4},6) \cup \varnothing$

46. $(5,\infty) \cap ((1,\infty) \cap (21,\infty))$

47. $(-3,10) \cup ((-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (6,\infty))$

48. $(-\infty,-\frac{1}{2}) \cap ((-\infty,\frac{3}{4}) \cap (-\infty,-1))$

49. $((-8,-7) \cup (-\frac{9}{2},\infty)) \cap (-9,2)$

50. $((-\infty,\frac{3}{4}) \cap (-\infty,6)) \cup (-2,4)$

51. $(\frac{7}{5},\infty) \cap ((-3,\frac{1}{2}) \cup \varnothing)$

3.5 Leyes de los exponentes

Si a es un número real y n un entero no negativo, definimos a^n como:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots a}^{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0.$$

Si a es distinto de cero, también podemos definir a^n para $n \le 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Ejemplos

$$2.1^3 = 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 9.261, \qquad -9.32^0 = 1, \qquad \pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$$

Los exponentes satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como *leyes de los exponentes.*

- Si a es un número real y n, m son números enteros, entonces $a^n a^m = a^{n+m}$.
- Si a es un número real y n, m son números enteros, entonces $(a^n)^m = a^{nm}$.
- Si a y b son números reales y n es un número entero, entonces $(ab)^n = a^n b^n$.
- Si a y b son números reales, $b \neq 0$ y n es un número entero, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

EJEMPLOS

1. Simplificar $5^7 \cdot 5^3$.

Solución:

$$5^7 \cdot 5^3 = 5^{10}.$$

2. Simplificar $\left(8^9\right)^3$.

Solución:

$$\left(8^9\right)^3 = 8^{27}.$$

3. Simplificar $(2 \cdot 6)^{15}$.

Solución:

$$(2 \cdot 6)^{15} = 2^{15} \cdot 6^{15}$$

4. Simplificar $\left(\frac{1}{20}\right)^4$.

Solución:

$$\left(\frac{1}{20}\right)^4 = \frac{1^4}{20^4} = \frac{1}{20^4}.$$

5. Comparar $\left(2^3\right)^2$ y $2^{\left(3^2\right)}$.

Solución:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64 \qquad \text{y} \qquad 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512,$$

así que, $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{\left(3^2\right)}$, por lo que debe tenerse cuidado en el orden en que se efectúan las potencias; la expresión 2^{3^2} es ambigua y debe evitarse pues podría dar origen a cualquiera de las dos interpretaciones anteriores.

6. ¿Cuál es la cantidad que se obtiene al invertir \$1000 a un interés compuesto de 3% bimestral durante 2 años?

Solución: Al terminar el primer bimestre la ganancia será

$$1000(0.03)$$

que agregado al capital inicial, da al término del primer bimestre:

$$1000 + 1000(0.03) = 1000(1 + 0.03).$$

Para el segundo bimestre, la cantidad anterior se invierte al 3%, con lo que se obtiene como ganancia:

$$1000(1 + 0.03)(0.03).$$

Agregando esta cantidad a la que se tenía al inicio del segundo bimestre, se tiene:

$$1000(1 + 0.03) + 1000(1 + 0.03)(0.03) = 1000(1 + 0.03)(1 + 0.03) =$$
$$1000(1 + 0.03)^2.$$

Siguiendo este procedimiento, puesto que en un año hay seis periodos bimestrales, el capital más los intereses correspondientes serán:

$$1\,000(1+0.03)^6.$$

Al finalizar el segundo año:

$$1\,000\left((1+0.03)^6\right)^2 = 1\,000(1+0.03)^{12} = 1\,000(1.03)^{12} \approx 1425.76.$$

La cantidad que se obtiene es aproximadamente $1 425.76.

3.5.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, simplifica las siguientes expresiones.

1. $(-2)^2(-2)^5$
2. $(7^3)(7^8)(7^4)$
3. $8(-1)^7\left(2(-1)^2\right)(-1)$
4. $(2^8)^7$
5. $(-8)^{12}(-8)^6$
6. $-1.5\left(4^5\right)^2$
7. $7(5)\left(\frac{5^{11}}{14}\right)6\left(5^2\right)$
8. $8(-3(-9))\left(\frac{5}{18}(-9)\right)\left(\frac{(-9)^{17}}{10}\right)$
9. $\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(-12\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4$
10. $4\left(\frac{2}{7}\right)^8\left(3\left(\frac{2}{7}\right)^7\right)^4$
11. $-7\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$
12. $\left((0.5)\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^5$
13. ¿Cuánto recibe un empleado que guarda $700 en una caja de ahorros durante un año, si el interés que se le aplica es del 1.5% bimestral?
14. ¿Cuál es el rédito que se obtendrá al invertir un capital de $1000 a una tasa de interés compuesto de 3% al cuatrimestre durante un periodo de 2 años? ¿Conviene más hacer la inversión durante el mismo periodo si la tasa de interés compuesto que se ofrece es de 10% anual?
15. Si se invierte $10000 a un interés compuesto de 2% bimestral, ¿cuál será el capital al cabo de tres años?
16. ¿Qué rendimiento produce invertir $125000 a un interés compuesto de 2.5% cuatrimestral, invertido a un periodo de seis años?

3.5.2 Notación científica

Para poder escribir números muy grandes o muy pequeños usamos una notación especial, que consiste en utilizar potencias de 10, llamada notación científica, que consiste en escribir los números como un número decimal de un solo dígito entero multiplicado por una potencia de 10.

EJEMPLOS

1. Expresar 345.42 en notación científica.

   Solución:

$$345.42 = 3.4542 \times 10^2.$$

2. Expresar 0.009876 en notación científica.

   Solución:

$$0.009876 = 9.876 \times 10^{-3}.$$

3. La velocidad de la luz en el espacio es de 3.0×10^8 metros por segundo. ¿Cuánto mide un año luz en metros?

Solución: Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año, así que veamos cuántos segundos hay en un año:

$$60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31\,536\,000 = 3.1\,536 \times 10^{7} \text{ segundos.}$$

Ahora multiplicamos esta cantidad por la cantidad de metros que recorre la luz en un segundo:

$$3.1\,536 \times 10^{7} \times 3.0 \times 10^{8} = 9.4608 \times 10^{15} \text{ metros.}$$

El número anterior suele redondearse a 9.46×10^{15} metros, e incluso a 1×10^{16}, pues pocas distancias cósmicas se conocen suficientemente bien para que el redondeo pueda suponer pérdida de precisión.

3.5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, expresa en notación científica.

1. 43.65 **2.** 0.0076 **3.** 827 000 000 000 **4.** 0.000000000032

En los ejercicios 5 a 10, efectúa la operación indicada y expresa el resultado en notación científica.

5. $8(4.5 \times 10^{3})$

6. $5.3(2.1 \times 10^{-8})$

7. $(3.2 \times 10^{4})(1.5 \times 10^{5})$

8. $\dfrac{(7.2 \times 10^{-3})(8.1 \times 10^{2})}{(4.3 \times 10^{5})}$

9. $\dfrac{(4.1 \times 10^{3})(5.8 \times 10^{-9})}{(5.2 \times 10^{4})}$

10. $\dfrac{(6.4 \times 10^{5})(5.7 \times 10^{-6})}{(1.2 \times 10^{3})(4.2 \times 10^{9})}$

11. Una mol de cualquier elemento químico contiene 6.03×10^{23} átomos. Si una mol de carbono pesa 12 gramos, ¿cuánto pesa cada átomo?

12. En un circuito eléctrico de un ampere fluyen 6.2×10^{18} electrones por segundo en cualquier punto del circuito. ¿Cuántos electrones fluyen a través de un foco de 100 watts con una corriente de 120 volts durante una hora? (watts = volts × ampere).

13. La distancia de la Tierra al Sol es de 1.5×10^{8} km. Saturno está 9.54 veces más lejos del Sol que la Tierra, ¿a qué distancia está Saturno del Sol?

3.6 Logaritmos

John Napier (o Neper) (1550-1617).
Matemático y teólogo escocés quien, simultáneamente con John Briggs (1561-1631), introdujo y usó los logaritmos como un poderoso dispositivo matemático práctico y teórico con el cual se simplifican los cálculos de las multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces, muy necesarios en los estudios astronómicos. Los logaritmos fueron la base de la regla de cálculo desarrollada alrededor de 1630.

Observemos la siguiente tabla:

$2^{0} = 1$	$3^{0} = 1$	$5^{0} = 1$	$10^{0} = 1$
$2^{1} = 2$	$3^{1} = 3$	$5^{1} = 5$	$10^{1} = 10$
$2^{2} = 4$	$3^{2} = 9$	$5^{2} = 25$	$10^{2} = 100$
$2^{3} = 8$	$3^{3} = 27$	$5^{3} = 125$	$10^{3} = 1000$
$2^{4} = 16$	$3^{4} = 81$	$5^{4} = 625$	$10^{4} = 10\,000$

A partir de ésta podemos decir, entre otras cosas, que:

- El exponente al que hay que elevar el número 2 para obtener 8 es 3.
- El exponente al que hay que elevar el número 3 para obtener 9 es 2.
- El exponente al que hay que elevar el número 5 para obtener 5 es 1.
- El exponente al que hay que elevar el número 10 para obtener 10 000 es 4.

Los números 2, 3, 5 y 10 se denominan, en cada caso la *base* y el exponente se llama el *logaritmo* de base 2, 3, 5 y 10 respectivamente. Así, usando las afirmaciones anteriores decimos, respectivamente, que:

- El logaritmo de base 2 del número 8 es 3, y lo denotamos como $\log_2 8 = 3$.
- El logaritmo de base 3 del número 9 es 2, y lo denotamos como $\log_3 9 = 2$.
- El logaritmo de base 5 del número 5 es 1, y lo denotamos como $\log_5 5 = 1$.
- El logaritmo de base 10 del número 10000 es 4, y lo denotamos como $\log_{10} 10\,000 = 4$.

En general, si b es un número positivo, entonces el logaritmo de base b de un número dado, x, es el exponente, y, al que hay que elevar la base b para obtener dicho número:

$$\log_b x = y \quad \text{significa} \quad b^y = x.$$

Observaciones:

- No sirve la base igual a 1, pues todas las potencias de 1 son iguales a 1.
- Para cualquier número positivo $b \neq 1$ tenemos que:

  $b^0 = 1$, entonces $\log_b 1 = 0$

  $b^1 = b$, entonces $\log_b b = 1$.
- No hay logaritmos de números negativos, pues si b es positivo, sus potencias son positivas.

3.6.1 Propiedades de los logaritmos

Para cualquier número positivo $b \neq 1$, el logaritmo de base b satisface:

- $\log_b (xy) = \log_b (x) + \log_b (y)$.
- $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b (x) - \log_b (y)$.
- $\log_b (x^n) = n \log_b (x)$.

EJEMPLOS

1. $\log_3(2\pi) = \log_3(2) + \log_3(\pi)$
2. $\log_5\left(\frac{8}{7}\right) = \log_5(8) - \log_5(7)$
3. $\log_{10}\left(\left(\sqrt{2}\right)^3\right) = 3\log_{10}\left(\sqrt{2}\right)$

Probaremos solamente la primera de las propiedades antes mencionadas.

Por definición:

$$xy = b^{\log_b(xy)}.$$

Por otro lado:

$$x = b^{\log_b(x)}, \qquad y = b^{\log_b(y)}.$$

Multiplicando las dos igualdades anteriores:

$$xy = b^{\log_b(x)}b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$$

así que:

$$xy = b^{\log_b(xy)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)}$$

y por tanto:

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y).$$

Observación:

Hasta ahora, al elevar un número b a un exponente n, para obtener b^n, únicamente hemos utilizado exponentes enteros. Sin embargo, el logaritmo de un número puede ser un número real cualquiera, así que habría que definir lo que significa elevar a una potencia que no sea entera para poder hablar con propiedad de $b^{\log_b(x)}$. Este tema es para un curso más avanzado, así que de momento nos conformaremos con los resultados aproximados que se obtienen al utilizar tablas o calculadoras.

Antes de la existencia de las calculadoras portátiles era difícil efectuar cálculos que implicaran muchas multiplicaciones, divisiones o potencias, y es gracias a las propiedades que acabamos de enunciar, que los logaritmos han desempeñado un papel fundamental, ya que permiten transformar: multiplicaciones en sumas, divisiones en restas y potenciaciones en productos.

A continuación resolvemos un ejemplo con la técnica que mencionamos. Más adelante recordaremos la manera de usar las tablas de logaritmos y antilogaritmos.

Ejemplo

Calcular $x = \dfrac{3.21 \times 25.14}{13.04} = 6.1886$ utilizando logaritmos.

Solución:

Usando las propiedades de los logaritmos, calculamos:

$$\log_{10}(x) = \log_{10}(3.21) + \log_{10}(25.14) - \log_{10}(13.04).$$

Utilizando tablas de logaritmos, podemos encontrar:

$$\log_{10}(3.21) = 0.5065$$
$$\log_{10}(25.14) = 1.4004$$
$$\log_{10}(13.04) = 1.1153$$

así,

$$\log_{10}(x) = 0.5065 + 1.4004 - 1.1153 = 0.7916.$$

Para encontrar el valor de x, buscamos en una tabla de antilogaritmos qué número tiene por logaritmo al número anterior y encontramos:

$$x = 6.1887$$

que es una aproximación del valor de x. Observa que no hicimos ninguna multiplicación ni división, sino únicamente sumas y restas.

En 1624 se publicó la primera gran tabla de logaritmos decimales (de base 10). Su autor fue el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630). Los logaritmos decimales también se llaman de Briggs o comunes.

3.6.2 El logaritmo de base 10

Los logaritmos que son más fáciles de manejar usando tablas son los de base 10, así que veremos una breve descripción de ellos. Para facilitar la notación los denotaremos como log en lugar de $\log_{10}$.

Observemos en la siguiente tabla algunas potencias de 10 y sus logaritmos correspondientes:

$10^0 = 1$	entonces	$\log 1 = 0$
$10^1 = 10$	entonces	$\log 10 = 1$
$10^2 = 100$	entonces	$\log 100 = 2$
$10^3 = 1000$	entonces	$\log 1000 = 3$
$10^{-1} = 0.1$	entonces	$\log 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	entonces	$\log 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	entonces	$\log 0.001 = -3$

Observemos que por la propiedad 1 de los logaritmos y los resultados de la tabla anterior, si conocemos el logaritmo de 2.5, entonces

$$\log(25) = \log(10 \times 2.5) = \log(10) + \log(2.5) = 1 + \log(2.5)$$
$$\log(250) = \log(10^2 \times 2.5) = \log(10^2) + \log(2.5) = 2 + \log(2.5)$$
$$\log(2500) = \log(10^3 \times 2.5) = \log(10^3) + \log(2.5) = 3 + \log(2.5)$$
$$\log(0.0025) = \log(10^{-3} \times 2.5) = \log(10^{-3}) + \log(2.5) = -3 + \log(2.5)$$

Así, basta con conocer el logaritmo decimal de los números entre 1 y 10 para conocer el logaritmo de cualquier número.

Las tablas de logaritmos contienen los logaritmos de los números entre 1 y 10. Estos logaritmos están siempre comprendidos entre 0 y 1; en nuestro ejemplo, $\log(2.5) = 0.3979$.

En general, para encontrar el logaritmo de un número positivo x, lo escribimos primero como:

$$x = 10^n \cdot y$$

donde y es un número entre 1 y 10.

Después calculamos el logaritmo de x usando las propiedades del logaritmo:

$$\log(x) = \log(10^n \cdot y) = \log(10^n) + \log(y) = n + \log(y),$$

es decir, el logaritmo base 10 de cualquier número positivo está formado por un entero n (que es el logaritmo de 10^n) y un número decimal $(\log(y))$. La parte entera n se llama la *característica* y la parte decimal se llama la *mantisa*. Tenemos entonces que:

$$\log(25) = 1 + 0.3979 = 1.3979$$
$$\log(250) = 2 + 0.3979 = 2.3979$$
$$\log(2500) = 3 + 0.3979 = 3.3979.$$

Cuando la característica es negativa, debemos tener cuidado, pues sólo ella es negativa, ya que la mantisa es un número entre 0 y 1, y por tanto, positivo; así:

$$\log(0.0025) = -3 + 0.3979.$$

Esta expresión se suele denotar como:

$$\log(0.0025) = \bar{3}.3979$$

para indicar que el signo sólo afecta a la parte entera y, por tanto, es distinto de -3.3979. Observa que si utilizamos una calculadora para encontrar este logaritmo, obtenemos:

$$\log_{10}(0.0025) = -2.6021$$

que es el resultado de efectuar la resta

$$-3 + 0.3979 = -2.6021.$$

3.6.3 Regla para determinar la característica

Para encontrar el logaritmo de un número, primero debemos escribirlo como el producto de un número entre 1 y 10 y una potencia de 10. La característica es el exponente de 10 que hayamos encontrado. Así:

Número	Característica
$24.12 = 2.413 \times 10^1$	1
$6542.2 = 6.5422 \times 10^3$	3
$8.76 = 8.76 \times 10^0$	0
$0.000732 = 7.32 \times 10^{-4}$	-4

Observaciones:

- La característica es el número de lugares que hay que recorrer el punto hasta que haya un solo dígito a su izquierda; su signo toma la siguiente regla:
- La característica es positiva si el punto se recorre a la izquierda, y negativa si se recorre a la derecha; es decir:
  - Si $x > 1$, la característica de $\log x$ es un número no negativo.
  - Si $0 < x < 1$, la característica de $\log x$ es un número negativo.

3.6.4 Uso de tablas para encontrar la mantisa

- Encontrar la mantisa del logaritmo de 98.76.

Solución:

- Consideramos el número sin tomar en cuenta el punto decimal: 9876.
- Escribimos las dos primeras cifras significativas (de izquierda a derecha): 98.
- Localizamos el renglón que corresponde a 98. En la parte superior buscamos la tercera cifra: 7.
- Localizamos la intersección del renglón que corresponda a 98 y la columna encabezada con 7:

9943

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952

La mantisa del logaritmo es el número formado por un punto decimal y el encontrado en esa intersección; en nuestro caso: .9943

Ejemplo

- Encontrar $\log 0.00469$.

Solución: Como hay que mover el punto tres lugares a la derecha, la característica es -3. Calculamos la mantisa. Las dos primeras cifras significativas son 46. Buscamos en las tablas este número en la columna de la izquierda y el 9 en la parte superior. En la intersección del renglón y la columna encontramos:

6712

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712

Entonces:

$$\log 0.00469 = \bar{3}.6712 = -2.3288.$$

También es posible encontrar logaritmos base 10 utilizando una calculadora. Solamente escribimos el número cuyo logaritmo deseamos calcular y posteriormente oprimimos la tecla "log", aunque la instrucción puede variar según la calculadora que se use.

Ejemplo

- Calcular log 0.85111 usando tablas y comparar el resultado con el obtenido al usar una calculadora.

Solución: Calculamos primero la característica. Como hay que mover el punto un lugar a la derecha, la característica es −1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340

En las tablas encontramos que la mantisa es .9299, así que:

$$\log 0.85111 = \bar{1}.9299 = -0.0701$$

Usando la calculadora obtenemos:

$$\log 0.85111 = -0.0700143$$

La discrepancia se debe a que con tablas usamos únicamente tres cifras significativas.

En la actualidad, los logaritmos han dejado de tener la importancia computacional que tenían hace algunos años, debido a la proliferación y abaratamiento de los equipos de cómputo; sin embargo, siguen teniendo importancia para describir fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo, la escala Richter para medir la intensidad de un temblor y el índice pH que mide la acidez o la alcalinidad de una sustancia, son escalas logarítmicas.

3.6.5 Antilogaritmos

Si un número es el logaritmo de otro, entonces el segundo es el antilogaritmo del primero, y lo denotamos como antilog. Es decir,

$$\text{si } \log x = a, \text{ entonces } \operatorname{antilog} a = x.$$

Esto significa que

$$10^a = x$$

EJEMPLOS

1. Puesto que $\log 1 = 0$, entonces $\operatorname{antilog} 0 = 1$; es decir, $10^0 = 1$.
2. Puesto que $\log 1000 = 3$, entonces $\operatorname{antilog} 3 = 1000$; es decir, $10^3 = 1000$.
3. Puesto que $\log 0.01 = -2$, entonces $\operatorname{antilog}(-2) = 0.01$; es decir, $10^{-2} = 0.01$.

3.6.6 Cálculo del antilogaritmo

Encontrar el antilogaritmo de un número a significa elevar 10 a la potencia a. En general, esto no se puede hacer a mano. Como en el caso de los logaritmos, también hay tablas para encontrar antilogaritmos; para utilizarlas, procedemos de la siguiente manera:

- Escribimos el número en la forma

característica.mantisa

- Consideremos la mantisa. Buscamos en las tablas las dos primeras cifras de la parte decimal.
- Escribimos el número que está en la intersección de este renglón con la columna en la que se encuentre, en la parte superior, la tercera cifra.
- Colocamos el punto decimal después de la primera cifra.
- Observamos la característica para variar la colocación del punto decimal de acuerdo con la siguiente regla: nos movemos tantos lugares como indique la característica, a la derecha si es positiva, a la izquierda si es negativa.

También podemos efectuar el cálculo del antilogaritmo usando una calculadora; para ello seguimos los siguientes pasos:

1. Escribimos primero el número cuyo antiligaritmo queremos calcular.
2. Oprimimos la tecla “inv”.
3. Oprimimos la tecla “log”.

Observación:

Si el número cuyo antiligaritmo queremos calcular tiene característica negativa, primero debemos escribir la expresión decimal que corresponda.

EJEMPLOS

1. Usando la calculadora, encontrar antilog $\bar{1}.326$.

   Solución: Primero escribimos la expresión decimal:

$$\bar{1}.326 = -1 + 0.326 = -0.674$$

oprimimos la tecla “inv” y después “log”, y se obtiene, 0.2118; es decir,

$$\text{antilog}\,\bar{1}.326 = 0.2118$$

2. Encontrar el antilog 3.456.

   Solución:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877

Localizamos .45 en la columna izquierda de las tablas de antilogaritmos y 6 en la parte superior; en la intersección del renglón y la columna seleccionados encontramos 2858 y escribimos 2.858. Puesto que la característica es 3, el punto debe ser movido tres unidades a la derecha. Así:

$$\text{antilog}\,3.456 = 2858,$$

es decir,

$$\log 2858 = 3.456$$

3. Encontrar antilog $\bar{3}.6712$ y verificar usando una calculadora.

Solución:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775

Localizamos .67 en la columna izquierda de las tablas de antilogaritmos y 1 en la parte superior; en la intersección del renglón y la columna seleccionados encontramos 4688 y escribimos 4.688. Puesto que la característica es −3, el punto debe ser movido tres unidades a la izquierda. Así:

$$\text{antilog } \bar{3}.6712 = 0.004688,$$

es decir,

$$\log 0.004688 = \bar{3}.6712.$$

Para utilizar la calculadora, observamos primero que la característica es negativa, así que escribimos primero la expresión decimal:

$$\bar{3}.6712 = -3 + 0.6712 = -2.3288.$$

Ahora oprimimos las teclas "inv" y "log" y obtenemos 0.004690. Entonces:

$$\text{antilog } \bar{3}.6712 = 0.004690.$$

3.6.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 9, calcula el logaritmo que se pide usando tablas. Verifica el resultado utilizando una calculadora.

1. log 3.126
2. log 31.26
3. log 92.41
4. log 55.29
5. log 0.758
6. log 0.00077
7. log 746
8. log 1.1926
9. log 0.00432

En los siguientes ejercicios, calcula el antilogaritmo que se pide usando las tablas. Verifica el resultado utilizando una calculadora.

10. antilog 5.201
11. antilog 2.335
12. antilog 1.896
13. antilog 4.7219
14. antilog 3.4705
15. antilog 0.781
16. antilog $\bar{1}.684$
17. antilog $\bar{3}.743$
18. antilog $\bar{5}.0017$

Resumen

- *Propiedad de cerradura de la suma:* si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real.
- *Propiedad conmutativa de la suma:* si a y b son números reales, entonces $a + b = b + a$.
- *Propiedad asociativa de la suma:* si a, b y c son números reales, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Existencia del neutro aditivo:* el número 0 satisface la igualdad $a + 0 = a$ para cualquier número real a.
- *Existencia del opuesto o inverso aditivo:* si a es un número real cualquiera, entonces existe un único número real al que llamamos $-a$, que satisface la igualdad $a + (-a) = 0$.
- *Propiedad de cerradura del producto:* si a y b son números reales, entonces ab es un número real.

- *Propiedad conmutativa del producto:* si a y b son números reales, entonces $ab = ba$.
- *Propiedad asociativa del producto:* si a, b y c son números reales, entonces $(ab)c = a(bc)$.
- *Existencia del neutro para el producto:* el número 1 satisface la igualdad $a \times 1 = a$ para cualquier número real a.
- *Existencia del recíproco o inverso multiplicativo:* si a es un número real distinto de cero, entonces existe un único número real denotado como a^{-1} o $\frac{1}{a}$, que satisface la igualdad

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

- *Propiedad distributiva:* esta propiedad relaciona la suma y el producto. Si a, b y c son números reales, entonces $a(b+c) = (ab) + (ac)$.
- *Tricotomía*

  Dados a y b números reales, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \qquad a > b, \qquad a = b.$$

- *Transitividad:* si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- *Relación con la suma:* si $a < b$ y c es cualquier número real, entonces $a + c < b + c$.
- *Multiplicación por un número positivo:* si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- *Multiplicación por un número negativo:* si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

  $\log_b x = y$ significa $b^y = x$.
- *Propiedades de los logaritmos:* para cualquier número positivo $b \neq 1$, el logaritmo de base b satisface:

  $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

  $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$.

  $\log_b(x^n) = n\log_b(x)$.

3.7 EJERCICIOS DE REPASO

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $-\left(-\frac{3}{4}\right)$
2. $-\left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)$
3. $-(-7.1) + 1.7$
4. $-(6.34 - 4.98)$
5. $-\left(-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$
6. $5 - (8 + 3 - 6)$
7. $5 - 8 + (3 - 6)$
8. $5 - (8 + 3) - 6$
9. $(5 - 8) + (3 - 6)$
10. $35 \div 7 + 12$
11. $48 \div (-4)(6)$
12. $100 \div (8 \times 7)$
13. $19 + 25 \div (-5)$
14. $6 - 2[14 - (7 - 10)]$
15. $\dfrac{11 + (9 - 8)}{(7 - 5) + 1}$
16. $\dfrac{3(27 - 6)}{5 \times 3 - 6}$
17. $\dfrac{6 \times 4 - 5 \times (-2)}{3 \times 7 + 11 \times 3}$
18. $36 \div 4 \times 5$
19. $20 \div [54 \div (2 + 7)]$
20. $32 - 17 + 8 \times 9$
21. $\dfrac{6 - (14 - 5)}{12 + 8}$
22. $\dfrac{6 \times 5 - 40}{6(5 - 40)}$
23. $(124 \times 2) \div (4(-5))$
24. $\left|\frac{5}{8} - \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{8}{3} - \frac{2}{9}\right|$
25. $-\left|-(-9 + 27) + 12\right|$
26. $-\left|5\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{2}{3}\right|$
27. $\left|-3.5 + 6.8\right| + 25$

Encuentra el opuesto de cada número.

28. $\frac{1}{9}$
29. $-\frac{14}{5}$
30. -3.28
31. 1.75
32. $6\frac{3}{4}$
33. $-5\frac{1}{3}$
34. π
35. $-\sqrt{10}$

¿Qué número debes sumar en cada una de las siguiente situaciones?

36. Creció $\frac{1}{20}$ de metro.

37. La tela encogió $\frac{1}{4}$ de metro.

38. La barra de acero se contrajo 0.15 metros.

39. La longitud aumentó 0.78 cm.

40. Se hundió 4.25 metros.

41. La presión atmosférica subió 0.16 atm.

42. Se cortó el cabello 8 cm.

43. Subió $2\frac{3}{4}$ kilos de peso.

44. Le salieron 2 dientes.

45. La temperatura subió 4 grados.

En los ejercicios 46 a 61, coloca en el cuadro <, > o = para que sea cierta cada afirmación.

46. $-\frac{1}{5} \square -\frac{1}{3}$

47. $\frac{8}{5} \square \frac{9}{4}$

48. $-8 \square -8.5$

49. $-13 \square -12$

50. $-2.8 \square -2.6$

51. $5\frac{7}{8} \square 5\frac{11}{16}$

52. $\frac{\pi}{2} \square -3\pi$

53. $\frac{1}{5} \square \frac{1}{3}$

54. $-\frac{7}{6} \square -\frac{6}{7}$

55. $\frac{14}{9} \square \frac{23}{3}$

56. $-\sqrt{2} \square \sqrt{5}$

57. $7.9 \square 9.7$

58. $10.25 \square 10.12$

59. $-5.75 \square -5.9$

60. $-9.25 \square -9.04$

61. $-8\frac{1}{2} \square 1\frac{1}{4}$

62. Según una estimación realizada en 1987, el número de mexicanos que hablaba español estaba en razón de 9 a 10 con respecto del total de habitantes. Si el número de éstos era 81, 163, 256, ¿cuántos hablaban español?

63. La razón de habitantes por kilómetro cuadrado en el mundo es 1,000,000 a 27,178. Si la superficie terrestre es de 135,892,000 km^2, ¿cuál es el número estimado de habitantes?

64. Ayrton Senna, piloto brasileño, aparece en el libro de récords como el que consiguió el mayor número de victorias, ganando una de cada cuatro carreras. ¿Cuántas victorias había conseguido cuando concluyó la carrera 140?

65. Un rectángulo y un cuadrado tienen el mismo ancho, pero el rectángulo es 5.5 cm más largo que el cuadrado. Sus perímetros suman 73 cm. Encuentra las dimensiones de cada figura.

66. Los lados de dos triángulos rectángulos están en razón $\frac{1}{6}$. Si el más pequeño tiene base 3 y altura 4:
    a. ¿Cuál es el área del triángulo mayor?
    b. ¿Están las áreas en razón $\frac{1}{6}$?

67. Mi hijo cumple hoy 10 años, yo tengo 40. ¿Cuándo será $\frac{1}{2}$ la razón entre nuestras edades?

68. María invirtió $2,500 durante un año y al final de él tiene $2,850. Si Aurora invierte $3,400 a la misma tasa de interés, ¿cuánto tendrá al final del año?

68. Con $210 se compraron 5 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela se pueden comprar con $315?

69. Dos números están en razón $\frac{2}{9}$. Si al menor le sumamos 32 y al mayor le restamos 10 y obtenemos la misma cantidad, ¿cuáles son los números?

capítulo

4

Introducción al álgebra



4.1 Expresiones algebraicas
4.2 Lenguaje algebraico
4.3 Evaluación de expresiones algebraicas
4.4 Términos semejantes
4.5 Ejercicios de repaso

El desarrollo del álgebra le ha llevado a la humanidad cientos de años, y ha sido un trabajo de equipo. Egipcios, hindúes, árabes y griegos han participado en su desarrollo; especialmente los árabes, quienes retomaron la obra de griegos e hindúes y la ampliaron enormemente. En este capítulo veremos los conceptos básicos del tema y traduciremos los problemas del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

4.1 Expresiones algebraicas

Cuando queremos calcular el área de un triángulo, utilizamos la fórmula:

$$\frac{bh}{2}$$

en la que b denota la base del triángulo y h su altura. De esta manera, una sola fórmula nos sirve para calcular el área de cualquier triángulo; para ello, basta sustituir b por la longitud de la base y h por la longitud de la altura, y efectuar las operaciones.

En la expresión $\frac{bh}{2}$, b y h son variables y 2 es una constante.

El álgebra nos enseña a operar con expresiones que contienen variables, constantes y operaciones de una manera muy general, y a utilizar estas expresiones para resolver problemas concretos.

Al combinar variables, números y operaciones obtenemos *expresiones algebraicas*; así,

$$ab, \quad 2x + y, \quad \frac{x + y}{w + 4}$$

son expresiones algebraicas.

En una expresión algebraica, las variables representan números, ya sea números naturales, enteros, racionales o reales, según el contexto. Por tanto, al hacer operaciones con expresiones algebraicas debemos aplicar las mismas reglas que utilizamos al hacer operaciones con los números representados.

De esta manera, si x, y, z son variables que representan números reales, se satisfacen las siguientes propiedades:

	Suma	Multiplicación
Conmutatividad	$x + y = y + x$	$xy = yx$
Asociatividad	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
Neutros	$x + 0 = x$	$x \times 1 = x$
Inversos	$x + (-x) = 0$	$x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ si $x \neq 0$
Distributividad	$x(y + z) = xy + xz$	

4.2 Lenguaje algebraico

Para resolver problemas utilizando el álgebra, lo primero que debemos hacer es traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. La siguiente tabla contiene algunas expresiones comunes utilizadas en álgebra.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
La suma de 10 y x	$10 + x$
La mitad de un número	$\frac{a}{2}$
25 más que z	$z + 25$
La diferencia de y menos 7	$y - 7$
El producto de dos números	ab
El cociente de dos números	$\frac{w}{z}$
El triple de c	$3c$
Un número más 6	$n + 6$
La resta de un número menos 3.5	$x - 3.5$

Las letras usadas pueden seleccionarse de modo arbitrario, pero se aconseja que en los problemas se escojan de manera que ayuden a recordar las cantidades que representan.

Ejemplos

Traduce al lenguaje algebraico:

1. Toño es 5 años mayor que Roberto.

Solución: Denotamos:

T = edad de Toño.
R = edad de Roberto.

Traducción:

$$T = R + 5.$$

2. El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

Solución: Denotamos:

A = área del triángulo.
b = base del triángulo.
h = altura del triángulo.

Traducción:

$$A = \frac{bh}{2}.$$

3. El producto de dos números enteros consecutivos es 56.

Solución: Denotamos:

n = entero,
$n + 1$ = su entero consecutivo.

Traducción:

$$n\,(n+1) = 56.$$

4.2.1 Ejercicios

1. El perímetro de un rectángulo cuyos lados miden a y b es: $P = 2a + 2b$. Calcula el perímetro de los siguientes rectángulos:
   a. $a = 5 \quad b = 8$
   b. $a = 4.62, \quad b = 2.74$
   c. $a = \frac{6}{5}, \quad b = \frac{7}{4}$
   d. $a = \frac{65}{8}, \quad b = \frac{111}{9}$
2. La segunda ley del movimiento de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, $F = ma$. En cada caso, encuentra la fuerza correspondiente.
   a. $a = 9.8$ m/seg^2, $m = 3$ kg.
   b. $a = 980$ cm/seg^2, $m = 98$ gr.
   c. $a = 7.2$ cm/seg^2, $m = 20$ gr.
   d. $a = \frac{20}{7}$ m/seg^2, $m = 12$ kg.

Escribe una expresión algebraica en cada problema.

3. x más 32.
4. 18.24 veces un número.
5. Un número disminuido en 16.
6. Dos veces t menos 9.
7. Ana tiene dos años más que Juan.
8. El cociente de dos números es 100.
9. Un tercio de w.
10. Tres décimos de la población infantil t.
11. El cociente de 25 entre un número.
12. x entre 8.96.
13. Cinco tercios más la mitad de x.
14. La suma de dos números es 98.
15. Ramón es 4 años menor que Irma.
16. Un quinto de un número es 15.
17. Uno entre el doble de t.
18. Cinco veces z más 3.7.
19. El doble de la suma de b y 1.
20. El cociente de 70 entre z.
21. Un número menos $\frac{40}{65}$.
22. $\frac{1}{3}$ de los asientos eran para estudiantes.
23. Cinco séptimos de b.
24. El producto de x y 25.
25. El total de días en x horas.
26. Doce menos x.
27. $\frac{1}{6}$ del número z de asistentes a un concierto eran niños.
28. El costo de una docena de tortillas es n. ¿Cuánto cuesta una tortilla?
29. El costo de z kilos de chiles poblanos a 5 pesos el kilo.

30. Si r son los días que llovió en un año, ¿cuántos días no llovió?
31. Laura es 7.5 cm más alta que Pedro.
32. Un quinto de los libros de la biblioteca son de historia.
33. El triple de un número más el doble de otro es 250.
34. El costo en pesos de t kilos de mangos a $8 el kilo.
35. $\frac{3}{4}$ del número de personas w que están en el auditorio.
36. Dos tercios de y menos seis séptimos de z.
37. El producto de la suma de 7 más un número, por el número.
38. El mayor de dos números es 8 veces el menor de los números, menos 5.
39. El cociente de la suma de dos números al cuadrado entre la diferencia de dichos números.
40. Un número menos –3.5 más el producto del número más 2.1 por 6.
41. El menor de dos números es dos séptimos del mayor menos diez.
42. El producto de dos números es igual al doble de su suma, menos 12.
43. Doce veces el número que es x unidades menor que 9 es igual a 20.
44. Treinta disminuido en cinco veces un número es 10.
45. Tres veces un número es 32 más 7 veces el número.
46. Cincuenta disminuido en un número w es cinco más w.
47. Seis veces un número disminuido en 15 es –18.
48. La longitud de la salamandra gigante es 1, 487.5 mm mayor que la de la rana venenosa.
49. En una semana, las uñas de los dedos de los pies crecen 0.375 cm menos que las de los dedos de las manos.

4.3 Evaluación de expresiones algebraicas

Las escalas de temperaturas en grados centígrados y en grados Fahrenheit están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$F = \frac{9}{5}C + 32,$$

donde F representa la temperatura en grados Fahrenheit y C la temperatura en grados centígrados.

Para saber a cuántos grados F corresponde una temperatura dada en grados C, evaluamos la expresión de la derecha sustituyendo la variable C por los grados centígrados dados.

Grados centígrados*	Grados Fahrenheit
4 °C	$\frac{9}{5} \times 4 + 32 = 39.2$ °F
–10 °C	$\frac{9}{5} \times (-10) + 32 = 14$ °F
210 °C	$\frac{9}{5} \times (210) + 32 = 410$ °F
–40 °C	$\frac{9}{5} \times (-40) + 32 = -40$ °F

Evaluar una expresión algebraica significa reemplazar cada variable por un número para obtener un valor numérico.

*Los centígrados se conocen también como grados Celsius.

EJEMPLOS

1. Evaluar ab cuando $a = 3$ y $b = 4$.

Solución: Sustituimos la letra a por el número 3 y la letra b por el número 4:

$$\begin{aligned} ab &= 3 \times 4 \\ &= 12, \end{aligned}$$

por tanto, el valor de ab para $a = 3$ y $b = 4$ es 12.

2. Evaluar la misma expresión ab cuando $a = -\frac{3}{5}$ y $b = \frac{9}{7}$.

Solución: Sustituimos ahora la letra a por el número $-\frac{3}{5}$ y la letra b por el número $\frac{9}{7}$.

$$\begin{aligned} ab &= -\frac{3}{5} \times \frac{9}{7} \\ &= -\frac{27}{35}, \end{aligned}$$

por tanto, el valor de ab para $a = -\frac{3}{5}$ y $b = \frac{9}{7}$ es $-\frac{27}{35}$.

En los ejemplos anteriores vemos que una misma expresión algebraica puede tomar distintos valores numéricos dependiendo del valor numérico que se dé a las variables.

3. Evaluar la expresión $(3x - 2) + 2(7 - x)$ cuando $x = -3$.

Solución:

$$\begin{aligned} (3(-3) - 2) + 2(7 - (-3)) &= (-9 - 2) + 2(7 + 3) \\ &= 9. \end{aligned}$$

4. Evaluar la expresión $x^2 + 3xy - y^2 + 5$ cuando $x = 4$ y $y = -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} 4^2 + 3(4)(-1) - (-1)^2 + 5 &= 16 - 12 - 1 + 5 \\ &= 8. \end{aligned}$$

5. Evaluar $4x + 3y$ cuando $x = \frac{3}{2}$ y $y = -\frac{5}{6}$.

Solución:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(-\frac{5}{6}\right) \\ &= 2(3) - \frac{5}{2} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

6. Evaluar $\dfrac{5w - 3z}{w + 2z}$ cuando $w = -4.2$ y $z = 3.6$.

Solución:

$$\frac{5w - 3z}{w + 2z} = \frac{5(-4.2) - 3(3.6)}{-4.2 + 2(3.6)}$$

$$= \frac{-21 - 10.8}{-4.2 + 7.2}$$
$$= \frac{-31.8}{3}$$
$$= -10.6.$$

7. La distancia en metros recorrida por un objeto en caída libre está dada por la expresión

$$d = \frac{1}{2} g t^2,$$

donde $g = 9.8$ m/seg^2 es la aceleración producida por la gravedad, y t es el tiempo transcurrido desde que empezó a caer el objeto, medido en segundos. ¿Cuántos metros ha recorrido el objeto después de 8 segundos?

Solución:

$$d = \frac{1}{2}\left(9.8\,\text{m/seg}^2\right)\left(8^2\,\text{seg}^2\right) = 313.6 \text{ m}.$$

4.3.1 Ejercicios

Evalúa las siguientes expresiones algebraicas si $a = 2$, $b = 4$, $c = -4$ y $t = -2$.

1. $8b$
2. $ab + 10$
3. $4a + t$
4. $2b - 2t$
5. $5a - b$
6. $\frac{7}{3}c + \frac{1}{4}b$
7. $\frac{4}{5}(2b + 2) + t$
8. $\frac{3}{4}(c + t)$
9. $11 - 5b$
10. $9c - 5$
11. $0.8b\,(c + t)$
12. $ac - b$
13. $\frac{7}{10}(a + b - c)$
14. $\frac{bt - a}{2a}$
15. $\frac{c(t + 3b) + 15a}{a - t}$
16. $\frac{8a - 3b}{2c + t}$
17. $5abc + t$
18. $t^2 + ac$
19. $3ab - 6ct$
20. $4\,(bt - 5c)$
21. $\frac{3(a + b)}{3b + a}$
22. $\frac{5t - c}{b - c}$
23. $\frac{12 - c}{t + a}$
24. $\frac{a + b}{c} + \frac{c}{at}$

Evalúa las siguientes expresiones algebraicas para los valores dados de las variables.

25. $(x - 3y)\,x$; $x = -2.5$; $y = -1.5$
26. $(15 - 3x)(y - 1)$; $x = 5$; $y = 3$
27. πr^2; $r = \frac{6}{7}$
28. $\frac{15}{2}a + b$; $a = \frac{3}{5}$; $b = \frac{3}{2}$
29. $\frac{8s + 6t}{-t}$; $s = \frac{3}{4}$; $t = \frac{2}{3}$
30. $\frac{7}{x} - 2y$; $x = -3$; $y = 4$
31. $\frac{1}{2}(a + d)(a - d)$; $a = 6$; $d = 8$
32. $6t - 1$; $t = \frac{1}{6}$
33. $y^3 + 2y^2 - y$; $y = -\frac{3}{4}$
34. $\frac{a^2 - b}{4} + 3a$; $a = -4$; $b = 1.2$
35. $\frac{(3a - b)^2}{a - b}$; $a = 4.8$; $b = 4.4$
36. $\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2}$; $x = -2$; $y = -5$
37. $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$; $a = -1$; $b = -3$
38. $\frac{s^2 - 2st + t^2}{(s - t)}$; $s = 6$; $t = 7$
39. $\frac{x^2 - 16}{x + 4} + \frac{x^2}{x - 4}$; $x = -2$
40. $\frac{2a + 9}{4a - 1} + c$; $a = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{4}{5}$

41. $\left|2c-d^2\right|; c=5; d=-7$

42. $x^2+2x+1; x=-4$

43. $\dfrac{6a^2+ab+7b^2}{\left|a^2-b^2\right|}; a=-1; b=1.5$

44. $1-\left|\dfrac{(x+5)(x^2-6)}{x^4+x-1}\right|; x=-2$

45. $\left(b^3+a^2b\right)\left(b^2-a^2\right)+\dfrac{(b-a)^2}{b^3}; a=3; b=4$

46. $\dfrac{y^2+5xy}{y+8}-\dfrac{y-2}{y}; x=3; y=-2$

47. $\left|\dfrac{3z^3-2wz+5w^2z}{12w^2z^2-4w+7}\right|; z=0.2; w=1.3$

48. $\dfrac{(b+c)h}{2}; b=2.8; c=1.9; h=1.4$

49. La distancia recorrida por un móvil está dada por el producto de la velocidad por el tiempo; es decir, $d=vt$. En cada caso, encuentra la distancia recorrida si:

a. $v=90$ km/h, $t=1.15$ h.
b. $v=75$ km/h, $t=\frac{5}{2}$ h.
c. $v=60$ m/seg, $t=38$ seg.
d. $v=15.4$ km/h, $t=\frac{3}{4}$ h.

50. La fórmula $p=\frac{W}{4A}$ se utiliza para calcular la presión en libras por pulgada cuadrada de una llanta de automóvil. W es el peso del automóvil en libras y A es el área de contacto con el piso de la llanta en pulgadas cuadradas. En cada caso, encuentra la presión de la llanta.

a. $W=936$ lb, $A=9$ pulg^2
b. $W=2{,}198$ lb, $A=78.5$ pulg^2
c. $W=4{,}660$ lb, $A=29$ pulg^2
d. $W=1{,}376$ lb, $A=11.5$ pulg^2

51. El volumen de un cilindro está dado por la fórmula $V=\pi r^2h$, donde r es el radio de la base y h es la altura del cilindro. En cada caso, encuentra el volumen del cilindro si:

a. $r=\frac{4}{5}, h=\frac{15}{4}$
b. $r=6, h=2$
c. $r=1.13, h=3.5$
d. $r=\frac{19}{6}, h=\frac{115}{11}$

52. El área de un trapecio se define como $A=\frac{1}{2}h(B+b)$, donde h es la altura del trapecio, B es la base mayor y b es la base menor. En cada caso, encuentra el área del trapecio si:

a. $h=10, B=25, b=15$
b. $h=6, B=12.5, b=7.25$
c. $h=9, B=14, b=4$
d. $h=5.4, B=12.6, b=7.8$

53. Kepler enunció tres leyes para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La tercera de dichas leyes dice: el cuadrado del periodo es proporcional al cubo de la distancia media al Sol; es decir, $P^2=kd^3$, donde P es el periodo, k la constante de proporcionalidad y d la distancia media al Sol. Si medimos en años terrestres, $k=1$. Encuentra el periodo de los siguientes planetas.

a. Júpiter, $d=5.2$
b. Marte, $d=1.52$
c. Mercurio, $d=0.387$
d. Saturno, $d=9.54$

4.4 TÉRMINOS SEMEJANTES

En la expresión algebraica,

$$3x^2y-7y+2(4x-z)$$

cada sumando se llama *término*; así, esta expresión tiene tres términos, que son $3x^2y$, $-7y$ y $2(4x-z)$.

Cuando dos o más términos contienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes, se dice que son *términos semejantes*.

$8x^2y$	$-7x^2y$	son semejantes
$4.5a^3bc$	$\frac{2}{3}a^3bc$	son semejantes
$7x^3y$	$7x^2y$	no son semejantes
ab^2	a^2b	no son semejantes
$6xz$	$6xw$	no son semejantes

Cuando una expresión algebraica tiene dos o más términos semejantes, podemos utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación para simplificarla.

Decimos que una expresión algebraica está *simplificada* cuando no tiene términos semejantes por agruparse.

EJEMPLOS

1. Simplificar $2x+3x$.

Solución:

$$\begin{aligned}2x+3x&=(2+3)x\\&=5x.\end{aligned}$$

2. Simplificar $8.5a^2b-4.9a^2b+13.2a^2b$.

Solución:

$$\begin{aligned}8.5a^2b-4.9a^2b+13.2a^2b&=(8.5-4.9+13.2)a^2b\\&=16.8a^2b.\end{aligned}$$

3. Simplificar $\frac{9}{2}x-6y+5x$.

Solución: Recuerda que sólo podemos agrupar los términos semejantes.

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}x-6y+5x&=\left(\frac{9}{2}+5\right)x-6y\\&=\frac{19}{2}x-6y.\end{aligned}$$

4. Simplificar $3x-4(5x+9z^4-1)-7z^4+8$.

Solución: Efectuamos primero la multiplicación y luego agrupamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned}3x-4(5x+9z^4-1)-7z^4+8&=3x-20x-36z^4+4-7z^4+8\\&=(3-20)x+(-36-7)z^4+4+8\\&=-17x-43z^4+12.\end{aligned}$$

4.4.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $6x-10x$

2. $-5ab-7ab+2.5$

3. $4.9y+5.3y-2.8y$

4. $-12\frac{5}{6}c+8\frac{2}{3}c$

5. $4a-2a+5a$

6. $x-5-10x+5$

7. $4(z+5)+8z$

8. $9y+3+11y+4$

9. $3x^2+2x-3x^2+9$

10. $\frac{8}{3}c+\frac{4}{5}d-\frac{13}{3}c+\frac{6}{5}d$

11. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$

12. $\left(-\frac{3}{4}a\right)+\left(a-\frac{5}{6}b\right)$

13. $\frac{9}{11}b-\frac{8}{11}-\frac{1}{2}b+\frac{5}{2}$

14. $\frac{1}{2}z+\frac{8}{3}z+\frac{1}{7}$

15. $\frac{5}{6y}+\frac{2}{3}-\frac{7}{12y}-2$

16. $6t-7s-5(t-s)-t$

17. $2x^2-x+4x^2$

18. $x-15+5(3-2x)$

19. $13c+17-9c-24c$

20. $x^2+y-1.5y-2.5x^2$

21. $4a+2(b-6a)+11b$

22. $8abc-(9-3abc)-(5abc-21)$

23. $3.8y+1.2z-(5.7y+7.5z)$

24. $-\frac{2}{3}(3+y)+\frac{3}{2}(y-x)$

25. $\frac{3}{4}\left[\left(\frac{7}{9}s+t\right)-\left(\frac{5}{9}s-3t\right)+\frac{4}{3}\right]$

26. $5x^2+3.3y-15x^2-4.4y$

27. $12.7a^2+3.8b^2-4b+5.7a^2$

28. $9s-\left(-\frac{1}{6}t\right)+3-5\frac{1}{4}s-\frac{5}{6}t$

29. $-t-[-5(t-2r)+6(3t-r)]$

30. $4(x+2y)-9(2x-7y)-11$

31. $-[-5(6x-2y)+x]+y$

32. $[-2(3a-9b)-(-5a+7b)]-2a-6b$

33. $-7(5x^2-2xy)-8y^2+3xy$

34. $-4c-[-3(1-8c)-(9-c)]$

35. $ax+2(ax-y)-axy+6y-9$

36. $3x-8xy+15+4xy-8x-13$

37. $\frac{a^2+2b^2}{6}-\frac{3a^2-7b^2+ab}{2}-\frac{ab}{3}$

38. $\frac{6b}{a}+\frac{15b-2a}{a}-\frac{4-2b+4a}{a}$

39. $(c^2-3cd^2+4cd)-(-8c^2+5cd)$

40. $\left[a^3-(7-4a^3)\right]-\left[6-(-2a^3)\right]+9a^3$

41. $20x^2y+xy^2-45xy^2-xy+x$

42. $\left[3s-5t-(s^2+2t)\right]-\left[-7s^2-s+2t\right]$

4.5 EJERCICIOS DE REPASO

Escribe una expresión algebraica en cada problema.

1. El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio.
2. El triple de un número más 6 unidades es igual a 7.
3. Tres quintos de la herencia de Ramón es igual a $120,000.
4. La suma de dos números menos 24 es cero.
5. El hijo tiene 32 años menos que el padre.
6. El volumen V de una masa dada de un gas es inversamente proporcional a la presión a la cual está sometida.
7. El volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.
8. Luisa mide tres cuartos de la estatura de su hermana Guadalupe.
9. Seis séptimos de los discos de Ramiro son de rock.

Evalúa las siguientes expresiones para los valores dados de las variables.

10. $\frac{(x+6)(x^3-27)}{(3x+9)(11-2x)};\ x=\frac{2}{5}$

11. $\frac{|a-7b|-(3a+b)}{(5a+8)-|a+3b|};\ a=8;\ b=\frac{3}{4}$

12. $\frac{|z-2|+|6z+9|}{|3z-1|-|5z-8|};\ z=\frac{1}{2}$

13. $\frac{7r^3t+35^2t^2-rt^3}{|11rt^2-5st+8rst|};\ r=1;\ s=-2;\ t=3$

14. $\frac{(9w+1)-(4w^2-8w)}{5(2-3w)-(w+5)};\ w=-5$

15. $\frac{|x^2-9|-|x^3-3y^2+7|}{|x^3-x^2+y^2-y-24|};\ x=-3;\ y=8$

16. $8x^2+5xy-3y^2-3x^2+6xy+20;\ x=-8;\ y=7$

17. $(a-(3b-2a))+((3a-2b)-b)+8a;\ a=1.2;\ b=0.5$

18. $\frac{(c^2-2cd)-(3c^2+6cd-12)}{d^2-9};\ c=\frac{3}{4};\ d=-\frac{1}{3}$

19. $(4s-t)\left(2s^2t+9s^2-4s^2t+3st^2+5s^2-12\right);\ s=-6;\ t=-2$

20. $\dfrac{5a^2-b^2}{9}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{2}-\dfrac{\left(\left(b^2+ab\right)-2a^2\right)}{6}-\dfrac{\left(ab-b^2\right)}{3};\ a=-\dfrac{11}{5};\ b=-\dfrac{71}{10}$

Simplifica las siguientes expresiones.

21. $32xz+3\left(xz^2+xz-2x\right)-6\left[12-6x^2z-(xz-z)\right]$

22. $25a+4ab-6[6ab-18b]-7[ab+5a-11]$

23. $-5\left(y^2+2y-7\right)+8\left(6y+4y^2-1\right)-\left(-\left(y+y^2\right)\right)$

24. $\frac{4}{9}\left(t+2s+t^2+8s^2\right)+\frac{1}{5}\left(-s-5t^2+9\right)-\frac{1}{9}\left(8t-5s^2\right)$

25. $3xy+27-(xy+4z)+(2z-2xz)-6z-27(x+1)$

26. $\left[8\left(3a^2b^3-8a^4b^6c-4\right)-4\left(6a^2b^3-16a^4b^6c+12a^3bc^5\right)\right]$

27. $\frac{3}{5}\left(15r^5s^6t^8+\frac{20}{9}r^6s^{10}t^7-\frac{4}{15}r^9s^5t^6\right)+6\left(\frac{7}{9}r^5s^6t^8-\frac{5}{6}r^6s^{10}t^7-\frac{4}{3}\right)$

capítulo

5

Resolución de ecuaciones de primer grado



5.1 Ecuaciones de una sola variable
5.2 Ecuaciones y multiplicación
5.3 Ecuaciones de una sola variable en ambos miembros
5.4 Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de primer grado
5.5 Resolución de problemas
5.6 Problemas con números enteros
5.7 Porcentaje
5.8 Desigualdades
5.9 Desigualdades y valor absoluto
5.10 Desigualdades y recta
5.11 Ejercicios de repaso

Muchos problemas de la vida real pueden plantearse y resolverse por medio de ecuaciones lineales: el tiempo de llenado de un tanque de agua, la determinación de porcentajes, el cálculo del crecimiento de una inversión, etcétera. En este capítulo expondremos las técnicas para plantear y resolver las ecuaciones de primer grado.

5.1 Ecuaciones de una sola variable

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Las expresiones de cada lado de la igualdad se llaman *miembros* de la ecuación.

$$\underbrace{3x+4}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-9}_{\text{Segundo miembro.}}$$

Al sustituir las variables de una ecuación por valores numéricos, puede resultar que la igualdad sea cierta o falsa. En el ejemplo anterior, si sustituimos $x = -13$, obtenemos:

$$3(-13)+4=-35=2(-13)-9,$$

que es cierta; en cambio, si sustituimos $x = 2$, el primer miembro es:

$$3(2)+4=10$$

y el segundo miembro es:

$$2(2)-9=-5,$$

y entonces la igualdad entre los miembros es falsa.

Resolver una ecuación es encontrar los valores numéricos que al sustituirlos en lugar de las variables hacen cierta la igualdad. Para ello, se deja sola la variable en un lado de la ecuación. Esto se llama *despejar* la variable.

Las ecuaciones del tipo

$$ax+b=0,$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$, son llamadas ecuaciones de primer grado.

Cristina tiene una hermana que es 27 centímetros más alta que ella; si la hermana mide 1.45 metros, ¿qué estatura tiene Cristina?

Solución: Representamos mediante c la estatura de Cristina, por lo que:

$$c + 0.27 = 1.45$$

Para encontrar la estatura de Cristina, debemos despejar c, para lo cual sumamos el opuesto o inverso aditivo de 0.27 a ambos lados de la ecuación y simplificamos la expresión:

$$c + 0.27 - 0.27 = 1.45 - 0.27$$
$$c = 1.18.$$

Por tanto, Cristina tiene una estatura de 1.18 metros.

Al resolver una ecuación, siempre hay que verificar que la solución obtenida satisfaga la ecuación original; esto nos sirve para detectar posibles errores cometidos en la resolución de la ecuación.

Comprobación: Si $c = 1.18$, entonces:

$$c + 0.27 = 1.18 + 0.27 = 1.45.$$

En el ejemplo anterior hemos utilizado la propiedad de la suma, que consiste en lo siguiente:

Propiedad de la suma

Si a, b y c son números reales, y si $a = b$, entonces

$$a + c = b + c,$$

y como restar un número real es sumar su opuesto, también tenemos que,

$$a - c = b - c.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$.

Solución: Sumamos $\frac{2}{3}$ $\left(\text{el opuesto de } -\frac{2}{3}\right)$ de cada lado de la ecuación

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$$
$$y - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{3}$$
$$y = \frac{2}{9}.$$

Comprobación: Si $y = \frac{2}{9}$, entonces:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2-6}{9} = -\frac{4}{9}.$$

2. Resolver $6 - w = 10$.

Solución:

$$6 - w = 10$$
$$6 - w - 6 = 10 - 6$$
$$-w = 4$$
$$w = -4.$$

En el último paso utilizamos la regla para encontrar el opuesto de un número; es decir, le cambiamos de signo.

Comprobación: Si $w = -4$, entonces:

$$6 - w = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10.$$

3. Resolver $|x| - 8 = 4$.

Solución:

$$|x| - 8 = 4$$
$$|x| - 8 + 8 = 4 + 8$$
$$|x| = 12,$$

de donde

$$x = 12 \text{ o } x = -12.$$

Comprobación: Si $x = 12$, entonces:

$$|x| - 8 = |12| - 8 = 12 - 8 = 4.$$

Si $x = -12$, entonces:

$$|x| - 8 = |-12| - 8 = 12 - 8 = 4.$$

Consecuencia de la propiedad de la suma

Hemos visto en los ejemplos anteriores que para resolver una ecuación debemos dejar sola la variable en uno de los miembros de la ecuación; si hay un sumando que queremos eliminar, lo que hacemos es sumar, en ambos lados de la igualdad, el opuesto de dicho sumando.

$$z + 3 = 5 \quad \leftarrow \text{ Queremos despejar } z$$
$$z + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \leftarrow \text{ Sumamos el opuesto de 3}$$
$$z = 2 \quad \leftarrow \text{ Simplificamos.}$$

Observa que en el primer renglón el 3 está *sumando* en el lado izquierdo y en el segundo renglón el 3 está *restando* en el lado derecho.

En general, si estamos *sumando* un término en un lado de la ecuación,

$$a + b = c,$$

entonces, al sumar su opuesto en ambos lados de la ecuación y simplificar,

$$a + b = c$$
$$a + b - b = c - b$$
$$a = c - b,$$

resulta que el término "pasó" restando al otro lado de la ecuación. Por tanto:

$$\text{Si } a + b = c \text{ entonces } a = c - b.$$

Asimismo, si estamos restando un término en un lado de la ecuación,

$$a-b=c,$$

al sumar su opuesto en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} a-b&=c\\ a-b+b&=c+b\\ a&=c+b, \end{aligned}$$

el término "pasó" sumando al otro lado de la ecuación. Por tanto:

$$\text{Si } a-b=c \text{ entonces } a=c+b.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $a+4.5=9.8$.

Solución:

$$\begin{aligned} a+4.5&=9.8\\ a&=9.8-4.5=5.3 \end{aligned}$$

Comprobación: Si $a=5.3$, entonces:

$$a+4.5=5.3+4.5=9.8$$

2. Resolver $x-\frac{2}{5}=-\frac{3}{10}$.

Solución:

$$\begin{aligned} x-\frac{2}{5}&=-\frac{3}{10}\\ x&=-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Comprobación: Si $x=\frac{1}{10}$, entonces:

$$x-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}-\frac{2}{5}=\frac{1-4}{10}=\frac{-3}{10}.$$

3. Resolver la ecuación $|5w-4|=13$.

Solución: Puesto que en la ecuación aparece un valor absoluto, consideramos tres casos:

- Si $5w-4=0$, entonces $|5w-4|=0$. Como $0\neq 13$, entonces no se satisface la igualdad para ningún valor de w tal que $5w-4=0$.
- Si $5w-4>0$, entonces $|5w-4|=5w-4$, de donde:

$$\begin{aligned} 5w-4&=13\\ 5w&=17\\ w&=\frac{17}{5}. \end{aligned}$$

$w = \frac{17}{5}$ satisface la igualdad.

- Si $5w - 4 < 0$, entonces $|5w - 4| = -(5w - 4)$, de donde:

$$\begin{aligned} -(5w-4) &= 13 \\ 5w-4 &= -13 \\ 5w &= -9 \\ w &= -\frac{9}{5}. \end{aligned}$$

$w = -\frac{9}{5}$ satisface la igualdad.

Los números que satisfacen la ecuación son $w = \frac{17}{5}$ y $w = -\frac{9}{5}$.

Comprobación: Si $w = \frac{17}{5}$, entonces:

$$|5w-4| = \left|5\left(\frac{17}{5}\right) - 4\right| = |17-4| = |13| = 13.$$

Si $w = -\frac{9}{5}$, entonces:

$$|5w-4| = \left|5\left(-\frac{9}{5}\right) - 4\right| = |-9-4| = |-13| = 13.$$

5.1.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 54, resuelve las ecuaciones y comprueba el resultado.

1. $x + 2 = 7$
2. $t - 8 = 0$
3. $12 - w = -5$
4. $z - 3.9 = -1.4$
5. $-6 + a = 15.1$
6. $b + 23 = 51$
7. $c - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$
8. $-s - \frac{8}{5} = -\frac{21}{10}$
9. $m - \frac{7}{6} = \frac{19}{9}$
10. $n + 9.75 = 9.75$
11. $25 - x = 18.6$
12. $-10 = t + 7.35$
13. $-c - 6.2 = -17.6$
14. $a + 0.8 = 1.5$
15. $-12 + y = -12$
16. $\frac{8}{5} + z = \frac{12}{5}$
17. $\frac{1}{8} = w - \frac{6}{5}$
18. $x - \frac{2}{3} = -\frac{4}{5}$
19. $0.25 - x = \frac{1}{4}$
20. $-\frac{4}{7} - z = \frac{3}{7}$
21. $t + \frac{2}{3} = -\frac{1}{5}$
22. $-6.6 = y - 8.8$
23. $-a + 9.5 = 13$
24. $-6 - (4 - b) = 30$
25. $\frac{20}{7} - b = -\frac{26}{7}$
26. $7.1 + c = 12.4$
27. $s - 0.48 = 1.06$
28. $|a| - 17 = -2$
29. $4.5 - |x| = -7.9$
30. $|r - 5| - 7.9 = 2.1$
31. $|t| - 3 = 5$
32. $25.9 = 31.8 - (|w| - 10.7)$
33. $-|x| + 9 = -12$
34. $|b| + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$
35. $\frac{5}{9} - \left(\frac{4}{3} - |y|\right) = \frac{10}{9}$
36. $\left|z - \frac{7}{4}\right| - \frac{7}{2} = -\frac{3}{4}$
37. $\frac{32}{3} + |d| = \frac{59}{4}$
38. $\left|x + \frac{49}{9}\right| = 32$
39. $|z| - \frac{64}{5} = 0$
40. $|d - 15.8| - 6.2 = -1.3$
41. $14 + |a + 27| = 60$
42. $12.6 - |c| = 8.7$
43. $\frac{21}{5} - \left|y - \frac{9}{10}\right| = -\frac{13}{2}$
44. $\left|a - \frac{15}{4}\right| + \frac{11}{6} = \frac{31}{12}$
45. $\left|b + \frac{1}{3}\right| + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$
46. $(a - 14) - 3 = -28$
47. $42 = 8 - (t - 20)$
48. $5w + \left(4\frac{2}{3} - 4w\right) = -4\frac{1}{3}$
49. $\frac{5}{8}y + \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{8}y\right) = \frac{18}{3}$
50. $4s - (3s - 2.2) = 34.5$
51. $(-3x + 5) - (8 - 4x) = 16$
52. $\frac{2}{3}x - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{3}x\right) = 5$
53. $\frac{5}{6} = \left(x - \frac{11}{6}\right) - \left(\frac{7}{6} + 2x\right)$
54. $\left(w + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{5}{2} - 3w\right) = \frac{1}{2}$

55. Si restamos -21 de un número, el resultado es -18. ¿Cuál es el número?

56. Si restamos 9.4 de un número, el resultado es 7.8. ¿Cuál es el número?

57. Si sumamos -32 a un número, el resultado es 68. ¿Cuál es el número?

58. Si sumamos 12 a un número, el resultado es 55. ¿Cuál es el número?

59. Si sumamos $\frac{3}{4}$ a un número, el resultado es $-\frac{3}{2}$. ¿Cuál es el número?

60. María tiene el doble de años que Pedro, más 3. Si la edad de María menos la edad de Pedro es igual a 10, ¿cuántos años tiene cada uno?

61. Tres hermanos reciben una herencia repartida de la siguiente manera: el menor recibe cierta cantidad, el segundo recibe $6,746 más que el primero, y el mayor recibe $5,200 más que el segundo. Si el monto total de la herencia fue de $431,000 y se entregaron $123,000 a un asilo, ¿cuánto recibió el hijo menor?

62. La suma de dos números es 90, y el doble del menor es 50. Encuentra la diferencia del mayor menos el menor.

63. La suma de dos números es 250, y el menor es 104. Encuentra el producto del mayor por el menor.

64. Camino al mercado, una vendedora de aguacates vende $\frac{3}{7}$ de su mercancía; ya en el mercado, vende $\frac{5}{8}$ de lo que le quedaba, y al regresar a casa lleva 12 aguacates. ¿Con cuántos aguacates salió de la casa?

65. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 63°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?

66. Si el perímetro de un triángulo mide 48 metros y la suma de dos de sus lados es de 27 metros, ¿cuánto mide el tercer lado?

67. La suma de dos números es -156 y el mayor de ellos es 27. Encuentra el cociente del menor entre el mayor.

68. Si el perímetro de un triángulo isósceles es de 225 metros y la longitud de cada uno de los lados iguales es de 90 metros, ¿cuánto mide la base?

69. Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°. Si uno de sus ángulos mide 128°, otro mide la cuarta parte de este último y el tercero mide 93°, ¿cuánto mide el ángulo faltante?

70. Si uno de los ángulos de un triángulo mide 25° y otro mide el doble de éste, ¿cuánto mide el tercer ángulo?

5.2 Ecuaciones y multiplicación

Un automóvil recorrió 80 km a una velocidad de 60 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en recorrer dicha distancia?

Solución: Sabemos que la distancia recorrida es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo transcurrido.

$$d = vt.$$

Sustituimos $d = 80$, $v = 60$ y obtenemos:

$$80 = 60t.$$

Para despejar t, multiplicamos por el recíproco o inverso multiplicativo de 60 en ambos lados de la ecuación:

$$80 = 60t$$
$$80\left(\frac{1}{60}\right) = \left(\frac{1}{60}\right)60t$$
$$\frac{4}{3} = t,$$

así que el tiempo transcurrido fue $t = \frac{4}{3}$ horas $= 1$ hora 20 minutos.

Comprobación: Si $t = \frac{4}{3}$, entonces:

$$60t = 60\left(\frac{4}{3}\right) = 20(4) = 80.$$

En el ejemplo anterior hemos usado la siguiente propiedad:

Propiedad de la multiplicación

Si a, b y c son números reales, y si $a = b$, entonces:

$$ac = bc.$$

Dividir entre un número distinto de cero es lo mismo que multiplicar por su recíproco o inverso multiplicativo; por tanto, si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces

$$a\left(\frac{1}{c}\right) = b\left(\frac{1}{c}\right),$$

es decir,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $\frac{3}{5}y = \frac{1}{2}$.

Solución: Multiplicamos por el recíproco de $\frac{3}{5}$; es decir, por $\frac{5}{3}$:

$$\frac{3}{5}y = \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}y\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$y = \frac{5}{6}.$$

Comprobación: Si $y = \frac{5}{6}$, entonces:

$$\frac{3}{5}y = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Resolver $\frac{a}{4} = -7$.

Solución:

$$\frac{a}{4} = -7$$
$$4\left(\frac{a}{4}\right) = 4(-7)$$
$$a = -28.$$

Comprobación: Si $a = -28$, entonces:

$$\frac{a}{4} = \frac{-28}{4} = -7.$$

Consecuencia de la propiedad de la multiplicación

Para despejar una variable que está multiplicada por un número, lo que hacemos es multiplicar ambos miembros de la igualdad por el recíproco o inverso multiplicativo de dicho número.

$$2x = 9 \quad \leftarrow \text{ Queremos despejar } x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x = \left(\frac{1}{2}\right)9 \quad \leftarrow \text{ Multiplicamos por el recíproco de 2}$$

$$x = \frac{9}{2} \quad \leftarrow \text{ Simplificamos.}$$

En el primer renglón, el 2 está *multiplicando* en el lado izquierdo y en el último renglón el 2 está *dividiendo* en el lado derecho.

En general, si un término distinto de cero está *multiplicando* en un lado de la ecuación

$$ab = c,$$

entonces, al multiplicar por su recíproco en ambos lados de la ecuación y simplificar,

$$ab = c$$

$$ab\left(\frac{1}{b}\right) = c\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$a = \frac{c}{b},$$

el término "pasa" al otro lado de la ecuación dividiendo. Por tanto:

$$\text{Si } ab = c \text{ y } b \neq 0, \text{ entonces } a = \frac{c}{b}$$

De la misma manera, si un término está *dividiendo* en un lado de la ecuación,

$$\frac{a}{b} = c,$$

al multiplicar por él ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\frac{a}{b} = c$$

$$\frac{a}{b}(b) = c(b)$$

$$a = cb,$$

el término "pasa" al otro lado de la ecuación multiplicando. Por tanto:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = c \text{ entonces } a = cb.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $5y = -\frac{10}{7}$.

Solución:

$$5y = -\frac{10}{7}$$

$$y = -\frac{10}{7 \times 5} = -\frac{2}{7}.$$

Comprobación: Si $y = -\frac{2}{7}$, entonces:

$$5y = 5\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{10}{7}.$$

2. Resolver $6.4b = 13.44$.

Solución:

$$6.4b = 13.44$$
$$b = \frac{13.44}{6.4} = 2.1.$$

Comprobación: Si $b = 2.1$, entonces:

$$6.4b = 6.4(2.1) = 13.44.$$

3. Resolver $|12z| = 96$.

Solución:

$$12z = 96 \quad \text{o} \quad -12z = 96.$$

Ahora resolvemos cada ecuación por separado, con lo cual obtenemos:

$$12z = 96 \qquad \text{o} \qquad -12z = 96$$
$$z = \frac{96}{12} = 8 \qquad\qquad z = \frac{96}{-12} = -8.$$

Comprobación: Si $z = 8$, entonces:

$$|12z| = |12(8)| = |96| = 96.$$

Si $z = -8$, entonces:

$$|12z| = |12(-8)| = |-96| = 96.$$

4. Resolver $9 = \frac{30}{x}$.

Solución: Observa que la x se manipula de la misma manera que los números,

$$9 = \frac{30}{x}$$
$$9x = 30$$
$$x = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}.$$

Comprobación: Si $x = \frac{10}{3}$, entonces:

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{\frac{10}{3}} = \frac{90}{10} = 9.$$

5. Una llave puede llenar un tanque de agua en 4 minutos y otra puede llenarlo en 5 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque si se abren ambas llaves?

Solución: Si la primera llave llena el tanque en 4 minutos, entonces en 1 minuto llena $\frac{1}{4}$ del tanque.

Si la segunda llave llena el tanque en 5 minutos, entonces en 1 minuto llena $\frac{1}{5}$ del tanque.

Si llamamos w al número de minutos que tardan ambas llaves en llenar el tanque, entonces en 1 minuto ambas llaves llenan $\frac{1}{w}$ del tanque. Observa que la w debe ser distinta de cero para que lo anterior tenga sentido.

Luego, si se abren ambas llaves al mismo tiempo, llenan $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ del tanque en 1 minuto, pero, por otro lado, vimos que ambas llaves llenan $\frac{1}{w}$ del tanque en 1 minuto. Así que tenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{w}.$$

Efectuamos la suma del lado izquierdo:

$$\frac{9}{20}=\frac{1}{w}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$w=\frac{20}{9}.$$

Entonces ambas llaves llenan el tanque en $\frac{20}{9}$ minutos; es decir, aproximadamente en 2.2 minutos.

Comprobación: Si $w=\frac{20}{9}$, entonces:

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{\frac{20}{9}}=\frac{9}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

5.2.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 29, resuelve las ecuaciones.

1. $8x=80$

2. $4y=-14$

3. $-5z=-75$

4. $48=-6a$

5. $2a=-27$

6. $2.5x=125$

7. $-9=\frac{18}{5}z$

8. $\frac{1}{6}b=13$

9. $-\frac{5}{t}=5$

10. $\frac{1}{3}y=-7$

11. $-\frac{1}{10}x=-10$

12. $-12=\frac{1}{6}z$

13. $|8z|+5=23$

14. $|2.5w|-4.15=10$

15. $9-|5y-8|=-6$

16. $\frac{9}{w}=3$

17. $2=-\frac{26}{s}$

18. $\frac{2}{7}n=-1$

19. $0.2y=6$

20. $0.15t=0.54$

21. $2x+6=8$

22. $-\frac{1}{8}s=\frac{5}{6}$

23. $\frac{1}{10}x+\frac{7}{5}=\frac{22}{5}$

24. $\frac{3}{2}a=\frac{2}{3}$

25. $\frac{4}{x}=20$

26. $\frac{1}{2}a+4-\frac{1}{7}a-3=\frac{3}{4}$

27. $\frac{6}{x}-4=-10$

28. $|7x-3|+8=12$

29. $15-|3x-2|=-15$

30. $3+|6x+4|=9$

31. $-15-\frac{3}{5}b=3$

32. $\frac{11}{2}z=11$

33. $\frac{20}{y}+1.7=-18.3$

34. $20-4t=-16$

35. $0.4z-2.7=-8.6$

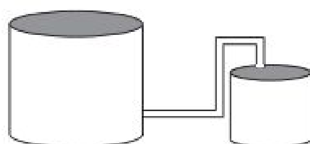
36. $\frac{7}{5}y=-21$

37. $5z - 11 = -8$
38. $-\frac{32}{9}z + 1 = \frac{19}{3}$
39. $0.6x = 5.4$
40. $\frac{30}{7}y = 0$
41. $6s - (2s - 11) = 47$
42. $\left(5a - \frac{2}{3}\right) - 2(3 - a) = 0$
43. $5b - (9 - 7b) = 9$
44. $3(9 - 5t) - 5(9 - 10t) = 7$
45. $(4x + 1) + 8 - (x + 6) = 9$
46. $(8y + 7) - 4y = -9$
47. $4(23m - 1) - 8 - 32m = -2$
48. $39 - 5x - 5(7 - 46x) = -12$

49. El triple de un número es -45. Encuentra el número.
50. Una bomba puede vaciar una cisterna en $3\frac{1}{2}$ horas, y otra la vacía en 4 horas. ¿En cuánto tiempo vaciarán la cisterna las dos bombas trabajando juntas?
51. Cuatro por el recíproco de cierto número es 14. Encuentra dicho número.
52. Cinco tercios de un número, aumentado en siete tercios es 5. Encuentra el número.
53. Ana tiene el triple de edad que Juan. Roberto tiene 10 años menos que Juan. La suma de las edades de los tres es 70. ¿Qué edad tiene cada uno?
54. Un grupo de 60 alumnos está separado en dos grupos. El grupo que toma clases de artes plásticas es 4 veces el tamaño del que toma clases de música. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?
55. Pilar tiene $\frac{2}{3}$ de la edad de Lupe. Si la suma de sus edades es 30, ¿qué edad tiene cada una?
56. Eduardo trabajó 9 horas más que Diego. Si entre los dos trabajaron 35 horas, ¿cuántas horas trabajó cada uno?
57. El mayor de dos números es 6 veces el menor. La resta del mayor menos el menor es 312.5. Encuentra los nú-meros.
58. La suma de un número más un séptimo de él es 19. Encuentra dicho número.
59. La suma de -29 y 4 veces un número es -135. Encuentra dicho número.
60. Un sexto de un número menos -7.2 es -4.9. Encuentra dicho número.
61. Dos quintos de un número menos 8 es 22. Encuentra dicho número.
62. Tres obreros laboran 8 horas cada jornada. El primero es capaz de realizar un trabajo en 90 horas; es decir, en $11\frac{1}{4}$ jornadas. El segundo puede realizar el mismo trabajo en 15 jornadas y el tercero lo logra en sólo 9 jornadas. ¿Cuántas horas de trabajo requerirán para realizar el trabajo si lo hacen los tres juntos?
63. Elvira tiene dos años más que Andrés. La suma de sus edades es 20. ¿Qué edad tiene cada uno?
64. Tamara leyó 21 revistas en 3 días. Cada día leyó 4 revistas más que el día anterior. ¿Cuántas revistas leyó cada uno de los 3 días?
65. $\frac{3}{4}$ de un número menos $\frac{2}{5}$ de ese mismo número es igual a 7. Encuentra el número.
66. Amelia puede transcribir a la computadora un trabajo de 200 páginas en 5 días, y Cristina puede hacerlo en 4 días. ¿En cuánto tiempo podrán Amelia y Cristina si lo hacen juntas?
67. Divide $4,725 en tres partes, de tal manera que la segunda sea $150 más que la primera y la tercera $525 menos que la segunda. ¿Cuáles son las tres cantidades resultantes?
68. Si por 2 kilos de papa y 3 kilos de jitomate se pagaron $21.50, y el kilo de papa cuesta $3.40, ¿cuánto cuesta el kilo de jitomate?
69. Agustín puede pintar una barda de 18×3 m^2 en 4 días y Benito puede hacerlo en 2 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en pintar la barda los dos juntos?
70. Dos llaves pueden llenar un tanque en 6 y 12 horas respectivamente, y una bomba puede vaciarlo en 9 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará si ambas llaves están abiertas al mismo tiempo y la bomba está funcionando?

5.3 Ecuaciones de una sola variable en ambos miembros

Un tanque contiene 560 litros de agua y se está llenando a razón de 45 litros por minuto con agua de otro tanque que contiene 1,100 litros. ¿En cuánto tiempo tendrán la misma cantidad de agua ambos tanques?


Figura 5.1

Solución: En x minutos el primer tanque tiene $560 + 45x$ litros, mientras que el segundo tanque tiene $1100 - 45x$; debemos igualar ambas expresiones y encontrar la x que haga cierta dicha igualdad:

$$560 + 45x = 1100 - 45x.$$

Pasamos los términos que contienen x a un miembro de la ecuación y los otros al otro miembro:

$$
\begin{aligned}
560+45x &= 1100-45x && \leftarrow \text{ Pasamos los términos con } x \\
560+45x+45x &= 1100 && \text{ al primer miembro} \\
90x &= 1100-560 && \leftarrow \text{ Pasamos los otros términos} \\
90x &= 540 && \text{ al segundo miembro} \\
x &= \frac{540}{90} && \leftarrow \text{ Pasamos dividiendo al 90} \\
x &= 6,
\end{aligned}
$$

por tanto, en 6 minutos los tanques tienen la misma cantidad de agua.

Comprobación:

Lado izquierdo: $560+45x=560+45(6)=830$;
lado derecho: $1100-45x=1100-45(6)=830$.

EJEMPLOS

1. Resolver $y+8=-7-2y$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
y+8 &= -7-2y \\
2y+y+8 &= -7 \\
3y &= -7-8 \\
3y &= -15 \\
y &= \frac{-15}{3} \\
y &= -5.
\end{aligned}
$$

Comprobación: Si $y=-5$, entonces:

Lado izquierdo: $y+8=-5+8=3$;
lado derecho: $-7-2y=-7-2(-5)=-7+10=3$.

2. Resolver $\frac{5-z}{2}=6z$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{5-z}{2} &= 6z \\
5-z &= 2(6z) \\
5 &= 12z+z \\
5 &= 13z \\
\frac{5}{13} &= z.
\end{aligned}
$$

Comprobación: Si $z = \frac{5}{13}$, entonces:

Lado izquierdo: $\frac{5-z}{2} = \frac{5-\frac{5}{13}}{2} = \frac{\frac{65-5}{13}}{2} = \frac{60}{26} = \frac{30}{13}$;

lado derecho: $6z = 6\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{30}{13}$.

3. Resolver $-5(3x-2)+8x-1 = 2(8-5x)$.

Solución:

$$-5(3x-2)+8x-1 = 2(8-5x)$$
$$-15x+10+8x-1 = 16-10x$$
$$-15x+8x+10x = 16-10+1$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3}.$$

Comprobación: Si $x = \frac{7}{3}$, entonces:

Lado izquierdo: $-5(3x-2)+8x-1 = -5\left(3\left(\frac{7}{3}\right)-2\right)+8\left(\frac{7}{3}\right)-1$
$= \frac{-75+56-3}{3} = -\frac{22}{3}$;

lado derecho: $2(8-5x) = 2\left(8-5\left(\frac{7}{3}\right)\right) = 2\left(8-\frac{35}{3}\right) = 2\left(\frac{24-35}{3}\right) = -\frac{22}{3}$

4. Resolver $\frac{w}{4}+8 = -w$.

Solución:

$$\frac{w}{4}+8 = -w$$
$$\frac{w}{4}+w = -8$$
$$\frac{w+4w}{4} = -8$$
$$5w = (-8)4$$
$$w = \frac{-32}{5}.$$

Comprobación: Si $w = -\frac{32}{5}$, entonces:

Lado izquierdo: $\frac{w}{4}+8 = \frac{-\frac{32}{5}}{4}+8 = -\frac{8}{5}+8 = \frac{-8+40}{5} = \frac{32}{5}$;

lado derecho: $-w = -\left(-\frac{32}{5}\right) = \frac{32}{5}$.

5. ¿A qué hora es la primera vez, después de las 12:00 hrs, en la que están el horario y el minutero de un reloj en el mismo lugar?

Solución: A las 12:00 hrs ambas manecillas coinciden en el 12. Para que vuelvan a coincidir, el minutero debe dar una vuelta completa y alcanzar al horario. Esto sucederá un poco después de la una.

Cuando el minutero da una vuelta completa, el horario únicamente ha dado $\frac{1}{12}$ de vuelta, así el tiempo t_h que tarda el horario en recorrer un arco x es 12 veces el tiempo t que tarda el minutero en recorrer ese mismo arco; o sea,

$$t_h = 12t.$$

Llamemos x al arco que hay entre el 12 y el punto en que vuelven a coincidir las manecillas por primera vez desde las 12:00 hrs. El tiempo t_h que tardó el horario en recorrer ese arco x es igual a una hora más el tiempo t empleado por el minutero en recorrer el arco x. Por lo que si medimos el tiempo en minutos, obtenemos

$$t_h = 60 + t.$$

De donde:

$$\begin{aligned} 12t &= 60 + t \\ 11t &= 60 \\ t &= \frac{60}{11}, \end{aligned}$$

así que el minutero empleó una hora más $\frac{60}{11}$ minutos para llegar al punto de encuentro, es decir, coincidieron a las 13:05:27, aproximadamente.

Comprobación: Si $t = \frac{60}{11}$, entonces:

Lado izquierdo: $12t = 12\left(\frac{60}{11}\right) = \left(\frac{12}{11}\right)60;$

lado derecho: $60 + t = 60 + \frac{60}{11} = \left(1 + \frac{1}{11}\right)60 = \left(\frac{12}{11}\right)60.$

5.3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 47, resuelve las ecuaciones.

1. $13b - 22 = 2b$
2. $-5a - 24 = 3a$
3. $4y - 35 = -3y$
4. $12 - 6x = 8x - 5$
5. $3c = 64 - 5c$
6. $5t - 1 = 1 - 5t$
7. $s - 1.25 = 0.15s - 6.35$
8. $6a + 17 = 2a - 3$
9. $0.3z + 1.15 = 2.4z - 4.1$
10. $\frac{1}{5}d + 7 = 4 - \frac{2}{3}d$
11. $\frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$
12. $\frac{1}{10}(6 - w) = \frac{1}{5}(4 - 2w)$
13. $3b - 11 = \frac{7}{4}b + 9$
14. $0.8b = 2.24b + 74.88$
15. $11x - 7 = 26 - 9x$
16. $\frac{5}{8}c + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}c$
17. $\frac{3}{10}x + \frac{14}{10} = \frac{24}{10}x - \frac{42}{10}$
18. $\frac{1}{2}(5y - 6) = -y - 9$
19. $7c - 4 = 2 + 3(5c + 2)$
20. $5(3y - 1) + 2 = -3y + 6$
21. $\frac{1}{7}(2b - 2) - 1 = \frac{1}{3}(8b - 5)$
22. $-\frac{14}{5}a + 8 = \frac{1}{5}(6a - 20)$
23. $\frac{1}{6}(4x - 1) = \frac{1}{4}(5x + 3)$
24. $6d = 4(5d - 2) + 20$
25. $3.4t - 1.5 = 7.9t + 3.4$
26. $0.25w + \frac{11}{5} = 9.8 - \frac{4}{5}w$
27. $\frac{3}{4} - \frac{4}{3}m = 1.2m + 1.25$

28. $\frac{2x-8}{3}+5=6-\frac{3x-5}{4}$

29. $2(a+15)+3a=180+2$

30. $18-1.7z=3\left(\frac{1}{10}z-14\right)$

31. $\frac{x-4}{4}+\frac{x-12}{6}=\frac{x}{3}$

32. $\frac{5x-6}{12}-\frac{7}{3}=\frac{9x-4}{2}$

33. $\frac{1}{3}(12y-3)-2\left(y-\frac{7}{2}\right)=\frac{3}{2}(6y-8)$

34. $\frac{2}{5}b+2=6-\frac{13}{5}b$

35. $(10-8c)+4(5c-4)=-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-10c\right)$

36. $\frac{2t+9}{5}-\frac{3t-6}{4}=\frac{7t-3}{10}$

37. $\frac{6x+7}{5}-\frac{3x-6}{15}=\frac{10x-8}{30}$

38. $5(a-4)-3(a-5)=6(5-a)$

39. $4(1.83y-5.6)-7.4=73.61-4.17y$

40. $2(w-2)-4=8(w-3)+15$

41. $6(c+0.5)+7(2c-1)=32-4(3c-7)$

42. $7(3-5z)-2(1-3z)=8z-1$

43. $6(4x+9)-15x=4(5x-2)+3(6-9x)$

44. $13-5\left(\frac{7}{2}t+8\right)=26-(17-7.8t)$

45. $21-6\left(12-\frac{28}{3}m\right)=3(15.75m+10)-2$

46. $9\left(21-\frac{1}{2}r\right)-(8-4.25r)=\frac{12}{5}-8.45r$

47. $23.6x+5.6-5x=8(6.3x-25)-(4.9-9.2x)$

48. Cinco veces un número más 21 es igual a tres veces ese número menos 11. Encuentra el número.

49. El largo de un rectángulo es 3 veces su ancho. El perímetro tiene 68 cm más que el largo. Encuentra las dimensiones del rectángulo.

50. Encuentra un número tal que si le sumas 18 es igual al triple de él mismo.

51. Alicia leyó $\frac{8}{9}$ de las páginas de un libro. Le faltan por leer 25 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

52. Para el examen de historia, Pancho estudió 2 horas más que Luis. Juntos estudiaron una hora menos que 4 veces las horas que estudió Luis. ¿Cuántas horas estudió cada uno?

53. La edad actual de Ricardo es el doble que la de su hijo. Hace 15 años la edad de Ricardo era el triple de la edad de su hijo. Encuentra la edad de Ricardo y la de su hijo.

54. Cinco veces un número debe ser igual a 48 más el número. Encuentra el número.

55. Un grupo de 14 amigos decidieron ir a un concierto. Dos de ellos no podían pagar el costo del boleto, así que los otros 12 pagaron cada uno su boleto y \$4 más. ¿Cuánto costaba cada boleto?

56. Seis veces la edad de Lucrecia más 9 años es igual a 7 veces la edad de Ramón menos 3 años. Si Ramón y Lucrecia son gemelos, ¿qué edad tienen?

57. Dos números suman $\frac{245}{4}$. Si restamos $\frac{1}{8}$ al mayor y sumamos $\frac{1}{8}$ al menor, obtenemos dos cantidades iguales. ¿Cuáles son dichos números?

58. En el momento de escribir este problema, mi edad más el triple de la edad que tenía hace 14 años es igual al triple de mi edad menos 3. ¿Sabes cuántos años tengo?

59. ¿Qué número se debe agregar a 8 y a 11 para que la primera suma sea $\frac{2}{5}$ de la segunda?

60. Diofanto de Alejandría, matemático griego que vivió a finales del siglo III de nuestra era, es considerado el padre del álgebra. Diofanto fue el primero en utilizar un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación. Sus trabajos sobre la resolución de ecuaciones fueron especialmente importantes. En la lápida de la tumba de Diofanto aparece la siguiente inscripción: "¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura habiendo sobrevivido 4 años al deceso de su hijo." ¿Cuántos años vivió Diofanto?

5.4 Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de primer grado

5.4.1 El plano cartesiano

En un plano podemos trazar dos rectas numéricas perpendiculares que se corten en el cero de ambas rectas. Estas rectas se llaman *ejes de coordenadas,* y el punto donde se cortan se llama *origen* y suele denotarse por O.

René Descartes (1596–1650). Filósofo y matemático francés que nació en La Haye, Francia, y falleció en Estocolmo, Suecia; utilizaba su nombre latinizado (Cartesius). Esta es la causa de que su doctrina filosófica y que el plano coordenado se llamen "cartesianos".

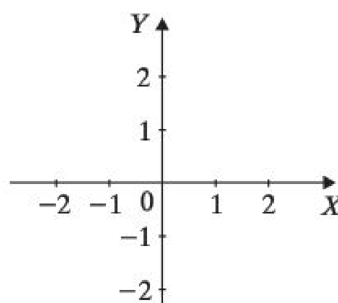


Figura 5.2

El eje que se traza horizontalmente se llama eje X y el eje perpendicular se llama eje Y (véase la figura 5.2). En el eje X, los números positivos están colocados del lado derecho del origen y los negativos del lado izquierdo. En el eje Y, los números positivos están colocados hacia arriba del origen y los negativos hacia abajo.

Estos ejes nos permiten localizar puntos en el plano mediante un par de números que llamamos las *coordenadas* del punto.

EJEMPLOS

1. Dar las coordenadas del punto P de la figura 5.3.

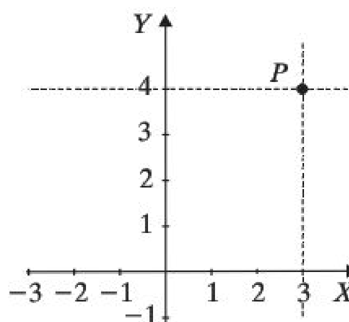


Figura 5.3

Solución: A partir de P trazamos un segmento de recta perpendicular al eje X hasta que lo corte. Observamos el número en el cual lo corta, en este caso, 3. A continuación trazamos una recta perpendicular al eje Y hasta que lo corte y nuevamente observamos en el número donde lo corta, que es 4. Estos dos números son las coordenadas del punto P y las escribimos $(3, 4)$. Siempre escribimos primero la coordenada X y después la coordenada Y.

2. Localizar en el plano de la figura (5.4) al punto Q cuyas coordenadas son $(-2, 5)$.

Solución: Localizamos el punto -2 del eje X y a partir de ahí trazamos una recta perpendicular a este eje. Ahora, a partir del 5 del eje Y, trazamos una recta perpendicular a este eje. El punto donde se cortan las dos rectas trazadas es el punto Q que buscamos.

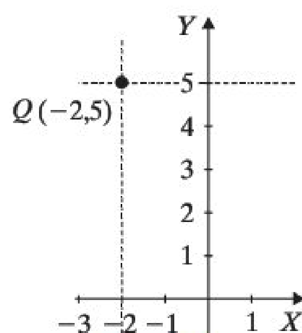


Figura 5.4

5.4.2 Rectas y ecuaciones lineales de dos variables

Analicemos la ecuación $5x - 3y = 2$.

Algunas de sus soluciones son $x = 1, y = 1; x = 4, y = 6; x = -2, y = -4; x = -5, y = -9$, ya que:

$$\begin{aligned} 5(1) - 3(1) &= 2 \\ 5(4) - 3(6) &= 2 \\ 5(-2) - 3(-4) &= 2 \\ 5(-5) - 3(-9) &= 2. \end{aligned}$$

Estas parejas (x, y) de soluciones determinan las siguientes parejas ordenadas: $(1, 1), (4, 6), (-2, -4), (-5, -9)$.

Localizamos los puntos correspondientes a esas parejas y observamos que están alineados (ver la figura 5.5).

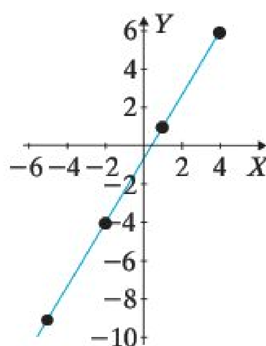


Figura 5.5

Por otro lado, observemos que cualquier otro punto de la recta también satisface a la ecuación; por ejemplo, el punto $\left(-3, -\frac{17}{3}\right)$ de la recta satisface la ecuación:

$$5(-3) - 3\left(-\frac{17}{3}\right) = -15 + 17 = 2.$$

Vemos entonces que una ecuación de primer grado en dos variables tiene una infinidad de soluciones; de hecho, por cada valor que demos a una de las

variables, podemos encontrar un valor de la otra, de manera que esta pareja de valores satisfaga la ecuación.

Por ejemplo, si hacemos $x = 2$ en la ecuación original, obtenemos:

$$10 - 3y = 2.$$

Resolviendo esta ecuación para y obtenemos $y = \frac{8}{3}$, por lo que la pareja $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ satisface la ecuación original,

$$5(2) - 3\left(\frac{8}{3}\right) = 10 - 8 = 2.$$

En general, tenemos que una ecuación de primer grado en dos variables representa una recta en el plano, es decir, un punto (x, y) del plano está en dicha recta si los valores de x y y satisfacen dicha ecuación y viceversa. Por este motivo, dicha ecuación de primer grado también se llama *ecuación lineal en dos variables.*

Dos puntos distintos entre sí determinan una recta.

EJEMPLOS

1. Dibujar la recta representada por la ecuación $6x - 5y = 4$.

Solución: Tenemos que encontrar dos puntos del plano que satisfagan la ecuación. Para ello, damos cualquier valor a una de las variables y resolvemos la ecuación para la otra, del modo que vimos en las secciones anteriores.

Si $x = 0$:

$$\begin{aligned} 6(0) - 5y &= 4 \\ -5y &= 4 \\ y &= -\frac{4}{5}, \end{aligned}$$

obtenemos el punto $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.

Si $x = 5$:

$$\begin{aligned} 6(5) - 5y &= 4 \\ 30 - 5y &= 4 \\ y &= \frac{26}{5}, \end{aligned}$$

obtenemos el punto $\left(5, \frac{26}{5}\right)$.

Marcamos estos dos puntos en el plano cartesiano y trazamos la recta que los une.

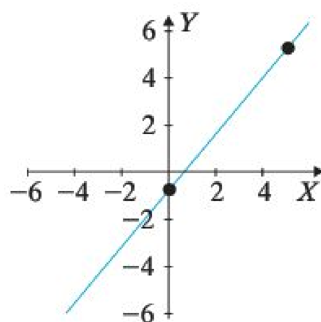


Figura 5.6

2. Dibujar la recta representada por la ecuación $x + 2y = 4$.

Solución: Despejamos y en la ecuación, es decir,

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Ahora hacemos una tabla donde damos algunos valores a x y calculamos los correspondientes para y:

x	$y = -\frac{1}{2}x + 2$
0	$-\frac{1}{2}(0) + 2 = 2$
−1	$-\frac{1}{2}(-1) + 2 = \frac{5}{2}$

Marcamos estos dos puntos en el plano cartesiano y trazamos la recta que los une.

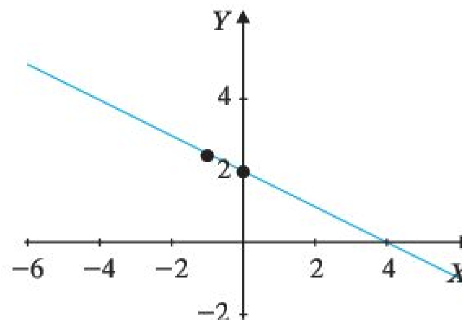


Figura 5.7

Cuando resolvemos una ecuación de la forma $ax + b = 0$, su solución es:

$$x = -\frac{b}{a},$$

es decir, si consideramos la pareja,

$$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

esta pareja ordenada corresponde a la intersección de la recta $y = ax + b$ con el eje X.

EJEMPLOS

1. Encontrar la intersección de la recta $y = 3x + 1$ con el eje X.

Solución: El punto de intersección de la recta con el eje X tiene por segunda coordenada 0. Por tanto, tenemos que resolver $3x + 1 = 0$, de donde:

$$x = -\frac{1}{3}.$$

Así, la recta $y = 3x + 1$ corta al eje X en el punto $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, como se muestra en la figura 5.8.

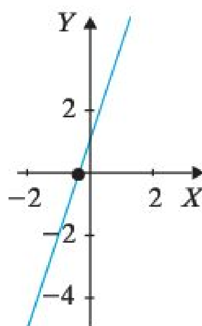


Figura 5.8

2. Encontrar la intersección de la recta $8x + 2y = 3$ con el eje X.

Solución: Primero despejamos y:

$$\begin{aligned} 8x + 2y &= 3 \\ 2y &= 3 - 8x \\ y &= \frac{3 - 8x}{2}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos y por 0:

$$\frac{3 - 8x}{2} = 0$$

y despejamos x:

$$\begin{aligned} \frac{3 - 8x}{2} &= 0 \\ 3 - 8x &= 0 \\ -8x &= -3 \\ x &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

La recta $8x + 2y = 3$ corta el eje X en el punto $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$, como se muestra en la figura 5.9.

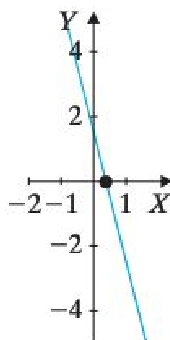


Figura 5.9

■

5.4.3 Ecuación (pendiente-ordenada al origen) de la recta

Un tanque de agua tiene 5 litros y se abre una llave para llenarlo. Cada minuto caen 3 litros de agua. Haz una tabla que muestre la cantidad de agua que tiene el tanque en cada minuto y dibuja la recta que representa esta situación.

Solución:

x = tiempo	y = volumen
0	5
1	8
2	11
3	14

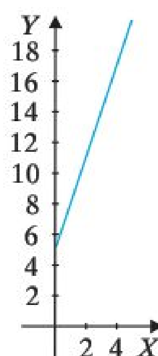


Figura 5.10

Dado el tiempo x, para obtener el volumen y correspondiente, multiplicamos x por 3 (litros que caen cada minuto) y sumamos 5 (contenido inicial del tanque).

$$y = 3x + 5$$

Una de las formas más útiles de la ecuación de la recta es cuando se escribe despejando la variable y,

$$y = mx + b.$$

De esta manera queda explícito que la variable y depende de la variable x.

Cuando $x = 0$, el valor de y es b. Cuando x aumenta en una unidad, y aumenta en m unidades, es decir, m nos dice la velocidad con la que aumenta y. El número m se llama la *pendiente* de la recta.

Observa que la recta corta al eje Y a la altura b, por lo que b se llama *ordenada al origen*. Esta forma de la ecuación de la recta se llama *pendiente-ordenada al origen*.

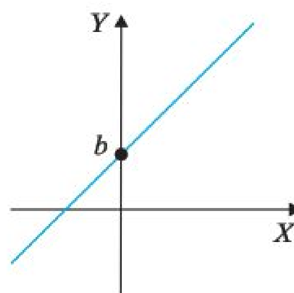


Figura 5.11

EJEMPLOS

1. Dibujar la recta $y = 5x - 7$. ¿Cuánto vale y cuando x vale 0? ¿Cuánto vale y cuando x vale 3 y 4? ¿Cuánto creció la variable y cuando x pasó de 3 a 4?

Solución: Evaluamos

x	y
0	-7
3	8
4	13

Observa que el valor de y cuando $x = 0$ es el término independiente de la ecuación y que cuando x pasa de 3 a 4, y crece 5, que es el coeficiente de x. Para dibujar la recta, marcamos dos puntos conocidos; por ejemplo $(0, -7)$ y $(4, 13)$ y trazamos la recta que pasa por esos puntos.

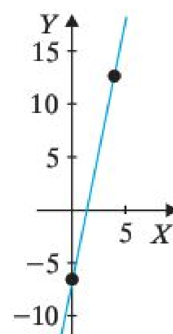


Figura 5.12

2. Dibujar la recta $y = -\frac{1}{2}x + 1$. ¿Qué le sucede a la variable y cuando x pasa de 6 a 7?, ¿y cuando x pasa de 10 a 11?

Solución: Evaluamos en 0, 6, 7, 10 y 11.

x	y
0	1
6	$-2 = -\frac{4}{2}$
7	$-\frac{5}{2}$
10	$-4 = -\frac{8}{2}$
11	$-\frac{9}{2}$

Observa que cuando x pasa de 6 a 7, y decrece $\frac{1}{2}$. De igual manera, cuando x pasa de 10 a 11, y decrece $\frac{1}{2}$.

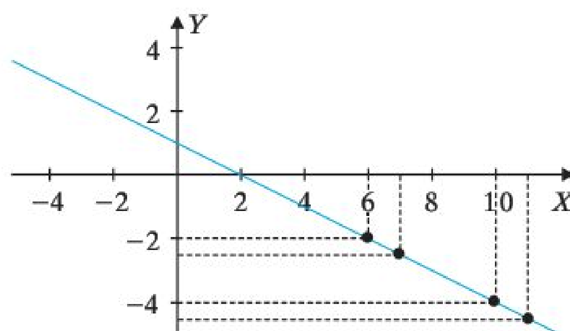
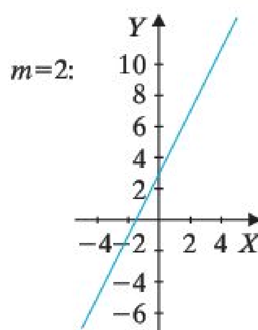


Figura 5.13

Observa que cuando la pendiente m es positiva, la recta está inclinada hacia la derecha y la variable y crece cuando x crece. Mientras más grande sea m, más inclinada estará la recta respecto al semieje OX.

$m=2$:



$m=10$:

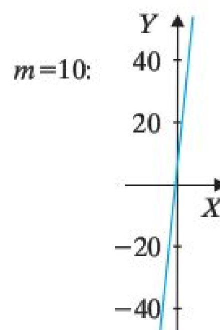
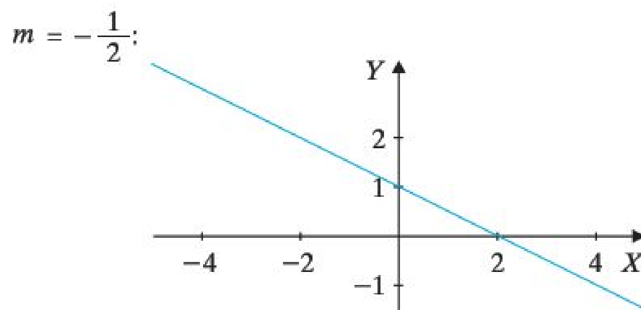


Figura 5.14

Cuando m es negativa, la recta está inclinada hacia la izquierda y la variable y decrece cuando x crece. Mientras "más negativa" sea m, menos inclinada estará la recta respecto al semieje OX.

$m = -\frac{1}{2}$:



$m = -4$:

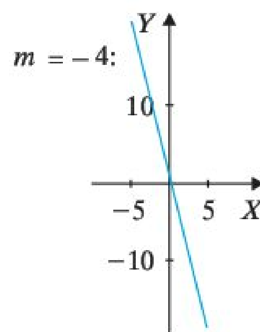


Figura 5.15

5.4.4 Ejercicios

En cada caso, dibuja la recta representada por la ecuación dada.

1. $x + y = 0$
2. $2x - y = 1$
3. $y = -\frac{3}{2}$
4. $3x + 2y = -9$
5. $-2x + 5y = 3$
6. $x - 4y = 11$
7. $x + y - 7 = 0$
8. $-9x + 6y = -18$
9. $8x + 4y = -16$

10. $3x-5y-8=0$

11. $-\frac{2}{3}y+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{6}$

12. $\frac{8}{9}y+\frac{5}{3}x-12=0$

13. $5x-y=-2$

14. $x+3y-9=0$

15. $2x-\frac{1}{2}y+7=0$

16. $2y-3x-1=0$

17. $\frac{4}{5}x+y+2=0$

18. $6y-4x-3=0$

Encuentra la intersección de cada recta con el eje X.

19. $x-y-5=0$

20. $x+y-11=0$

21. $x-2y+3=0$

22. $x+5y+5=0$

23. $\frac{3}{5}x-y+\frac{1}{2}=0$

24. $3x+y-2=0$

25. $4x-3y-1=0$

26. $5x+7y+14=0$

27. $2x-20y=5$

28. $5x+6y-12=0$

29. $12x-3y+8=0$

30. $2x+5y-10=0$

31. $7x-3y+6=0$

32. $2x+y-7=0$

33. $-3x+5y+15=0$

34. $5x+8y=6$

35. $4x+7y-28=0$

36. $-11x+6y-3=0$

37. $\frac{3}{4}x+5y-12=0$

38. $3x-\frac{5}{3}y+8=0$

39. $\frac{1}{6}x+\frac{2}{9}y-\frac{1}{3}=0$

5.5 Resolución de problemas

Para resolver un problema podemos seguir el siguiente esquema de razonamiento:

Paso 1 Leer el problema e identificar la incógnita que debemos encontrar.

Paso 2 Encontrar las relaciones entre esta incógnita y los otros datos del problema.

Paso 3 Plantear ecuaciones que representen las relaciones anteriores.

Paso 4 Resolver las ecuaciones para encontrar el valor de la incógnita.

Paso 5 Comprobar los resultados. Ver si la respuesta es razonable.

EJEMPLOS

1. Ricardo y su papá pesan 85 kg en total. El papá pesa 5 kg más que el triple del peso de Ricardo. ¿Cuánto pesa Ricardo?

Solución:

Paso 1 Leer el problema e identificar la incógnita que debemos encontrar.

El dato buscado es el peso de Ricardo.

Llamemos r al peso de Ricardo.

Paso 2 Encontrar las relaciones entre esta incógnita y los otros datos del problema.

a) El peso del papá es 5 kg más 3 veces el peso de Ricardo.

b) La suma de los dos pesos es 85 kg.

Paso 3 Plantear ecuaciones que representen las relaciones anteriores.

De (a) obtenemos: el peso del papá es $5+3r$.

De (b) y de la anterior: la suma de los pesos es $r+(5+3r)=85$.

Paso 4 Resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.

$$\begin{aligned} r+(5+3r) &= 85 \\ 4r+5 &= 85 \\ 4r &= 85-5 \\ r &= \frac{80}{4} = 20. \end{aligned}$$

Paso 5 Comprobar los resultados. Ver si la respuesta es razonable.

Si Ricardo pesa 20 kg, su papá pesa

$$5+(3(20)) = 65 \text{ kg}$$

y entre ambos pesan,

$$20+65 = 85 \text{ kg.}$$

2. La base de un rectángulo es $2\frac{1}{3}$ de la altura. El perímetro es 50 cm. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

Solución:

Paso 1 Debemos encontrar la altura del rectángulo.

Llamemos a a la altura del rectángulo.

Paso 2 La base del rectángulo es $2\frac{1}{3}$ de la altura.

El perímetro del rectángulo es 2 veces la suma de la base y la altura.

Paso 3 La base es $2\frac{1}{3}a$.

El perímetro es:

$$2\left(a+2\tfrac{1}{3}a\right) = 50.$$

Paso 4

$$\begin{aligned} 2\left(a+2\tfrac{1}{3}a\right) &= 50 \\ \left(a+\frac{7}{3}a\right) &= 25 \\ \frac{10}{3}a &= 25 \\ a &= \frac{25\times 3}{10} = 7.5. \end{aligned}$$

La altura del rectángulo es de 7.5 cm.

Paso 5 Si la altura mide 7.5 cm, la base mide $2\frac{1}{3}(7.5) = 17.5$ cm.

Entonces el perímetro mide:

$$2(7.5+17.5) = 50 \text{ cm,}$$

así que está bien resuelto el problema.

A veces nos encontramos con situaciones "extrañas" al tratar de resolver ecuaciones; veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1. Miguel tiene \$75 en el banco y ahorra \$5 a la semana; Carmen tiene \$96 y ahorra \$5 a la semana. ¿Cuándo tendrán la misma cantidad de dinero ahorrada?

   Solución: Si s representa el número de semanas transcurridas, entonces en s semanas Miguel tendrá:

   $$75+5s$$

   y Carmen tendrá

   $$96+5s.$$

   Si igualamos estas cantidades, obtenemos:

   $$75+5s=96+5s$$

   y al pasar los términos que tienen s de un lado de la ecuación obtenemos:

   $$75=96,$$

   lo cual es falso. Esto significa que el problema no tiene solución, es decir, Miguel y Carmen nunca tendrán la misma cantidad de dinero.

2. El padre tiene 51 años y el hijo tiene 9 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad del padre será 8 veces la edad del hijo?

   Solución: Si x representa el número de años que deben transcurrir.
   Al cabo de x años el padre tendrá: $x+51$.
   Al cabo de x años el hijo tendrá: $x+9$.
   Entonces tenemos la siguiente ecuación:

   $$(x+51)=8(x+9).$$

   Resolviendo la ecuación:

   $$\begin{aligned}(x+51)&=8(x+9)\\ 51-72&=8x-x\\ -\frac{21}{7}&=x\\ -3&=x.\end{aligned}$$

   Esto significa que hace 3 años el padre tenía 8 veces la edad del hijo; es decir, la igualdad se cumplió cuando el padre tenía 48 años y el hijo 6.

   Comprobación: Hace 3 años el padre tenía 48 años y el hijo 6 años; es decir,

   $$6\times 8=48.$$

   Al leer el enunciado del problema esperamos que la solución sea un número positivo, lo cual significaría que la situación planteada se cumpliría en el

futuro; sin embargo, esto no sucede y el resultado es negativo. Interpretamos el signo negativo como algo que sucedió en el pasado.

3. Resolver $8y-9+4(3y+1)=3(1+6y)+2y$.

Solución:

$$\begin{aligned} 8y-9+4(3y+1) &= 3(1+6y)+2y \\ 8y-9+12y+4 &= 3+18y+2y \\ 20y-5 &= 3+20y \\ -5 &= 3, \end{aligned}$$

lo cual es falso. Por tanto, esta ecuación no tiene solución.

4. Resolver $\frac{1}{2}(4z+3)-5=2(z-1)-\frac{3}{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(4z+3)-5 &= 2(z-1)-\frac{3}{2} \\ 2z+\frac{3}{2}-5 &= 2z-2-\frac{3}{2} \\ 2z-\frac{7}{2} &= 2z-\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Observa que tenemos la misma expresión de ambos lados de la igualdad, por lo que la igualdad se satisface para cualquier valor de z.

Una ecuación que es cierta para cualquier valor de la variable se llama *identidad*. La ecuación inicial del ejemplo anterior es una identidad.

5.5.1 Ejercicios

Determina si cada una de las siguientes ecuaciones es una identidad, no tiene solución, o bien, tiene solución sin ser una identidad.

1. $5(y+6)-10=5(y+4)$
2. $4(2y+8)=5(3y-2)$
3. $8-7(4-w)=10w-(3w-5)$
4. $2(3t-5)=6(t+2)-2$
5. $6x(5-x)+9=2x(10-3x)-11$
6. $5(2z-3)-z=3(3z-1)+15$
7. $19-5(1-t)=9t+2(7-2t)$
8. $18x+4x(2x-4)=2(4x^2-x)+20x$
9. $9(2-\frac{w}{3})-6=9-12(\frac{w}{4}-\frac{1}{3})$
10. $8(4w-1)-6w=7-9(1-2w)$
11. $3(5z-3)+z=4(4z-2)-1$
12. $3(3x-11)+7=2(3x-19)-x$
13. $8t(t-1)-6(t^2-1)=2t(t-4)$
14. $z+9-4z(2z-2)=9(z+1)-8z^2$
15. $5y(1-y)+2(y^2-3)=3(2-y^2)+y$
16. $10x^2-6x=5x(2x-3)+9x$
17. $\frac{1}{z-1}+\frac{3}{z-1}=\frac{2}{z-1}$
18. $\frac{7}{x+2}-\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x+2}$
19. $\frac{3}{x}-\frac{1}{5}=\frac{1}{x}+1$
20. $\frac{2}{w-3}-\frac{3}{5}=1-\frac{2(4w-17)}{5(w-3)}$

En los ejercicios 21 a 26, despeja h de cada una de las fórmulas geométricas.

21. Área de un triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$.
22. Área de un trapecio: $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$.
23. Área total del cilindro: $A = 2\pi r(r + h)$.
24. Área total de una pirámide con base cuadrada: $A = b^2 + 2bh$.
25. Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$.
26. Volumen de un cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
27. La edad de Nicolás es $\frac{1}{3}$ de la edad de Juan. Si la suma de las edades de ambos es 32, ¿qué edad tiene cada uno?
28. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 6 cm más que la base. El perímetro del triángulo mide 48 cm. Encuentra la longitud de cada lado del triángulo.
29. Antonio le pregunta a su abuelo su edad. El abuelo le contesta: "si a los años que tengo se suma el triple de los años que tenía el año pasado, se obtiene el triple de los años que tengo, menos 3". ¿Qué edad tiene el abuelo de Antonio?
30. El largo de un rectángulo es 5 veces su ancho. Si el perímetro mide 90 metros, ¿cuánto mide cada lado?
31. El área de un triángulo isósceles es 48 km². Si su altura mide 8 km, ¿cuánto mide la base?¿Cuánto mide el perímetro del triángulo?
32. El área de un trapecio es de 88 cm². Una de sus bases mide 7 metros y tiene una altura de 8 metros. Encuentra la longitud de la otra base (ver el ejercicio 22).
33. El área de un triángulo es de 87.5 cm². Tiene una altura de 10 cm. Encuentra la longitud de la base.
34. El área de un trapecio es de 161 cm². Sus bases miden 19 y 9 cm. Encuentra la altura.

5.6 Problemas con números enteros

El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de sus lados.

Los lados de un triángulo miden tres enteros consecutivos. Si su perímetro mide 24 metros,¿cuánto mide cada lado?

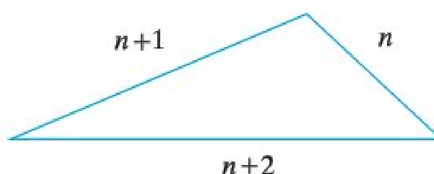


Figura 5.16

Solución: Llamemos n a la longitud del más pequeño de los lados; entonces, los otros dos lados miden $n + 1$ y $n + 2$.

Como el perímetro es la suma de los tres lados, tenemos

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 24.$$

Resolvemos la ecuación,

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) &= 24 \\ 3n + 3 &= 24 \\ 3n &= 24 - 3 \\ n &= \frac{21}{3} = 7. \end{aligned}$$

El lado menor mide 7 metros, y los otros dos miden 8 y 9 metros, respectivamente.

Comprobación: Si los lados del triángulo miden 7, 8 y 9 metros, entonces el perímetro mide

$$7 + 8 + 9 = 24 \text{ metros.}$$

EJEMPLOS

1. Encontrar dos números impares consecutivos cuya suma sea -40.

Solución: Los números pares son de la forma $2n$, y los números impares son de la forma $2n+1$, donde n es cualquier entero.
Si llamamos $2n+1$ al primero de los enteros buscados, el otro es $(2n+1)+2=2n+3$.
Queremos que la suma de ellos sea -40.

$$(2n+1)+(2n+3)=-40.$$

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned}(2n+1)+(2n+3)&=-40\\ 4n+4&=-40\\ 4n&=-40-4\\ n&=\frac{-44}{4}=-11\end{aligned}$$

así que los números buscados son $2(-11)+1=-21$ y $2(-11)+3=-19$.

Comprobación:

-21 y -19 son números enteros impares consecutivos y

$$-21-19=-40.$$

2. Encontrar dos números pares consecutivos cuya suma sea 16.

Solución: Si $2n$ es uno de los enteros pares buscados, el otro es $2n+2$. Queremos que la suma de ellos sea 16, así que planteamos la ecuación:

$$2n+(2n+2)=16.$$

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned}2n+(2n+2)&=16\\ 4n+2&=16\\ 4n&=14\\ n&=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Como $n=\frac{7}{2}$ no es entero, el problema no tiene solución; es decir, no hay dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 16.

5.6.1 Ejercicios

1. La suma de dos números enteros consecutivos es 13. Encuentra los números.
2. La suma de dos números enteros consecutivos es -17. Encuentra los números.
3. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 34. Encuentra los números.
4. La suma de dos números enteros impares consecutivos es 16. Encuentra los números.
5. Encuentra tres números enteros consecutivos cuya suma sea -45.
6. Encuentra dos números enteros consecutivos cuya suma sea 307.

7. La suma de tres números enteros consecutivos es 101. Encuentra los números.
8. La suma de tres números enteros consecutivos es 75. Encuentra los números.
9. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 26. Encuentra los números.
10. La suma de dos números enteros consecutivos es -15. ¿Cuáles son dichos enteros?
11. La suma de tres números enteros consecutivos es -102. ¿Cuáles son dichos números?
12. Si -3 es el menor de cinco números enteros consecutivos, ¿cuáles son los otros cuatro números?
13. La suma de cuatro números enteros consecutivos es 206. Encuentra los números.
14. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 254. Encuentra dichos números.
15. La suma de cuatro números enteros consecutivos es -10. Encuentra dichos números.
16. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 111. Encuentra dichos números.
17. La suma de tres números enteros pares consecutivos es -90. Encuentra dichos números.
18. El mayor de dos números enteros pares consecutivos es 2 veces el menor de ellos menos 4. Encuentra dichos números.
19. El menor de dos números enteros pares consecutivos es la mitad del mayor de ellos más 9. Encuentra los números.
20. El mayor de dos números enteros impares consecutivos es igual a 14 menos un tercio del menor de ellos. Encuentra dichos números.
21. Tres hermanos nacieron a intervalos de 2 años. Si la suma de sus edades es 54, ¿qué edad tiene cada uno?
22. La suma de tres números enteros pares consecutivos es -98 más el mayor de ellos. Encuentra dichos números.
23. La suma de cuatro números enteros consecutivos es el menor más 219. Encuentra dichos números.
24. Encuentra tres números enteros pares consecutivos tales que el tercero sea igual al cuádruple del segundo menos 10.
25. El mayor de tres números enteros impares consecutivos menos 2 veces el menor es igual a 13 menos 2 veces el de en medio. Encuentra los números.
26. Un medio de la suma de dos números enteros múltiplos de 10 consecutivos es 35. Encuentra estos múltiplos.
27. Un tercio de la suma de tres números enteros múltiplos de 5 consecutivos es 90. Encuentra estos números.
28. Un tercio de la suma de tres números enteros múltiplos de 3 consecutivos es -6. Encuentra estos números.
29. Encuentra tres números enteros impares consecutivos tales que el triple de la suma del primero más el tercero, menos el segundo sea igual al tercero menos 13.
30. Encuentra tres números enteros pares consecutivos tales que el primero menos el segundo sea igual al tercero.
31. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que $\frac{5}{9}$ del mayor sea igual al menor menos 3.
32. El perímetro de un triángulo mide 150 metros y las longitudes de sus lados son tres enteros pares consecutivos. Encuentra las longitudes de sus lados.
33. Los lados de un triángulo rectángulo miden tres enteros impares consecutivos. Si su perímetro mide 39 metros, ¿cuánto mide cada lado?
34. Las longitudes de los lados de un triángulo son enteros impares consecutivos. Encuentra la longitud del lado más corto si es 32 cm menor que el perímetro.
35. La suma de tres enteros consecutivos es igual al menor de ellos más 26. Encuentra dichos números.

5.7 Porcentaje

En las elecciones para la sociedad de alumnos, Juan obtuvo 34% de los votos. Si votaron 850 alumnos, ¿cuántos votaron por él?

Solución: Llamamos x a los alumnos que votaron por Juan. 34% significa 34 de cada 100, así que igualamos las razones

$$\frac{34}{100} = \frac{x}{850} \qquad \frac{\leftarrow \text{alumnos que votaron por él}}{\leftarrow \text{total de alumnos}}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{34}{100} &= \frac{x}{850} \\ 850 \times 0.34 &= x \\ 289 &= x. \end{aligned}$$

Juan recibió 289 votos.

El signo % significa *por cada cien o centésimos.* Un porcentaje puede expresarse como fracción o como decimal. Así, por ejemplo,

$$34\% = \frac{34}{100} = 0.34.$$

Observa, en el ejemplo anterior, que para encontrar el 34% de 850, multiplicamos 850 por 0.34; ésta es la manera más común de obtener la cantidad correspondiente a un porcentaje.

EJEMPLOS

1. Escribir $\frac{3}{4}$ como un porcentaje.

Solución: Llamamos x al porcentaje buscado. Igualamos las razones:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{300}{4} = x$$
$$75 = x.$$

Entonces

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

2. Encontrar el 27% de 79.65.

Solución:

$$79.65 \times 0.27 = 21.5055$$

3. Encontrar el 140% de 63.

Solución:

$$63 \times 1.40 = 88.2$$

4. Una ración de sardinas contiene 19 gramos de proteína y corresponde al 40% de los requerimientos diarios de proteína de un adulto. ¿Cuáles son los requerimientos diarios de proteína de un adulto?

Solución: Llamamos x a la cantidad total de proteína requerida. Igualamos las razones:

$$\frac{40}{100} = \frac{19}{x} \quad \frac{\leftarrow \text{proteína de la sardina}}{\leftarrow \text{total de proteína}}.$$

Resolvemos la ecuación

$$\frac{40}{100}=\frac{19}{x}$$
$$40x=19\times100$$
$$x=\frac{1900}{40}=47.5$$

Los requerimientos diarios de proteína son de 47.5 gramos.

Comprobación: Si $x = 47.5$, entonces:

Lado izquierdo: $\frac{40}{100}=0.40$; lado derecho: $\frac{19}{x}=\frac{19}{47.5}=0.40$.

5. ¿Qué porcentaje de 350 representa 14?

Solución: Llamamos x al porcentaje buscado. Igualamos las razones

$$\frac{x}{100}=\frac{14}{350}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{100}=\frac{14}{350}$$
$$x=\frac{14\times100}{350}=4.$$

14 es el 4% de 350.

Comprobación:

$$350\times0.04=14.$$

6. ¿De qué número es 78 el 65%?

Solución: Llamamos x al número que representa al 100%. Igualamos las razones:

$$\frac{65}{100}=\frac{78}{x}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{65}{100}=\frac{78}{x}$$
$$65x=78(100)$$
$$x=\frac{7800}{65}=120.$$

78 es el 65% de 120.

Comprobación:

$$120\times0.65=78.$$

7. El precio del café aumentó de \$100 a \$120 el kilo. ¿Qué porcentaje aumentó?

Solución: Restamos las dos cantidades para saber la cantidad que aumentó, es decir, \$20. Llamamos x al porcentaje buscado y comparamos la cantidad que aumentó el precio con el precio original

$$\frac{20}{100}=\frac{x}{100}$$
$$\frac{2000}{100}=x$$
$$20=x.$$

Entonces el porcentaje incrementado es 20%.

8. ¿Cuántos litros de una solución ácida al 65% hay que añadir a 21 litros de una disolución ácida al 35% para hacer una solución ácida al 40%?

Solución: Recordemos que si una solución de L litros tiene una concentración de P% de ácido, entonces hay

$$L\times\frac{P}{100}$$

litros de ácido puro en la solución.

Planteamos dos ecuaciones, una para la cantidad de solución y otra para la cantidad de ácido.

Llamamos w a la cantidad de solución añadida.

	Cantidad original	Cantidad añadida	Cantidad final
Solución:	21	w	$21+w$
Ácido:	21 (0.35)	w (0.65)	21 (0.35) + w (0,65)

Como queremos que la disolución final tenga una concentración de 40%, tenemos

$$(21+w)(0.40)=21(0.35)+w(0.65).$$

Resolvemos la ecuación

$$(21+w)(0.40)=21(0.35)+w(0.65)$$
$$8.4+0.4w=7.35+0.65w$$
$$8.4-7.35=0.65w-0.4w$$
$$1.05=0.25w$$
$$\frac{1.05}{0.25}=w$$
$$4.2=w.$$

Entonces hay que añadir 4.2 litros de solución ácida.

Comprobación: Si $w=4.2$, entonces:

Lado izquierdo: $(21+w)(0.40)=(21+4.2)(0.40)=10.08.$
Lado derecho: $21(0.35)+w(0.65)=7.35+(4.2)(0.65)=7.35+2.73=10.08.$

5.7.1 Ejercicios

Escribe las siguientes fracciones como porcentajes.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{5}$
3. 5.8
4. $\frac{1}{4}$
5. 0.07
6. $\frac{3}{20}$
7. $\frac{5}{4}$
8. $\frac{1}{5}$
9. $\frac{7}{8}$
10. $\frac{21}{12}$

Resuelve los siguientes ejercicios.

11. Encuentra el 15% de 134.
12. ¿Qué porcentaje de 225 representa 45?
13. ¿De qué número es 21 el 30%?
14. Encuentra el $42\frac{1}{2}$% de 2450.
15. ¿Qué porcentaje de 70 representa 28?
16. ¿De qué número es 55 el 110%?
17. Encuentra el 20% de 1658.
18. ¿Qué porcentaje de 15 representa 0.9?
19. ¿De qué número es 78 el 150%?
20. Encuentra el 173% de 325.
21. ¿Qué porcentaje de 32 representa 26?
22. ¿Qué porcentaje de 8 representa 12?
23. Encuentra el 12.5% de 63.
24. ¿Qué porcentaje de 150 representa 30?
25. ¿Qué porcentaje de 21 representa 63?
26. Encuentra el 2% de 52.
27. Encuentra el 204% de 4009.
28. ¿De qué número es 47 el 25%?
29. ¿Qué porcentaje de 43 representa 34.83?
30. Encuentra el 40% de 578.
31. ¿De qué número es 14 el 4%?
32. ¿De qué número es 12 el 5%?
33. ¿Qué porcentaje de 75 representa 77.25?
34. ¿De qué número es 86 el 32%?
35. Si se diluyen 250 gramos de azúcar en 5 litros de agua, ¿cuántos litros de agua hay que añadir para que la mezcla contenga 8 gramos de azúcar por litro?
36. Una tienda departamental anuncia que aportará para la construcción de escuelas $3 por cada 150 que venda de cierto artículo. Si la aportación durante el primer mes fue de $1,000 ¿qué cantidad recibió por la venta del artículo mencionado?
37. La sociedad de ex alumnos de una escuela organizó el año pasado una posada a la que asistieron 420 personas. A la posada de este año asistieron 567. ¿En qué porcentaje aumentó la asistencia?
38. ¿Cuántos litros de una solución ácida al 10% hay que añadir a 14 litros de una solución ácida al 40% para hacer una solución ácida al 30%?
39. En 400 ml de leche materna, 52 ml son proteína, grasa y azúcar, y el resto es agua. ¿Qué porcentaje es agua?
40. En 670 m^3 de aire hay 140.7 m^3 de oxígeno. ¿Qué porcentaje del aire es oxígeno?
41. Un capital de $5,000 se invirtió al 12% de interés anual durante un año, y se reinvirtió, junto con los réditos obtenidos, otro año al 14% de interés anual. ¿Cuál es el valor de la inversión al terminar el segundo año?
42. Dos recipientes contienen agua salada, uno al 30% y el otro al 3%. ¿Qué cantidad habrá que tomar de cada uno para obtener 60 ml de agua salada al 12%?
43. Un paquete de galletas muestra en el empaque la lista de ingredientes en la que dice que 7.63% es huevo. Si el paquete pesa 225 gramos, ¿qué cantidad de huevo contiene? Si contiene 13.5 gramos de leche descremada, ¿qué porcentaje de leche contiene?
44. El peso del vapor de agua es el 62.5% del peso del aire. Si 1 litro de vapor de agua pesa 0.80625 gramos, ¿cuánto pesa un litro de aire?
45. El hidrógeno pesa el 6.9% del peso del aire. ¿Qué cantidad de hidrógeno hay en un globo de 150 m^3 de capacidad, si el decímetro cúbico de aire pesa 1.3 gramos?
46. Una tela de 90 cm de ancho encoje 10% de largo y ancho al lavarla. ¿Cuánto debe comprarse para que una vez lavada el área sea de 21.87 m^2?
47. Si el 7% del agua de mar es sal, ¿cuántos gramos de agua hay que evaporar para obtener un kilo de sal?
48. Una inversión inicial de $7,400 se convirtió en $9,000 al cabo de un año. ¿Cuál era la tasa de interés a la que estuvo invertida?
49. Si se combinan una onza troy de plata y una onza de plata libertad, ¿qué ley tendrá la mezcla, si se sabe que la onza troy tiene ley 0.925 y la onza libertad tiene ley 0.999? La ley indica el porcentaje de plata pura que contiene la moneda. Por ejemplo, en una onza troy el 92.5% es plata pura.
50. Al llegar a la tienda, Lucía observa que su perfume favorito tiene una etiqueta que dice: Precio $165, 10% de descuento más IVA.
    a. ¿Cuánto debe pagarse por el perfume?
    b. Si el precio normal es $165 más IVA, ¿cuánto ahorrará si decide comprarlo?
51. Un terreno de 160,000 m^2 está sembrado de trigo, avena y sorgo. El 60% está sembrado de trigo, el 25% de avena y el resto de sorgo. ¿Cuántos metros cuadrados están sembrados de cada cereal?

5.8 Desigualdades

Reinaldo obtuvo como calificaciones en los primeros cuatro exámenes: 7.1, 8.4, 8.8 y 9.5. Sólo falta efectuar un examen y para aprobar el curso sin presentar el examen final, es necesario que el promedio de los cinco exámenes sea mayor o igual que 8. ¿Cuál es la menor calificación que debe obtener Reinaldo en el quinto examen para quedar exento?

Solución: Llamamos w a la calificación que falta. El promedio de todas las calificaciones es:

$$\frac{7.1+8.4+8.8+9.5+w}{5}.$$

Dicho promedio debe ser mayor o igual que 8, así que escribimos la desigualdad

$$\frac{33.8+w}{5} \geq 8.$$

Para resolverla multiplicamos por 5 ambos miembros y obtenemos:

$$5\left(\frac{33.8+w}{5}\right) \geq 5(8)$$
$$33.8+w \geq 40.$$

Sumamos -33.8 a ambos lados de la desigualdad.

$$-33.8+33.8+w \geq -33.8+40$$
$$w \geq 6.2.$$

En el quinto examen, Reinaldo debe obtener por lo menos 6.2 de calificación.

- $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c < b+c.$
- $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc.$
- $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc.$

Una desigualdad en la que aparecen variables también se conoce como *inecuación.* Como en el caso de las igualdades, la expresión que aparece a la izquierda del símbolo de desigualdad se llama primer miembro, y la que aparece a la derecha, segundo miembro.

Resolver una desigualdad algebraica significa encontrar los valores numéricos que, cuando sustituyen a las variables, la hacen cierta.

Para manipular desigualdades algebraicas utilizamos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, así como las de orden.

Ejemplos

1. Resolver la desigualdad $5z-9<-12$.

Solución: Sumamos 9, en ambos lados de la desigualdad:

$$5z-9<-12$$
$$5z-9+9<-12+9$$
$$5z<-3.$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la desigualdad resultante por $\frac{1}{5}$, que por ser positivo no altera el sentido de la desigualdad:

$$5z<-3$$
$$\frac{1}{5}(5z)<\frac{1}{5}(-3)$$
$$z<-\frac{3}{5}.$$

Por tanto, la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que $-\frac{3}{5}$; es decir, $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right)$.

2. Resolver la desigualdad $-4y + 7 > 23$.

Solución: Sumamos -7 en ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{aligned} -4y + 7 &> 23 \\ -4y + 7 - 7 &> 23 - 7 \\ -4y &> 16. \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la desigualdad resultante por $-\frac{1}{4}$, que por ser negativo invierte el sentido de la desigualdad:

$$\begin{aligned} -4y &> 16 \\ -\frac{1}{4}(-4y) &< -\frac{1}{4}(16) \\ y &< -4. \end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad se cumple para cualquier número real menor que -4; es decir, $y \in (-\infty, -4)$.

Consecuencias de las propiedades de orden

Para despejar la variable de la desigualdad $x - 8 < 13$ seguimos los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} x - 8 &< 13 && \leftarrow \text{Queremos despejar } x. \\ x - 8 + 8 &< 13 + 8 && \leftarrow \text{Sumamos el opuesto de } -8\text{; es decir, } 8. \\ x &< 21 && \leftarrow \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

En el primer renglón, el 8 está restando en el lado izquierdo y en el segundo renglón lo vemos sumando en el lado derecho.

En general, si un término está restando de un lado de una desigualdad,

$$a - b < c,$$

al sumar su opuesto de ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} a - b &< c \\ a - b + b &< c + b \\ a &< c + b. \end{aligned}$$

Es decir, el término "pasa al otro lado de la desigualdad" sumando. Así:

Si $a - b < c$, entonces $a < c + b$.

Similarmente, si un término está sumando de un lado de la desigualdad,

$$a + b < c,$$

al sumar su opuesto de ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} a + b &< c \\ a + b - b &< c - b \\ a &< c - b. \end{aligned}$$

Es decir, el término “pasa al otro lado de la desigualdad” restando. Así:

Si $a+b<c$, entonces $a<c-b$.

Para despejar la variable de la desigualdad $6y<7$ seguimos los siguientes pasos:

$6y<7$ ← Queremos despejar y

$\left(\frac{1}{6}\right)6y<\left(\frac{1}{6}\right)7$ ← Multiplicamos por $\frac{1}{6}$, que es el recíproco de 6, y como es positivo, la desigualdad no se altera

$y<\frac{7}{6}$ ← Simplificamos.

En el primer renglón, el 6 está multiplicando del lado izquierdo y en el segundo renglón lo vemos dividiendo del lado derecho.

En general, si un término positivo está multiplicando de un lado de una desigualdad

$$ab<c,$$

entonces al multiplicar por su recíproco de ambos lados de la desigualdad y simplificar:

$$ab<c$$
$$ab\left(\frac{1}{b}\right)<c\left(\frac{1}{b}\right)$$
$$a<\frac{c}{b},$$

el término “pasa al otro lado de la desigualdad” dividiendo. Por tanto,

Si $ab<c$ y $b>0$, entonces $a<\frac{c}{b}$.

De manera similar, si un término positivo está dividiendo en un lado de la desigualdad,

$$\frac{a}{b}<c$$

al multiplicar por él, ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\frac{a}{b}<c$$
$$\frac{a}{b}(b)<c(b)$$
$$a<cb.$$

El término “pasa al otro lado de la desigualdad” multiplicando. Por tanto,

Si $\frac{a}{b}<c$ y $b>0$, entonces $a<cb$.

Si tenemos la desigualdad,

$$ab<c$$

y $b < 0$, entonces al multiplicar por el recíproco, la desigualdad cambia de sentido, por lo que,

$$\text{Si } ab < c \text{ y } b < 0, \text{ entonces } a > \frac{c}{b}.$$

Es decir, el término "pasa al otro lado de la desigualdad" dividiendo y cambia el sentido de la desigualdad.

De la misma manera,

$$\text{Si } \frac{a}{b} < c \text{ y } b < 0, \text{ entonces } a > bc.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $\frac{7}{9}x - 5 > -2$.

Solución: Despejamos x:

$$\frac{7}{9}x - 5 > -2$$

$$\frac{7}{9}x > -2 + 5 \quad \leftarrow \quad \text{(El 5 "pasa" sumando)}$$

$$\frac{7}{9}x > 3 \quad \leftarrow \quad \text{(Simplificamos)}$$

$$x > \frac{9}{7}(3) \quad \leftarrow \quad \text{(El 9 "pasa" multiplicando, y el 7 "pasa" dividiendo sin cambiar el sentido de la desigualdad)}$$

$$x > \frac{27}{7} \quad \leftarrow \quad \text{(Simplificamos).}$$

De donde $x \in \left(\frac{27}{7}, \infty\right)$.

2. Resolver $3 < 6t < 10$.

Solución: Despejamos t:

$$3 < 6t < 10$$

$$\frac{3}{6} < t < \frac{10}{6}$$

$$\frac{1}{2} < t < \frac{5}{3}$$

de donde $t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$.

3. Resolver $8 + 5z \le 3z - 7 \le z + 1$.

Solución: Tenemos que resolver dos desigualdades:

$$8 + 5z \le 3z - 7 \quad \text{y} \quad 3z - 7 \le z + 1.$$

Es decir,

$$8 + 5z \le 3z - 7$$

$$5z - 3z \le -7 - 8$$

$$2z \le -15$$

$$3z - 7 \le z + 1$$

$$3z - z \le 1 + 7$$

$$z \le -\frac{15}{2} \qquad \text{y} \qquad 2z \le 8$$
$$z \le 4$$
$$z \in \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right] \qquad z \in (-\infty, 4]$$

de donde

$$z \in \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right] \cap (-\infty, 4]$$

es decir,

$$z \in \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$$

Al multiplicar por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

4. Resolver $5.5 + w < 6.7 - 2w \le 7.3$.

Solución: Tenemos que resolver dos desigualdades:

$$5.5 + w < 6.7 - 2w \quad \text{y} \quad 6.7 - 2w \le 7.3$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 5.5 + w &< 6.7 - 2w & \qquad 6.7 - 2w &\le 7.3 \\ 5.5 - 6.7 &< -2w - w & -2w &\le 7.3 - 6.7 \\ -1.2 &< -3w & -2w &\le 0.6 \\ \frac{1.2}{3} &> w & \text{y} \qquad w &\ge -\frac{0.6}{2} \\ 0.4 &> w & w &\ge -0.3 \\ w &\in (-\infty, 0.4) & w &\in [-0.3, \infty) \end{aligned}$$

de donde $w \in (-\infty, 0.4)$ y $w \in [-0.3, \infty)$, es decir,

$$w \in (-\infty, 0.4) \cap [-0.3, \infty) = [-0.3, 0.4)$$

5. La suma de dos números enteros pares consecutivos y positivos es a lo más 24. Encuentra dichos números.

Solución: Llamamos $2n$ y $2n+2$ a los enteros pares consecutivos. Planteamos la desigualdad:

$$2n + (2n+2) \le 24.$$

Ahora la resolvemos:

$$\begin{aligned} 2n + (2n+2) &\le 24 \\ 4n &\le 22 \\ n &\le \frac{22}{4} \\ n &\le \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Así, $n = 1, 2, 3, 4$ o 5, y entonces los números que satisfacen la desigualdad son:

$2n$	$2n+2$
2	4
4	6
6	8
8	10
10	12

5.8.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 51, resuelve las desigualdades.

1. $5y < 2$
2. $-4a < 6$
3. $z - 9 < 1$
4. $y + 4 > 4$
5. $8x \geq -16$
6. $-3z \leq -9$
7. $w + 7 \leq -2$
8. $-\frac{w}{4} + 24 > 29$
9. $-2z - 10 \geq 12$
10. $5y - 8 > 25$
11. $\frac{7}{5}x - 3 < -2$
12. $8 - 1.5a \leq 2$
13. $5y + 5 > 0$
14. $11w - 6 < 8$
15. $9c + 5 \geq -13$
16. $3.4x + 2.2 > 6.8$
17. $-6x - 1 > 11$
18. $\frac{4}{3}y + 3 \geq -\frac{5}{6}$
19. $-\frac{11}{6}t + \frac{2}{3} > -\frac{4}{3}$
20. $\frac{5 - 2a}{7} \leq \frac{3}{2}$
21. $\frac{3z - 4}{8} \leq \frac{3}{10}$
22. $6 - 7a > 3 + 2a$
23. $t + 9 > 5t - 1$
24. $3z + 7 > 2z - 3$
25. $2 - x < 6x + 2$
26. $7w + 1 \geq 1 - 7w$
27. $5b - 4 < 10 - 2b$
28. $3c - 7 \geq \frac{3 - 2c}{5}$
29. $\frac{8a + 11}{2} \leq \frac{7 - 2a}{-3}$
30. $\frac{5x - 11}{-2} > \frac{3x - 5}{4}$
31. $x - 4 \geq 6x - 5(x + 1)$
32. $7(x - 4) \leq 8(x + 3)$
33. $2(r - 5) - 8 \leq 7 - 3(r + 2)$
34. $1 < 8a < 12$
35. $12 < -6t < 24$
36. $-9 \leq 2b \leq -2$
37. $-1 < -4s < 1$
38. $-5 < 3x < 11$
39. $8 > 5r > 3$
40. $-6 < 7z - 9 < -4$
41. $-7 < 3y + 5 < 5$
42. $15 < 8 - 3t < 25$
43. $5x - 1 < 7x + 8 < 20$
44. $5 < 2w + 6 < 11$
45. $-13 \leq 6 - 7c \leq -4$
46. $-4.5 < 1.5 - 2s \leq 6$
47. $-2z \leq 3z - 7 < 1 - 4z$
48. $12w + 4 < 1 - 9w < 6w + 7$
49. $2.3a - 1 \leq 4.2a + 5 \leq 3.5a$
50. $19 - 4y < 10y + 3 < 9 - 14y$
51. $6 - 1.2b \leq 3 - 7.3b \leq 1 + 5.1b$

52. Un cartero parte de la oficina postal llevando en su bolsa cierto número de sobres. Al mediodía ha repartido 134 sobres y en su bolsa restan menos de 38 sobres por repartir. ¿Cuál es el mayor número de sobres con los que pudo haber salido de la oficina?

53. Encuentra todos los números enteros mayores que cero en los que el triple del número menos 6 sea menor o igual que el número aumentado en 6 unidades.

54. Chucho recibe $5 todos los domingos desde hace aproximadamente un año. Un domingo le dice a su papá: "Necesito que me aumentes el domingo; el monto será suficiente si tres medios de la cantidad más $5 es mayor o igual que $20". ¿Cuánto quiere recibir Chucho semanalmente?

55. Gustavo trabaja en una empresa comercial repartiendo notificaciones a los clientes que no realizan sus pagos oportunamente. Para mantener su trabajo, debe entregar por lo menos 125 notificaciones durante los seis días de la semana. Si entrega 20 el lunes, 11 el martes, 19 el miércoles, 23 el jueves y 18 el viernes, ¿cuál es el menor número de notificaciones que debe entregar el sábado para no perder su empleo?

56. A la 1 de la tarde la temperatura alcanzó 32 °C, pero se estima que en las siguientes 5 horas bajará por lo menos 14 °C. ¿Qué temperatura máxima se espera para las 6 de la tarde?

57. El interés que ofrece un banco es de 2% mensual. ¿Qué cantidad debe invertirse para que al cabo de un mes se tenga una cantidad de por lo menos $2550?

El valor absoluto $|x-y|$ de la diferencia de dos números x y y mide en cuánto difieren dichos números.

5.9 Desigualdades y valor absoluto

En una fábrica de cuadernos se forma una comisión de control de calidad, pues en una encuesta se detectó que los consumidores opinan que el papel es bueno, pero el tamaño de los cuadernos no es uniforme: unos son más anchos que otros. El ancho requerido es de 21.5 cm, y un cuaderno pasará el control de calidad si el error es de, a lo más, 0.04 cm. ¿Qué anchos pueden tener los cuadernos que hayan aprobado el control de calidad?

Solución: Llamamos x al ancho de un cuaderno. El defecto en el ancho del cuaderno es la diferencia:

$$x-21.5.$$

Como el cuaderno puede ser más ancho o más angosto, entonces consideramos el valor absoluto de la diferencia anterior. Dicho error puede ser de, a lo más, 0.04 cm, es decir,

$$|x-21.5| \leq 0.04.$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Para resolver esta ecuación primero quitamos el valor absoluto:

$$|x-21.5| = \begin{cases} x-21.5 & \text{si} \quad x-21.5 \geq 0 \\ -(x-21.5) & \text{si} \quad x-21.5 < 0. \end{cases}$$

Ahora resolvemos las desigualdades:
Si $x-21.5 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |x-21.5| &\leq 0.04 \\ x-21.5 &\leq 0.04 \\ x &\leq 0.04+21.5 \\ x &\leq 21.54. \end{aligned}$$

Si $x-21.5 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} |x-21.5| &\leq 0.04 \\ -(x-21.5) &\leq 0.04 \\ x-21.5 &\geq -0.04 \\ x &\geq -0.04+21.5 \\ x &\geq 21.46. \end{aligned}$$

Un cuaderno pasa el control de calidad si su ancho está entre 21.46 y 21.54 cm.

Propiedades del valor absoluto

1. Si $|x| < k$ y $k > 0$ entonces $-k < x < k$. Observa en la siguiente figura, que los puntos que satisfacen que su distancia al origen es menor que k son los que se encuentran a la derecha de $-k$ y a la izquierda de k.



Figura 5.17

2. Si $|x| > k$ entonces $x > k$ o $x < -k$. Los puntos cuya distancia al origen es mayor que k son los que están a la derecha de k o bien los que se encuentran a la izquierda de $-k$.

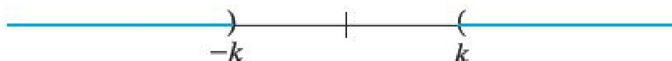


Figura 5.18

EJEMPLOS

> $|a| < b \Leftrightarrow b > 0$ y $-b < a < b$

1. Resolver $|5w-2| < 5$.

Solución: Utilizando una de las propiedades del valor absoluto tenemos, por ser 5 un número positivo, que:

$$\begin{aligned} -5 &< 5w-2 < 5 \\ 2-5 &< 5w < 5+2 \\ -3 &< 5w < 7 \\ -\tfrac{3}{5} &< w < \tfrac{7}{5}, \end{aligned}$$

es decir, $w \in \left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

2. Resolver $|3y+2| \le y+4$.

Solución:

- Si $y+4 < 0$, entonces no hay solución.
- Si $y+4 \ge 0$, entonces $y \ge -4$, es decir, $y \in [-4, \infty)$ y:

$$\begin{aligned} -(y+4) &\le 3y+2 & \quad\text{y}\quad 3y+2 &\le y+4 \\ -y-4 &\le 3y+2 & 3y-y &\le 4-2 \\ -2-4 &\le 3y+y & 2y &\le 2 \\ -\tfrac{6}{4} &\le y & y &\le \tfrac{2}{2} \\ -\tfrac{3}{2} &\le y & y &\le 1. \end{aligned}$$

Así, para que y sea solución, tiene que cumplir que:

$$y \ge -4 \text{ y } -\frac{3}{2} \le y \le 1.$$

Observamos que si y satisface que $-\frac{3}{2} \le y \le 1$, entonces también satisface que $y \ge -4$. Así, todas las soluciones de la desigualdad son $-\frac{3}{2} \le y \le 1$, es decir, $y \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$.

$|a| > b \Leftrightarrow a > b$ o $ac - b$

3. Resolver $|6x-5| > 4x+7$. y

Solución: Utilizando la propiedad[2] del valor absoluto, tenemos:

$$\begin{aligned} 6x-5 &> 4x+7 \\ 6x-4x &> 7+5 \\ 2x &> 12 \\ x &> 6 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 6x-5 &< -(4x+7) \\ 6x-5 &< -4x-7 \\ 6x+4x &< -7+5 \\ x &< -\tfrac{1}{5}. \end{aligned}$$

Así, x es solución si satisface que $x > 6$ o $x < -\frac{1}{5}$; es decir, $x \in (6,\infty) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$.

4. Resolver $|5b-2| < 2b-1$.

Solución:

- Si $2b-1 \le 0$, entonces no hay solución, ya que $|5b-2|$ es siempre mayor o igual que 0.
- Si $2b-1 > 0$, entonces $b > \frac{1}{2}$; es decir, $b \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y:

$$\begin{aligned} -(2b-1) &< 5b-2 \\ -2b+1 &< 5b-2 \\ 1+2 &< 5b+2b \\ 3 &< 7b \\ \frac{3}{7} &< b \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 5b-2 &< 2b-1 \\ 5b-2b &< 2-1 \\ 3b &< 1 \\ b &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Así, para que b sea solución, tiene que cumplir que:

$$\frac{3}{7} < b \quad \text{y} \quad b < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad b > \frac{1}{2}$$

Pero

$$\frac{3}{7} > \frac{1}{3},$$

así que no existe un real b que satisfaga $\frac{3}{7} < b < \frac{1}{3}$ y, por tanto, la desigualdad no tiene solución.

5.9.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 36, resuelve las desigualdades.

1. $|x-10| < 6$
2. $|w-9| < 3$
3. $|z+12| \le 8$
4. $|2-w| \ge 6$
5. $|x-13| < 2.5$
6. $|y+3| > 2$
7. $|z+4| > 9$
8. $|y+1| > 6$
9. $|3a+7| \ge 9$
10. $|6-4r| \le 8$
11. $|3z-(-4)| < 6$
12. $|4-5y| \ge 7$
13. $|b-4| < 10$
14. $|3y-1| \le 1$
15. $|6x-11| \le 5$
16. $|8y-4| > 10$
17. $|4z+1| < 2$
18. $|1-9x| \ge 1$
19. $|6-10z| > \frac{8}{5}$
20. $|3-w| < 2w+1$
21. $|8r-1| < 3r+2$
22. $|3z+5| > 2z-3$
23. $|5y+7| < 2-y$
24. $|2t+8| > t+1$
25. $|2y+9| \ge y+3$
26. $|6-10w| \le 2-5w$
27. $\left|7x+\frac{3}{7}\right| < \frac{2}{7}$
28. $|10z-2| < 2z-1$
29. $|6w+4| < 8w-3$
30. $|12+4x| > x+8$
31. $|6w-5| < 4w-3$
32. $\left|\frac{2}{5}z-1\right| < \frac{5}{2}z$
33. $|3x-5| < x-2$
34. $|7y-1| \ge 4y+3$
35. $\left|\frac{1}{2}w+6\right| \ge \frac{3}{2}w-8$
36. $\left|\frac{5}{4}x-1\right| < x+6$

37. Encuentra todos los números enteros cuya distancia al 5 sea menor o igual que 2.

38. El valor absoluto de la suma de dos números enteros consecutivos es menor o igual a 3. Encuentra los números.

39. El dueño de una fábrica debe entregar a uno de sus compradores 1,700 tubos metálicos cuyo costo de fabricación es de $3.75 cada uno. Cada tubo será vendido en $4.10. Como únicamente tiene 1,200 piezas listas para entregar, decide comprar las piezas faltantes a otra fábrica, que se las ofrece a $3.75 cada una. Al recibir los tubos, observa que no todos tienen el mismo tamaño. Habla con el comprador y le explica la falla; este último dice: "Le solicité que cada uno midiera 17 cm, pero si la diferencia no excede 3 mm, está bien". ¿Qué medida pueden tener los tubos? ¿Cuál será la ganancia si entrega los 1,700 tubos?

40. Encuentra todos los números cuya distancia al -1725 es 17.

41. Un enfermo pregunta por la ubicación de una farmacia en la tienda de abarrotes, a lo que el dependiente le dice: "La peluquería está a 300 metros a la derecha de aquí y la distancia entre la peluquería y la farmacia es de 200 metros". ¿Cuál es la distancia entre la tienda de abarrotes y la farmacia?

42. Se pide a Julián y Pablo que cada uno escriba su estatura en una tarjeta. Las tarjetas se revuelven y al destaparlas una dice 1.63 metros y la otra dice x. Si se sabe que Pablo es más alto y que la diferencia de estaturas es de 7 cm, ¿cuál es la estatura de cada uno?

43. Sofía pide a Ramón que se encargue de vender el sillón de la sala que ya no ocupará y le dice: "Aunque creo que su valor es mayor, creo que un precio justo sería $900 . Ponle el precio que consideres, después llega a un acuerdo de tal manera que la diferencia entre el precio en el que lo vendas y el que yo te sugiero no sea mayor a $36". ¿En cuánto debe vender Ramón el sillón?

44. Deseaba comprar un cortinero de 2.70 metros de largo para la ventana de la sala que mide 2.50 metros. Al llegar a la tienda encontré que la diferencia de medidas entre los cortineros que tenían y la que yo quería era mayor que un 15%. ¿Cuáles eran las medidas de los cortineros que ahí vendían?

45. Dos números reales difieren en menos de 3.7679. Si uno de ellos es 3.7680, ¿cuál es el otro?

46. El costo de cierto artículo se modificó en $15. No se sabe si el precio aumentó o disminuyó, pero se sabe que uno de los precios es $1,576. ¿Cuál es el precio anterior y cuál es el actual?

5.10 Desigualdades y recta

Recuerda que en la sección 5.4.3 de este capítulo vimos que una ecuación del tipo $y = ax + b$ representa la ecuación de una recta.

Dos personas están en un valle atravesado por un río. Es claro que las dos personas están del mismo lado del río, si pueden caminar una hacia la otra hasta encontrarse sin atravesar el río. Similarmente, dos puntos en el plano están del mismo lado de una recta ℓ, si podemos conectarlos mediante una recta que no corte la recta ℓ.

¿Están los puntos $(3, 12)$ y $(-2, -3)$ del mismo lado o en lados opuestos de la recta $y = 2x + 4$?

Dibujamos la recta $y = 2x + 4$ (véase la figura 5.19).

La gráfica de la recta $y = 2x + 4$ divide al plano en tres regiones:

- Los puntos que están en la recta.
- Los puntos que están arriba de la recta.
- Los puntos que están debajo de la recta.

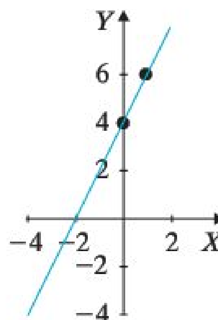


Figura 5.19

Sabemos que los puntos que están en la recta son los que satisfacen la ecuación:

$$y = 2x + 4.$$

El punto $(3,10)$ está en la recta:

$$y = 2x + 4.$$

Todo punto P que esté verticalmente encima de $(3,10)$ tiene por primera coordenada 3 y su segunda es mayor que 10; es decir, la coordenada $(3, y)$ de P satisface:

$$y > 2x + 4.$$

El punto (3, 12) satisface:

$$12 > 2(3) + 4.$$

De la misma manera, si nos movemos verticalmente hacia abajo, la ordenada del punto es cada vez menor; es decir,

$$y < 2x + 4.$$

El punto $(-2, -3)$ satisface

$$-3 < 2(-2) + 4 = 0.$$

Por tanto, los puntos $(3,12)$ y $(-2,-3)$ están en lados opuestos de la recta.

Entonces los puntos que están arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > 2x + 4$.

Los puntos que están abajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < 2x + 4$.

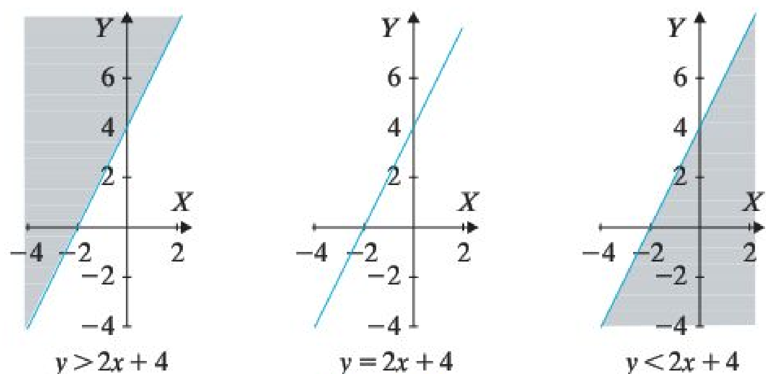


Figura 5.20

La gráfica de una recta $y = mx + b$ divide al plano en tres conjuntos:

- Los puntos que están arriba de la recta, que son los que satisfacen la desigualdad $y > mx + b$.
- Los puntos que están en la recta, que son los que satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
- Los puntos que están abajo de la recta, que son los que satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

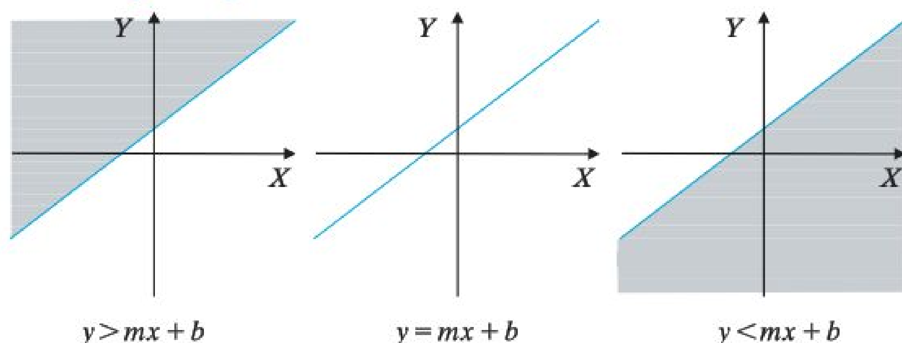


Figura 5.21

EJEMPLOS

1. Describir las regiones determinadas por la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Solución:

Los puntos que se encuentran arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > \frac{1}{2}x - 3$.

Los puntos que están en la recta satisfacen $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Los puntos que se encuentran debajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < \frac{1}{2}x - 3$.

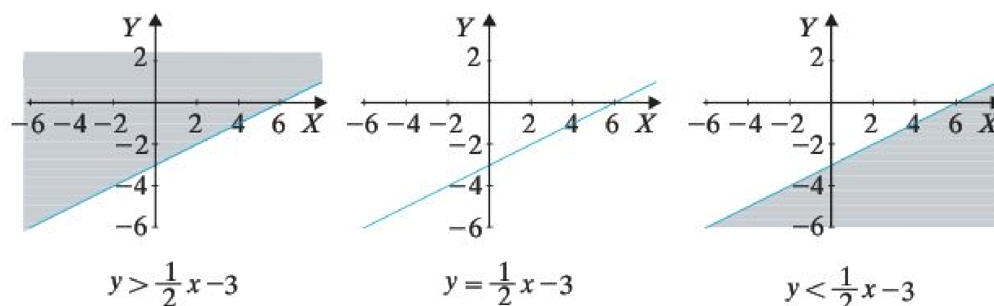


Figura 5.22

2. Describir las regiones determinadas por la recta $y = -7$.

Solución:

Los puntos que se encuentran arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > -7$.

Los puntos que están en la recta satisfacen $y = -7$.

Los puntos que se encuentran debajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < -7$.

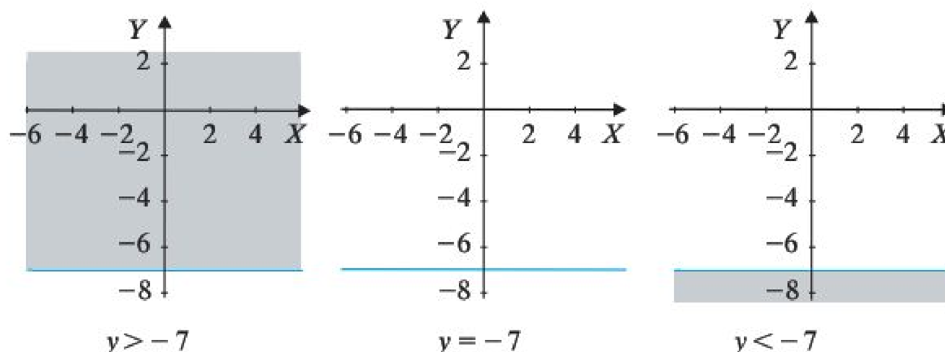


Figura 5.23

5.10.1 Ejercicios

En cada caso, describe las regiones determinadas por la recta dada.

1. $y = 4x - 1$
2. $y = -\frac{3}{5}x + 2$
3. $y = 3 - x$

4. $y = 8$
5. $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
6. $y = 5x + 4$
7. $y = -\frac{7}{4}$
8. $x + 4y = -5$
9. $3x - 7y + 6 = 0$
10. $2x - y + 7 = 0$
11. $6x + y - 10 = 0$
12. $-\frac{1}{2}x + 2y = 0$
13. $x + 2y - 16 = 0$
14. $9x - 12y - 12 = 0$
15. $x + \frac{5}{2}y + \frac{7}{2} = 0$
16. $6x + 3y + 7 = 0$
17. $15x - 45y - 11 = 0$
18. $\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$

Dibuja la región que se pide en cada caso.

19. Arriba de la recta $y - 6 = \frac{7}{2}x$
20. Abajo de la recta $y = -\frac{9}{4}x - 5$
21. Abajo de la recta $y = 10x - 3$
22. Arriba de la recta $2x - y = 2$
23. Arriba de la recta $4x + 3y = -8$
24. Abajo de la recta $6x + 2y = 1$
25. Abajo de la recta $y = 7$
26. Arriba de la recta $y - 5x = 4$
27. Arriba de la recta $y - 3 = 6x$
28. Abajo de la recta $x + 2y - 4 = 0$
29. Arriba de la recta $-5x + 2y = 0$
30. Abajo de la recta $3x + y = 1$
31. Arriba de la recta $y = \frac{7}{2}x - 4$
32. Abajo de la recta $y = \frac{1}{4}x + 5$
33. Abajo de la recta $6x + 5y + 4 = 0$
34. Arriba de la recta $x + 3y - 3 = 0$

Resumen

- Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
- Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.
- Si $a + b = c$, entonces $a = c - b$.
- Si $a - b = c$, entonces $a = c + b$.
- Si $a = b$, entonces $ac = bc$.
- Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a\left(\frac{1}{c}\right) = b\left(\frac{1}{c}\right)$.
- Si $ab = c$, entonces $a = \frac{c}{b}$.
- Si $\frac{a}{b} = c$, entonces $a = cb$.
- Si $a - b < c$, entonces $a < c + b$.
- Si $a + b < c$, entonces $a < c - b$.
- Si $ab < c$ y $b > 0$, entonces $a < \frac{c}{b}$.
- Si $\frac{a}{b} < c$ y $b > 0$, entonces $a < cb$.
- Si $ab < c$ y $b < 0$, entonces $a > \frac{c}{b}$.
- Si $\frac{a}{b} < c$ y $b < 0$, entonces $a > cb$.

5.11 EJERCICIOS DE REPASO

Despeja la incógnita de las siguientes ecuaciones:

1. $|z| - 12 = 2$
2. $t + 0.15 = 3.65$
3. $6s + 7 = -21$
4. $2y + (y + 3) = y + 26$
5. $15x^2 - 8x + 4 = 15x^2 + 12$
6. $\frac{7 - 3w}{4} - \frac{4w + 5}{3} = 3$
7. $3t - \frac{20 - 3t}{3} = \frac{3t - 11}{3}$
8. $\frac{2(w - 2)}{9} - 1 = \frac{w + 1}{12}$
9. $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{3}{2}$
10. $\frac{x^2 - 5}{3} - \frac{2x^2 + x}{6} = \frac{4x - 3}{2}$
11. $\frac{3r - 7}{4} - \frac{5r - 6}{3} = 1$
12. $\frac{w - 4}{11} - 1 = \frac{2w + 21}{5}$

13. $5z - 4(2z - 4) = 4 - 3(z - 4)$

14. $6(y - 3) = 2(y - 5) - 2$

15. $|4w - 1| - 12 = w - 7$

16. $x^2 - 18x - 13 = 5(3 - x) + x^2 + 11$

Resuelve los siguientes ejercicios:

17. ¿Qué porcentaje de 12 representa 6.36?

18. ¿De qué número es 12 el 2.4%?

19. ¿De qué número es 19 el 8%?

20. ¿Qué porcentaje de 98 representa 14.7?

21. Encuentra el 3.5% de 68.

22. ¿De qué número es 84 el 70%?

En los ejercicios 23 a 28, resuelve las desigualdades.

23. $2 - 5r < 4r + 3$

24. $7(2 - z) > 3z + 6$

25. $5x - 2 \leq 10x + 8$

26. $|3x + 5| \leq 8$

27. $|4y - 9| \geq 11$

28. $|3w + 2| < w + 6$

29. El largo de un rectángulo es 4 veces su ancho. El perímetro es 100.8 cm más que el ancho. Encuentra las dimensiones del rectángulo.

30. Si se mezclan 200 litros de aceite de maíz, cuyo costo es de $6.85 el litro, con 250 litros de aceite de girasol, se obtiene una mezcla cuyo valor es de $4.60 el litro.

   a. ¿Cuál es el precio del aceite de girasol?

   b. ¿Qué cantidad debe mezclarse de cada uno para obtener 20 litros a $4.42 el litro?

   c. Si se mezclan 50 litros de aceite de maíz y 40 litros de aceite de girasol, ¿qué precio tiene el litro de la mezcla obtenida?

   d. Si se mezcla cierta cantidad de litros de aceite de maíz y de girasol se obtienen 108 litros de una mezcla cuyo valor es de $642.60. ¿Cuántos litros de cada tipo se mezclaron?

31. Un tercio de la suma de tres números enteros múltiplos de 4 consecutivos es -60. Encuentra dichos números.

32. 20 es $\frac{1}{5}$ de un número. Encuentra el número.

33. Al comprar un artículo con 10% de descuento, ¿qué conviene más, agregar el 15% de IVA antes o después de hacer el descuento?

34. Nueve menos tres cuartos de un número es 63. Encuentra dicho número.

35. Un arrendador tiene un edificio con 6 departamentos, uno en cada piso. Renta el cuarto piso en cierta cantidad mensual; el tercer piso, en $\frac{6}{8}$ del precio del cuarto piso, y por el segundo piso recibe $\frac{6}{8}$ del precio del tercer piso. Por el primer piso recibe $\frac{6}{8}$ del precio del segundo piso. La planta baja la renta a su hijo en $\frac{6}{8}$ del precio del primer piso; el quinto piso lo ocupa él mismo. Si recibe un total de $3,905 por las rentas, ¿cuánto le paga su hijo por la renta de la planta baja? ¿Cuánto recibe por la renta del cuarto piso?

36. Dentro de 27 años, Guillermo tendrá 4 veces su edad actual. ¿Qué edad tiene Guillermo ahora?

37. En una solución:

   a. ¿Qué porcentaje de ácido tendrá una solución obtenida al mezclar 600 ml al 25% con 400 ml al 40%?

   b. Si los 400 ml agregados estuvieran libres de ácido, ¿qué porcentaje de ácido tendría la mezcla?

   c. ¿Cuántos mililitros de solución al 40% hay que agregar para obtener una solución ácida al 30%?

38. Dos botellas de blanqueador de 750 ml tienen distintas concentraciones de cloro; una de ellas contiene 4% de cloro mientras que la otra dice en la etiqueta 6% de cloro.

   a. ¿Cuál es la concentración de cloro si se mezclan las dos botellas?

   b. ¿Qué cantidad de agua debería agregarse a la solución al 6% para disminuir la concentración al 4%?

   c. ¿Qué cantidad de agua debería agregarse a la solución al 4% para disminuir la concentración al 2%?

39. De una pieza de tela se han vendido $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y sobran todavía 18 metros. ¿Cuántos metros de tela tiene la pieza?

40. Para una fiesta se preparan dos tipos de ponches, 8 litros sin alcohol para los niños y 11 litros para los adultos que contiene 20% de alcohol.

   a. ¿Cuántos mililitros de ponche sin alcohol debe agregarse para reducir la cantidad de alcohol al 10%?

   b. ¿Cuántos mililitros hay que agregar para reducir al 8%?

   c. Si se agregan 4 litros de ponche con el 15% de alcohol al ponche para adultos, ¿qué porcentaje de alcohol tendrá la mezcla obtenida?

   d. ¿Cuántos litros de ponche al 15% hay que agregar para obtener una mezcla con el 16% de alcohol?

41. Si Juan invierte cierto capital al 13% anual y al final del año tiene $2,938, ¿cuál era su capital inicial?

42. Al comprar un vestido que tenía un precio de $124, se hizo un descuento de $29.76. ¿Qué porcentaje tenía de descuento?

43. Si la cantidad de azúcar es el 12% de la caña procesada y se obtuvieron 207 kilogramos de azúcar, ¿cuánta caña se procesó?

44. Pepe va a la papelería a comprar las libretas para el año escolar que se avecina. El precio de una libreta es de $6.75. Si lleva $40 y debe reservar $5.50 para comprar lápices, ¿cuántas libretas podrá comprar?

45. Los alumnos de sexto año de primaria quieren juntar fondos para su fiesta de graduación. Para ello deciden vender galletas. Fijaron el precio del paquete de galletas en $3. Gastan $0.95 de materia prima más $80.40 de gastos de gas, empaques, etcétera. Si quieren obtener al menos $4,000 de ganancias, ¿cuántos paquetes de galletas tienen que vender?

46. En una competencia de salto de altura, para clasificar a la siguiente ronda es necesario tener una altura promedio en tres intentos de por lo menos 1.80 metros. Si un atleta logra saltos de 1.91 metros y 1.72 metros en su primero y segundo intentos, ¿cuánto debe lograr en el tercer salto para clasificar?

47. ¿A qué porcentaje de interés mensual deben invertirse $5,000 para que al finalizar el mes se tenga un capital no menor a $5,600?

capítulo

6

Polinomios



6.1 Polinomios
6.2 Producto de potencias
6.3 Potencias de potencias
6.4 Potencia de un producto
6.5 División de monomios
6.6 Grado de un polinomio
6.7 Suma y resta de polinomios
6.8 Producto de un polinomio por un monomio
6.9 Multiplicación de polinomios
6.10 Ejercicios de repaso

Es posible utilizar expresiones para modelar situaciones del mundo real: la expresión $V = x^3$ nos permite calcular el volumen de un cubo, si conocemos la longitud x de su lado; en tanto que la expresión $d = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ nos da la distancia recorrida por un móvil en un tiempo t, si conocemos su velocidad inicial v_0 y su aceleración a.

Las expresiones x^3 y $v_0t + \frac{1}{2}at^2$ son ejemplos de polinomios.

6.1 Polinomios

Antes de poder resolver ecuaciones más complicadas, debemos aprender más acerca del lenguaje algebraico. Lo que estudiaremos a continuación serán los polinomios.

Los polinomios más sencillos son los *monomios,* que consisten en un número, una variable o el producto de un número por una o más variables. Las siguientes expresiones son monomios:

$$5, x, 7y, \ -0.98w^4z^5, -3xy^2, \frac{4}{7}a^2.$$

En un monomio distinguimos dos partes: la numérica, que llamaremos *coeficiente,* y las *variables.* Se dice que es un monomio en x si la variable que se usa es x; que es un monomio en xy si se usan las variables x y y, etcétera.

Monomio	Coeficiente	Variables
$23.75x^2y$	23.75	x^2y
$-18w^4y^8z^3$	-18	$w^4y^8z^3$
$\frac{2}{5}abc^2$	$\frac{2}{5}$	abc^2
z^5	1	z^5
-8	-8	ninguna

En el cuarto ejemplo de la tabla anterior, z^5 aparentemente no tiene coeficiente, pero como $z^5 = 1z^5$, el coeficiente del monomio es 1.

Decimos que evaluamos el monomio $5x^2$ en 2 cuando sustituimos x por 2, con lo que obtenemos:

$$5(2)^2 = 5(4) = 20.$$

Si el monomio es en dos variables, entonces podemos evaluar el polinomio en parejas de números; por ejemplo, la evaluación de $4xy$ en la pareja $x = 2$, $y = 1$ es $4(2)(1) = 8$.

Un *polinomio* es la suma de uno o más monomios, así que, en particular, un monomio es un polinomio. Las siguientes expresiones son polinomios:

$$x + 6y^2, \quad -3.4x^2 \quad \text{y} \quad 9a^2b - 3.5c^3 + abc + 10.$$

Los monomios que son sumandos de un polinomio se llaman *términos* del polinomio. Así,

$$\frac{2}{3}x^3y^2 + 5x^2 - 92xy + 8,$$

tiene cuatro términos, que son:

$$\frac{2}{3}x^3y^2, \quad 5x^2, \quad 92xy \ \text{ y } \ 8.$$

Decimos que este polinomio es en las variables x y y, pues éstas son todas las que aparecen en el polinomio.

Algunos polinomios reciben nombres especiales, de acuerdo con el número de sumandos que tienen:

Monomio (un término)	$4x^2y.$
Binomio (dos términos)	$-6a^5b - 7a.$
Trinomio (tres términos)	$5r^2 + 3s - rs.$

6.2 Producto de potencias

Andrea decide invertir \$100 al 6% de interés compuesto anual durante un periodo de 5 años. ¿Qué cantidad recibirá al término de dicho periodo?

Solución: Llamemos i al interés anual; es decir, $i = 0.06$.

Para encontrar la cantidad que recibirá Andrea al final, observamos que: al término del primer año la ganancia será:

$$100i,$$

que agregado al capital inicial, da al término del primer año:

$$100 + 100i = 100(1+i). \qquad (6.1)$$

Por ser interés compuesto, para el segundo año la cantidad (6.1) se invierte al 6%, lo cual da como ganancia

$$100(1+i)i.$$

Agregando esta cantidad al capital que tenía Andrea al inicio del segundo año, obtenemos:

$$\begin{aligned} 100(1+i) + (100(1+i))i &= 100(1+i)(1+i) \\ &= 100(1+i)^2. \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento, observamos que al término del quinto año la cantidad que recibirá será:

$$C = 100(1+i)^5,$$

es decir,

$$C = 100(1+i)^5 = 100(1.06)^5$$

Andrea recibirá aproximadamente $133.82.

La expresión $100(1+i)^5$ es una expresión algebraica en la variable i que al evaluarla en 0.06 nos da la respuesta del problema.

Ejemplo

- Multiplicar x^4 por x^5.

Solución:

$$x^4x^5 = \underbrace{(xxxx)}_{\text{4 factores}} \underbrace{(xxxxx)}_{\text{5 factores}} = x^{4+5} = x^9.$$

Ley de los exponentes para el producto de potencias

Para cualquier número real b y cualesquiera números enteros positivos m y n, se cumple:

$$b^m b^n = b^{m+n}. \tag{6.2}$$

Es decir, para multiplicar dos potencias que tienen la misma base, se suman los exponentes. Cuando la base es una variable, seguimos esta ley (véanse las leyes de los exponentes en el capítulo 3, sección 3.5).

EJEMPLOS

1. Comprobar la ley de los exponentes para el producto de potencias con $b = 5$, $m = 2$ y $n = 3$.

Solución: Calculando primero las potencias obtenemos:

$$5^2 \times 5^3 = 25 \times 125 = 3125.$$

Sumando los exponentes obtenemos:

$$5^2 \times 5^3 = 5^5 = 3125.$$

2. Simplificar a^3a^8.

Solución:

$$a^3a^8 = a^{3+8} = a^{11}.$$

3. Simplificar $(4c^3d)(-5c^2d^7)$.

Solución: Se multiplican los coeficientes y se suman las potencias de las variables:

$$(4c^3d)(-5c^2d^7) = 4(-5)(c^3c^2)(dd^7) = -20c^5d^8.$$

Observa que $d = d^1$.

4. Simplificar $\left(\frac{3x^2y^3}{2}\right)\left(\frac{10xz}{9}\right)$.

Solución:

$$\left(\frac{3x^2y^3}{2}\right)\left(\frac{10xz}{9}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{10}{9}\right)\left(x^2\boldsymbol{x}\right)y^3z = \frac{5}{3}x^3y^3z.$$

5. Simplificar $\left(x^2+5\right)^4\left(x^2+5\right)^9$.

Solución: Como son potencias de la misma base $\left(x^2+5\right)$ usaremos la ley de los exponentes (6.2).

$$\left(x^2+5\right)^4\left(x^2+5\right)^9 = \left(x^2+5\right)^{4+9} = \left(x^2+5\right)^{13}.$$

6. Simplificar $\left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{12}\left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{42}$.

Solución: Como son potencias de la misma base $\left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)$ usaremos la regla de los exponentes (6.2).

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{12}\left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{42} &= \left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{12+42}\\ &= \left(\frac{3}{17}a^2b-10c^5d^7\right)^{54}.\end{aligned}$$

6.2.1 Ejercicios

Completa la siguiente tabla.

	Monomio	Coeficiente	Variables		Monomio	Coeficiente	Variables
1.	$-6x^2y^3z$			**2.**	$\frac{7}{8}abc^5$		
3.	$0.75rs^7t$			**4.**	$-\frac{43}{8}x^4y^2$		
5.	c^9			**6.**	20.7		
7.	$-3.9b$			**8.**	$8r^6st^4w^3$		
9.	$\frac{16}{21}a^5b^7c^2d$			**10.**	$\frac{11}{15}abc$		
11.	$-24.55a^6c^8e^9$			**12.**	$39x^4y^{12}w^3$		
13.	$\frac{61}{9}t^{10}w^5r^7$			**14.**	$a^6b^{11}cd^5$		
15.	$\frac{1}{1214}xyzw$			**16.**	$\frac{2}{9}$		
17.	$0.15de$			**18.**	$-f^3g^8h$		

En los siguientes ejercicios efectúa los productos indicados.

19. $-(4^4)$

20. $(-4)^4$

21. $(-2)^2(-2)^5$

22. $7z\left(\frac{1}{14}z^{11}\right)6z^9$

23. $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

24. $\left(-\frac{a^3b}{5}\right)\left(\frac{a^2bc}{8}\right)$

25. $3x^4x^5$

26. $(y-8)^{12}(y-8)^6$

27. $8w^7(2w^2)w$

28. $c^3c^8c^4$

29. $(4.8a^4bc^5)(5.6a^{17}b^5)$

30. $(-2z+5)^{10}(-2z+5)^{11}$

31. $\frac{a^6}{4}(-12a^9)$

32. $\left(-\frac{ab}{3}\right)\frac{ab}{3}\left(-\frac{ab}{3}\right)$

33. $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{c}{4}\right)\left(\frac{d}{5}\right)$

34. $8x(-3y)\left(\frac{5}{18}x^8y\right)\left(\frac{1}{10}x^2y^{17}\right)$

35. $(-s^9t)\left(-\frac{3}{4}st^{21}\right)\left(-\frac{1}{12}s^4t^5\right)$

36. $(cd^{10})(-6c^2d)(-6c^2d)$

37. $\left((a-2)^7(3b+7)\right)\left((a-2)^4(3b+7)^{13}\right)$

38. $\left(-\frac{1}{2}(x+1)y\right)\left(-\frac{1}{7}(x+1)^5y^6z\right)$

39. $\left(\frac{7a^5bc^2d^4}{8}\right)\left(-\frac{6ab^6d^{15}}{28}\right)\left(-\frac{4cd}{5}\right)$

40. $(\sqrt{3}ab^{13}c)(\sqrt{3}a^5bc^9)(a^{14}bc^8)$

41. $(0.4x^{21}y^{17}z^{11})(0.6x^6y^8z^{12})(2x^3y^5z^7)$

42. $(-2x^2y^3z)(9xy^3z^6)\left(\frac{1}{3}x^4yz^8\right)$

43. $(16c^{14}d^9e)\left(\frac{7cde}{32}\right)(6cd^{18}e^{16})(c^2de^4)$

44. $(6a^5b^2cd^4e^3)(-3abc^2d^3e^6)(-b^3c^2df)$

45. $(\sqrt{7}xy^8z^9)\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x^7y^4z^3w\right)(-7x^2y^3z^6)$

46. ¿Qué cantidad debe invertirse para que produciendo el 2% de interés compuesto anual, después de 5 años, el capital sea de $2,000?

47. Rubén quiere invertir $100,000 durante un periodo de 2 años. El asesor de inversiones le pregunta: "¿Cómo quiere invertir su dinero, al 12% anual o al 1% mensual?" ¿Qué le conviene más?

48. Un prestamista intenta cobrar a una persona a quien 5 años atrás prestó 27 millones de viejos pesos al 15% anual. Al encontrar al deudor renuente al pago de la deuda, decide hacerle un descuento de 10 mil nuevos pesos si le paga en ese momento. ¿Cuánto recibirá si convence al deudor de pagarle?

Recuerda que en México se cambió la moneda a partir del 1 de enero de 1993. El tipo de cambio es: 1,000 viejos pesos equivalen a 1 nuevo peso.

49. Para iniciar un negocio, una persona solicita un préstamo por $176,000 con la promesa de pagar 3 años después con un interés compuesto anual del 11.5%. Para ello firma dos letras por $112,000 cada una. Al concluir los 3 años, ¿qué cantidad deberá pagar además del importe de las letras?

6.3 Potencias de potencias

¿Cuál es la cantidad que se obtiene al invertir $1,000 a un interés compuesto de 3% bimestral durante 2 años?

Solución: Llamamos i al interés bimestral, es decir, $i = 0.03$.

En un año habrán pasado seis periodos bimestrales, por lo que el capital más los intereses correspondientes serán:

$$1000\,(1+i)^6.$$

Al finalizar el segundo año:

$$\begin{aligned}1000\left((1+i)^6\right)^2 &= 1000\,(1+i)^6(1+i)^6\\ &= 1000(1+i)^{6+6}\\ &= 1000(1+i)^{2\times 6}\\ &= 1000(1+i)^{12}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$1000(1+i)^{12} = 1000(1.03)^{12} \approx 1425.76$$

La cantidad que se obtiene es aproximadamente $1425.76.

Para elevar una potencia a una potencia, utilizamos la ley de los exponentes para productos de potencias.

Ejemplo

- Simplificar $\left(y^6\right)^3$.

Solución:

$$\left(y^6\right)^3 = y^6\,y^6\,y^6 = y^{6+6+6} = y^{18}.$$

Observa que podemos llegar a la misma conclusión multiplicando los exponentes:

$$\left(y^6\right)^3 = y^{6\times 3} = y^{18}.$$

Veamos el caso general; simplificar $\left(b^m\right)^n$:

$$\left(b^m\right)^n = \overbrace{b^m b^m \cdots b^m}^{n \text{ veces}} = b^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ veces}}} = b^{mn}.$$

Ley de los exponentes para la potencia de una potencia

Para cualquier número real b y cualesquiera números enteros positivos m y n:

$$\left(b^m\right)^n = b^{mn}.$$

Es decir, para encontrar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes. Seguimos esta misma ley cuando la base es una variable (véanse las leyes de los exponentes en el capítulo 3, sección 3.5).

EJEMPLOS

1. Comprobar la ley de los exponentes para: $\left(3^2\right)^3$.

Solución: Si calculamos primero la potencia dentro del paréntesis obtenemos:

$$\left(3^2\right)^3 = 9^3 = 729.$$

Si multiplicamos primero los exponentes obtenemos

$$\left(3^2\right)^3 = 3^6 = 729.$$

2. Simplificar $\left(x^4\right)^5$.

Solución:

$$\left(x^4\right)^5 = x^{4\times 5} = x^{20}.$$

3. Comparar $\left(2^3\right)^2$ y $2^{\left(3^2\right)}$.

Solución:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64, \quad 2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512,$$

así que $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{\left(3^2\right)}$, por lo que debe tenerse cuidado en el orden en que efectuamos las potencias; la expresión 2^{3^2} es ambigua y debemos evitarla pues podría dar origen a cualquiera de las dos interpretaciones anteriores; por tanto, debemos usar paréntesis.

4. Simplificar $\left(\left(a^5-2\right)^3\right)^4\left(\left(a^5-2\right)^2\right)^3$.

Solución:

$$\left(\left(a^5-2\right)^3\right)^4\left(\left(a^5-2\right)^2\right)^3 = \left(a^5-2\right)^{12}\left(a^5-2\right)^6 = \left(a^5-2\right)^{18}.$$

■

6.3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 38 simplifica las expresiones.

1. $\left(4^2\right)^3$
2. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3$
3. $\left((-0.3)^3\right)^2$
4. $\left((-1)^5\right)^9$
5. $\left(-10^4\right)^2$
6. $\left((0.1)^3\right)^1$
7. $-6\left(x^2\right)^4$
8. $(-c)^{10}$
9. $\left(-x^{11}\right)^6$
10. $-12\left(w^7\right)^5$
11. $\left(z^8\right)^7$
12. $-1.5\left(b^5\right)^2$
13. $\frac{25}{24}\left((y+3)^5\right)^2$
14. $\frac{7}{3}\left(a^8\right)^{10}$
15. $\frac{9}{4}\left((x-8)^3\right)^6$
16. $16\left(-s^{12}\right)^4$
17. $\left(\left(y^3-3y+1\right)^4\right)^8$
18. $\left(\left(4a^5+7a^3\right)^7\right)^9$
19. $\left(\left(x^2+x+1\right)^{10}\right)^3$
20. $(w-1)\left(2(w-1)^5\right)^4$
21. $6z^8\left(3z^7\right)^4$
22. $\left(y^5\right)^2 y^{\left(5^2\right)}$
23. $\left(z^4\right)^3(z)^{4^3}$
24. $(w)^{2^6}\left(w^2\right)^6$
25. $\left(\left(y^4-3y^2+2\right)^5\right)^6\left(\left(y^4-3y^2+2\right)^6\right)^2$
26. $\left(\left(w^5+8\right)^4\right)^7\left(\left(w^5+8\right)^9\right)^3$
27. $\left(\left(x^2+1\right)^7\right)^9\left(\left(x^2+1\right)^{10}\right)^9$
28. $\left((z+9)^5\right)^5\left((z+9)^7\right)^7$
29. $\left(\left(\frac{3}{5}y-4\right)^8\right)^3\left(\left(\frac{3}{5}y-4\right)^3\right)^8$
30. $\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^9\right)^{11}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^4\right)^4$
31. $\left(\left(5a^2-b^3\right)^5\right)^2\left(\left(5a^2-b^3\right)^3\right)^7$
32. $\left(\left(y^5+y-3\right)^6\right)^3\left(\left(y^5+y-3\right)^3\right)^9$
33. $\left((z-7)^{14}\right)^{11}\left((z-7)^3\right)^{11}$
34. $\left(\left(a^4+3b^2-b\right)^5\right)^9\left(\left(a^4+3b^2-b\right)^4\right)^{12}$
35. $\left(\left(7x^2+5y^3\right)^5\right)^6\left(\left(7x^2+5y^3\right)^{10}\right)^7$
36. $\left(\left(3w^4+w^3-2w\right)^8\right)^4\left(\left(3w^4+w^3-2w\right)^5\right)^9$
37. $\left(\left(a^8-5b^5c^4\right)^{10}\right)^{11}\left(\left(a^8-5b^5c^4\right)^{10}\right)^{14}$
38. $\left(\left(r^4s^9t-8s^4t^7\right)^{19}\right)^4\left(\left(r^4s^9t-8s^4t^7\right)^2\right)^{17}$

39. ¿Cuánto recibe un empleado que guarda \$700 en una caja de ahorros durante un año, si el interés compuesto que se le aplica es de 1.5% bimestral?

40. Ignacio quiere invertir su dinero durante un año, pero no sabe qué le conviene más, así que se plantea la siguiente pregunta: ¿qué conviene más, invertir al 20% trimestral reinvirtiendo los intereses, o invertir al 95% anual?

41. ¿Cuál es el rédito que se obtendrá al invertir un capital de \$1,000 a una tasa de interés compuesto de 3% al cuatrimestre durante un periodo de 2 años? ¿Conviene más hacer la inversión durante el mismo periodo si la tasa de interés compuesto que se ofrece es de 10% anual?

42. Si se invierten \$10,000 a un interés compuesto de 2% bimestral, ¿cuál será el capital al cabo de tres años?

43. Julián tiene \$15,000 que invierte de la siguiente manera: \$10,000 a un interés compuesto trimestral de 4% y \$5,000 a un interés compuesto semestral de 7%, ambos por un periodo de dos años.

a. ¿Cuál será su capital final?

b. ¿Le convendría más invertir los $15,000 a un interés compuesto semestral de 7% durante el mismo periodo de dos años?

44. ¿Qué rendimiento produce invertir $125,000 a un interés compuesto de 2.5% cuatrimestral, invertido durante un periodo de seis años?

45. Calcula el capital que se tendrá después de cinco años invirtiendo $1,200 de la siguiente manera: los primeros tres años a un interés compuesto de 2% bimestral; al finalizar este plazo, el capital total se invierte a un interés compuesto de 3% bimestral.

46. Armando quiere comprar un refrigerador cuyo costo es de $2,500, pero sólo tiene $1,600. Decide invertir su dinero por un periodo de cuatro años a una tasa de interés compuesto de 5% semestral. Suponiendo que el costo del refrigerador aumenta 6% cada año, ¿le alcanzará para comprar el refrigerador al cabo de los cuatro años?

47. ¿Cuál de las dos opciones ofrece un mayor rendimiento?:

a. Invertir el capital a una tasa de interés compuesto de 2% bimestral durante cuatro años.

b. Invertir el capital a una tasa de interés compuesto de 3% trimestral durante cuatro años.

48. Magdalena decide invertir $10,000 a un interés compuesto de 1% mensual. ¿Cuál será el capital de Magdalena al cabo de tres años?

49. Julio quiere comprar un automóvil cuyo costo es de $26,500, pero sólo cuenta con $23,000. Sabe que en un año el precio del automóvil aumenta un 10%, que puede invertir su dinero al 4% de interés compuesto semestral y que en dos años recibirá $3,000 que prestó a un hermano sin cobrarle intereses. ¿Podrá comprar el auto en dos años?

6.4 Potencia de un producto

Si se triplica la longitud de los lados de un cubo, ¿por cuánto se multiplica su volumen?

Solución: Llamemos y a la longitud del lado del cubo, entonces su volumen es:

$$V = y^3.$$

Al triplicar la longitud del lado del cubo, el volumen es:

$$V = (3y)^3 = (3y)(3y)(3y) = (3)(3)(3)\,yyy = 3^3 y^3 = 27y^3.$$

Así, el volumen del cubo original hay que multiplicarlo por 3^3, es decir, por 27. Observa que el exponente actúa en cada factor.

Veamos el caso general,

$$(ab)^n = \overbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}^{n\text{ veces}} = \overbrace{(aa\cdots a)}^{n\text{ veces}}\overbrace{(bb\cdots b)}^{n\text{ veces}} = a^n b^n.$$

Ley de los exponentes para la potencia de un producto

Para cualesquiera a y b números reales y n un número entero positivo:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Esta ley también se aplica cuando las bases son dos variables (véanse las leyes de los exponentes en el capítulo 3, sección 3.5).

Ejemplos

1. Comprobar la ley de los exponentes para la potencia de un producto con $a = 5, b = 4$ y $n = 2$.

Solución: Efectuamos primero el producto y después calculamos la potencia:

$$(5\times 4)^2 = 20^2 = 400.$$

Distribuimos el exponente en cada factor y después efectuamos la multiplicación:

$$(5\times 4)^2 = 5^2\times 4^2 = 25\times 16 = 400.$$

2. Simplificar $(-8)^3$.

Solución: Escribimos -8 como $(-1)8$:

$$(-8)^3 = ((-1)8)^3 = (-1)^3\,8^3 = (-1)512 = -512.$$

Observación:

Cuando se multiplica (-1) por sí mismo un número par de veces, el resultado es 1, y cuando se multiplica un número impar de veces, el resultado es -1, así que si un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, y si se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo. Tener en cuenta esta observación ahorra mucho trabajo.

3. Simplificar $\left(\frac{1}{4}x^2y^3\right)^2$.

Solución:

$$\left(\frac{1}{4}x^2y^3\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(x^2\right)^2\left(y^3\right)^2 = \frac{1}{16}x^4y^6.$$

4. Simplificar $\left(-x^4z\right)^5$.

Solución:

$$\left(-x^4z\right)^5 = \left(-x^4\right)^5 z^5 = -x^{20}z^5.$$

5. Simplificar $5a\left(3a^2b^6\right)^3$.

Solución:

$$5a\left(3a^2b^6\right)^3 = (5a)\left(3^3\right)\left(a^2\right)^3\left(b^6\right)^3 = 135a^7b^{18}.$$

6. Simplificar $\left(\left(x^3-1\right)^2\left(y^2+3\right)^5\right)^8$.

Solución:

$$\left(\left(x^3-1\right)^2\left(y^2+3\right)^5\right)^8 = \left(\left(x^3-1\right)^2\right)^8\left(\left(y^2+3\right)^5\right)^8 = \left(x^3-1\right)^{16}\left(y^2+3\right)^{40}.$$

Advertencia:

Las potencias no se distribuyen en una suma; por ejemplo,

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25;$$

en cambio,

$$2^2+3^2 = 4+9 = 13.$$

6.4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 42, simplifica las expresiones dadas.

1. $\left(11y^2\right)^2$
2. $\left(-7a^2\right)^3$
3. $\left(-8k^9\right)^2$
4. $-1.5\left(6b^5\right)^2$
5. $-12\left(a^2b\right)^5$
6. $\frac{3}{8}\left(2z^8\right)^4$
7. $-\frac{3}{5}(ab)^6$
8. $-7\left(r^4s^5\right)^3$
9. $\left(-5t^4\right)^3$
10. $\left(0.5ab^4\right)^4$
11. $\frac{8}{9}a\left(b^2c\right)^7$
12. $\left(6a^8bc^2\right)^3\left(\frac{5}{3}a^3\right)^2$
13. $\frac{9}{11}s\left(-\frac{1}{3}r^3s^2t^2\right)^4$
14. $(-cd)^7(2ce)$
15. $\left(-c^3d^6\right)^5\left(c^2d^6\right)$
16. $\dfrac{\left(c^5d^6\right)^8\left(-c^4d\right)^9}{32}$
17. $-\left(-\dfrac{a^5b^7c^9}{2}\right)^5$
18. $\dfrac{\left(10c^5d^{15}e^{21}\right)^6}{64}$
19. $\left(9xy^3z^2\right)^2$
20. $7\left(x^6y^{11}z^{14}\right)^{10}$
21. $\left(5a^4b^{10}c^{12}d\right)^4$
22. $\left(7a(bc)^9d^4\right)^2$
23. $\dfrac{\left(r^{21}s^{30}t^{19}\right)^7}{14}$
24. $5a^5\left(a^2b^4\right)^3\left(a^5b^3\right)^6$
25. $-xy^3\left(-x^6y^7\right)^5\left(x^2y^5\right)^7$
26. $\left(1.1x^{14}y^{19}z^{16}\right)^2$
27. $\left(3a^2c^7\right)^3\left(-a^9b^8\right)^6$
28. $12a^7c^8\left(2a^{10}b^{15}c\right)^3$
29. $\left(-2a^2\right)^3\left(-2a^2\right)^2$
30. $\left(0.1a^5b^4c^7\right)^4(abc)^6$
31. $\left(\dfrac{c^5d^3e^4}{2}\right)^4\left(\dfrac{a^6d^4e}{6}\right)^2$
32. $-\dfrac{27}{8}\left(\dfrac{2x^8y^{12}z}{3}\right)^4$
33. $24x^6z^8\left(\dfrac{x^5y^{12}z^6}{2}\right)^4$
34. $2a^4\left(a^6bc^2\right)^3\left(b^5c^7d^2\right)^2$
35. $6\left(r^4s^6t\right)^{11}8\left(rs^2t^3\right)^7$
36. $\left(rs^3t\right)^7\left(rs^3t\right)^4\left(rs^3t\right)^8$
37. $\left(\left(x^3+7x-4\right)^6\left(z^4-z^2+13\right)^8\right)^{12}$
38. $\left(\left(a^5-9\right)^4\left(b^6+b-7\right)^2\left(c^8\right)^3\right)^9$
39. $\left(\left(25w^{11}+47z^{15}\right)^6\left(32w^3z^4-51\right)^{12}\right)^{19}$
40. $\left(\left(18a^2b^3-21ac^4\right)^{13}\left(45e^2d\right)^{14}\right)^{22}$
41. $\left(\left(2c^8-5c^5-7c^4\right)^{10}\left(12c^6d^7+18c^9d^{11}\right)^8\right)^7$
42. $\left(\left(20x^5y^2-17x^4z^5\right)^9\left(3r^7st^5+r^9t^9\right)\right)^{13}$
43. Si se duplica la longitud de los lados de un cubo, ¿por cuánto se multiplica su volumen?
44. Si se multiplica por 5 la longitud de los lados de un cubo, ¿por cuánto se multiplica su volumen?

> Monomio es el producto de un número por potencias enteras de una o varias variables.

6.5 División de monomios

Encontrar la altura de un prisma rectangular si tiene un volumen de $4x^5$ metros cúbicos y el área de la base mide $2x^2$ metros cuadrados.

Solución: Para encontrar la altura del prisma recordamos que el volumen de un prisma se calcula como:

$$\text{volumen} = \text{área de la base} \times \text{altura}.$$

Despejamos la altura:

$$\text{altura} = \frac{\text{volumen}}{\text{área de la base}}.$$

Sustituimos los valores del volumen y el área de la base:

$$\text{altura} = \frac{4x^5}{2x^2}.$$

Para dividir estos monomios utilizamos la propiedad de cancelación de la división, así:

$$\frac{4x^5}{2x^2}=\frac{4x^3x^2}{2x^2}=2x^3.$$

Por tanto, la altura del prisma mide $2x^3$ metros.

Comprobación:

$$\text{área de la base} \times \text{altura} = 2x^2\left(2x^3\right)=4x^5.$$

Recuerda que cuando tenemos una fracción, podemos simplificarla cancelando los factores comunes en el numerador y en el denominador, así:

$$\frac{80}{35}=\frac{5\times 16}{5\times 7}=\frac{16}{7};$$

aquí hemos utilizado la propiedad de cancelación en la división.

Propiedad de cancelación en la división

Para cualesquiera números reales a, b y c, tales que $b \neq 0, c \neq 0$,

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

Podemos dividir monomios utilizando la misma propiedad de cancelación, así:

$$\frac{x^3}{x^2}=\frac{x^2x}{x^2}=x.$$

Cociente de potencias

Para cualquier número real $b \neq 0$ y cualesquiera números enteros positivos m y n:

- Si $m > n$, entonces:

$$\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}.$$

- Si $m < n$, entonces:

$$\frac{b^m}{b^n}=\frac{1}{b^{n-m}}.$$

- Si $m = n$, entonces:

$$\frac{b^m}{b^n}=1.$$

Estos resultados también son válidos para potencias de variables.

EJEMPLOS

1. Simplificar $\frac{x^6}{x^4}$.

Solución:

$$\frac{x^6}{x^4}=x^{6-4}=x^2.$$

2. Simplificar $\frac{a^5}{a^9}$.

Solución:

$$\frac{a^5}{a^9} = \frac{1}{a^{9-5}} = \frac{1}{a^4}.$$

3. Simplificar $\frac{12x^3y^8z^2}{20x^3yz^7}$.

Solución:

$$\frac{12x^3y^8z^2}{20x^3yz^7} = \frac{3y^{8-1}}{5z^{7-2}} = \frac{3y^7}{5z^5}.$$

4. Simplificar $\frac{(2b^5c^4)^3}{16b^{10}c^8}$.

Solución:

$$\frac{(2b^5c^4)^3}{16b^{10}c^8} = \frac{8b^{15}c^{12}}{16b^{10}c^8} = \frac{b^5c^4}{2}.$$

6.5.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\frac{-60}{12}$
2. $\frac{24}{14}$
3. $\frac{0.25}{1.5}$
4. $-\frac{32}{64}$
5. $\frac{(6)^4}{(15)^3}$
6. $\frac{b^4}{b^7}$
7. $-\frac{d^{13}}{d^{20}}$
8. $\frac{c^9}{c^6}$
9. $\frac{a^8}{(-a^2)^4}$
10. $\frac{26y^{18}}{13y^8}$
11. $\frac{5x^8}{20x^{11}}$
12. $\frac{24z^6}{4z^{10}}$
13. $\frac{(3c)^6}{(3c)^3}$
14. $\frac{(9d)^7}{(-9d)^5}$
15. $\frac{a^4b^9}{a^6b^7}$
16. $\frac{45x^6y^8}{-25x^9y^4}$
17. $\frac{7r^3s^7}{42r^3s^7}$
18. $\frac{(5c^4d)d^2}{15(cd)^2}$
19. $\frac{-12ab}{a^2b^3}$
20. $\frac{81a^5b^4}{9a^{10}b^2}$
21. $\frac{(2w^3z^4)^3}{(8wz^5)^2}$
22. $\frac{11x^{12}y^{17}z^8}{44x^7z^{13}}$
23. $\frac{-35a^4b^2c}{5a^5b^2}$
24. $\frac{75c^5e^{15}f^{11}}{(-5cd^6e^7)^3}$
25. $\frac{4x^{10}y^7z^8}{24x^3y^5z^3}$
26. $\frac{(-8a^3b^4c^2d^3)^2}{-16a^4b^5c^9d^{10}}$
27. $\frac{56w^{15}x^4y^6z^{17}}{(2w^5xyz^4)^4}$
28. $\frac{24x^8y^2(3x^4y^3)^3}{(4xy)^2(-3y^6)^4}$
29. $\frac{(15a^5b^7)^2(a^9c^4)^5}{(12a^3b^2c^{11})^2}$
30. $\frac{(2r^5s^7t^3)^5(6rs^8t)^4}{(9rst^6)^2(4r^{10}st)^3}$
31. $\frac{(11x^7z^9)^2(10xy^8z)^2}{66x^{15}y^{14}(55y^3z^{12})}$
32. $\frac{12b^3(-a^5b^3c^6)^4ac^8}{132(a^2b^2)^5(-b^7c)^3}$

33. $\dfrac{(c^2d^4)^9(ce^3)^7(3cde)^5}{(9d^{11}e^6)^2(c^{12}e^5)^6}$

34. $\dfrac{45(2x^7y^4z^5)^4(10x^3y^7z^9)^3}{(8xy^6)^3(5x^2y^3z^9)^3(6y^5z)^3}$

35. $\dfrac{(r^2s)^6(14t^2)(3rt^3)^4(s^5t^2)^8}{(6r^4s^7t^3)^2(7r^3t)^2(9s^8t^6)^2}$

36. $\dfrac{(2x^7y^9z^6)^5(7x^2y^5)^4(4x^8y^2z^3)^3}{(14x^5y^3z)^3(8y^6z^3)^4}$

37. $\dfrac{10a(3a^2b^8)(a^5c^7)^4(18a^3bc^4)}{(6a^4b^7)^2(5b^5c^3)^3(abc)}$

38. $\dfrac{(9c^4d^7e^5)^4(5c^6d^9e)^5(12cde)^3}{(3c^2d^3e^2)^7(20c^5d^7e^3)^3(15c^3d^5e^2)^2}$

39. $\dfrac{(16x^8y^4z^2)^3(75x^5y^7z^9)^4(2y)^3}{(30x^{10}y^9z^8)^3(40x^3y^4z^4)^4}$

40. $\dfrac{(8w^8x^{10}z^4)^2(3w^2y^6z^9)^7}{(18w^7z^5)^4(2x^5y^9z^8)^6(5w^{15}y^2z^9)}$

41. $\dfrac{(5a^7b^9c^{10}d^{17})^5(42a^{16}b^6c^{26})^6(8a^3c^9d^2)^{12}}{(35a^{12}b^{14}c^{16})^4(48a^4b^7c^{17}d^7)^7}$

42. $\dfrac{(4r^6s^{12}t^{15})^{21}(21rs^7t^5)^{13}(3rs^5t)^5}{(6r^8s^9t^{18})^{19}(28r^2st^{16})^6(14r^{10}s^{12}t^3)^9}$

6.6 Grado de un polinomio

El *grado de una variable en un monomio* es el exponente al que está elevada la variable en el monomio. El *grado de un monomio* es la suma de los grados de todas sus variables. Si un monomio es un número distinto de 0 entonces su grado es 0.

Ejemplos

1. Encontrar el grado de $\frac{3}{5}x^5y^3z^6$.

   Solución:

   El grado de x es 5.
   El grado de y es 3.
   El grado de z es 6.

   Así que el grado de $\frac{3}{5}x^5y^3z^6$ es $5+3+6=14$.

2. Encontrar el grado del monomio 30^4.

   Solución: Como 30^4 es un número, el grado de 30^4 es 0.

El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de sus términos, después de haber simplificado.

Ejemplos

1. Encontrar el grado de $5a^3b^2c+20ab^4c^3-30$.

   Solución:

   El grado de $5a^3b^2c$ es 6.
   El grado de $20ab^4c^3$ es 8.
   El grado de 30 es 0.

   Por tanto, el grado del polinomio es 8.

2. Encontrar el grado de $3(2x^2y+5)-6x^2y-xy+1$.

Solución: Primero simplificamos el polinomio:

$$3(2x^2y+5)-6x^2y-xy+1=-xy+16.$$

El grado de $-xy+16$ es 2, así que el grado del polinomio original también es 2.

Un polinomio se puede escribir en orden descendente o ascendente respecto a una de sus variables. Esto simplifica muchas veces las operaciones con polinomios.

EJEMPLOS

1. Escribir en orden ascendente el polinomio
$5y^3-8y^5+43+20y^7-11y-2y^4$.

Solución: Ordenamos los términos de menor a mayor según su grado, así:

$$43-11y+5y^3-2y^4-8y^5+20y^7.$$

2. Escribir en orden descendente el polinomio

$4w^3z^5+32wz^7-14w^8-21w^2z^3+45w^6z$

con respecto a cada una de las variables.

Solución: Debemos ordenar los términos del polinomio de mayor a menor respecto a cada variable.

Respecto a la variable w tenemos

$$-14w^8+45w^6z+4w^3z^5-21w^2z^3+32wz^7.$$

Respecto a la variable z:

$$32wz^7+4w^3z^5-21w^2z^3+45w^6z-14w^8.$$

6.6.1 Ejercicios

Encuentra el grado de cada variable en cada monomio y después encuentra el grado del monomio.

1. $\frac{2}{3}a^6b^2c^9$
2. $\frac{4}{11}cd^5$
3. $-5\frac{1}{3}$
4. $-\left(\frac{4}{3}\right)^3$
5. $6.9a^3bc$
6. $245x$
7. $-18x^2yz^4$
8. $121cd^4ef^8$
9. $x^3y^5z^2w^3$
10. $-35rst$
11. $-0.5x^4y^7z^5$
12. $66c^{10}d^9e^7$
13. $\frac{8}{15}r^{12}s^6t^{11}u^8$
14. $\frac{-7}{123}a^5b^5c^5d^5$
15. $\frac{9}{7}x^{10}y^{13}z^{19}$
16. $-\frac{3}{5}c^{20}d^5e^7f^{12}$

Simplifica cada expresión y después encuentra su grado.

17. $\left(\frac{1}{3}x^6y^3z^2\right)^4$
18. $\left(7r^8t^6\right)\left(\frac{1}{7}s^{10}t^9\right)$
19. $\left(12x^2y^9z^5\right)^2\left(-\frac{1}{3}x^3yz^4\right)^3$
20. $\left(w^3y^{10}z^8\right)^5$
21. $\left(x^3y^3z^3\right)^2-\left(x^2y^2z^2\right)^3$
22. $\left(-2a^3bc^4\right)^3\left(a^2b^3c\right)^4$
23. $\left(3c^5d^8e^2\right)^4$
24. $\left(a^4c^2\right)\left(a^5b^3c^7\right)$
25. $\left(5a^2b^2c^2\right)^3-\left(a^3b^3c^3\right)^2$
26. $\dfrac{72r^{14}s^{20}t^4w^7}{-36r^7t^4w^3}$
27. $\dfrac{35a^5b^{11}c^8}{42a^3b^{10}c^5}$
28. $\dfrac{\left(x^5y^7\right)^5\left(2x^6y^5z^{10}\right)^4}{\left(48x^{12}y^9z^4\right)\left(x^{21}y^{13}z^{11}\right)}$
29. $\dfrac{\left(4a^4b^8c^{12}\right)^4\left(5a^9b^6c^3\right)^3}{\left(15a^5b^{10}c^{15}\right)^3\left(-2a^2bc\right)^8}$
30. $\dfrac{\left(6x^9y^{14}z^{20}\right)^2\left(7x^8y^{11}z^7\right)^5}{\left(-21x^{10}y^{12}z^7\right)^3\left(2x^4y^5z^9\right)^6}$
31. $\dfrac{\left(-a^{14}b^9c^8d^{12}\right)^{10}\left(8c^7d^{22}\right)^3}{\left(6b^{14}d^{15}\right)^4\left(a^{20}c^{15}d^{25}\right)^5}$

Encuentra el grado de cada polinomio.

32. $\frac{5}{4}y^2 - 9y + 11$

33. $-5b^4 - 10b^2 + \frac{1}{2}(10b^2 - 4b - 2)$

34. $12 - 8x - 5(2 - 4x)$

35. $6z^4 - 7z^2 + 5z^2 - 3(2z^4 + 7z^3)$

36. $8w^2 + 5w^3 - 2(4w^2 - 5w) - 3w$

37. $5x^6 + 3x^5 - 8(2x^6 - 3) - 6x^3$

38. $4(6y^9 - 3y^7 + 2y^3 - 1) - 12y^9 + 3y$

39. $w^8 - w^2 + 5(w^8 - 2w^{10}) - 7w^{10} - w$

40. $10x^7 + 5(3x^5 - 2x^7) - 6(x^5 - 3x^4) + 3(-3x^5 - 2x^3) + 11$

41. $8(z^{12} - 5z^9 + 14z^8) - 7(z^{12} - 4z^{17} + 8z^8) + z^{15} - z^{12} - 6z + 3$

42. $25y^9 - 20y^4 + 11y^2 - 2(3y^2 - 10y) - 5(y^2 - 4y^4 + 5y^9)$

43. $35w^{12} + 9(8w^8 + 6w^4 + 2w^2 + 10) - 6(w^{12} + 12w^8 + w^2)$

44. $6(2x^8 - 5x^7 - 3x^6) - 4(3x^8 - 7x^7 - 4x^6 + 5) + 2(x^7 + x^6)$

45. $15 + 6y^4 - 8(7 - 4y^2 + 3y^4) - (y - 12y^4 + 5y^5) + 7y^3$

46. $16z^2 + 11z^5 + 2(z + z^3 - z^7) - 8(z^2 + z^5 - z) - 3(z + 1)$

Ordena los siguientes polinomios en orden descendente.

47. $24y^2 - 31y^3 + 13y - 51y^4 - 19$

48. $13w^5 + 7w - 9w^7 - 10w^3 + 19$

49. $-15w^{10} + 21w - 5w^7 - 88w^9 + 32w^3$

50. $47z - 121 + 53z^{10} + 2z^4 + 20z^5 - z^{12}$

51. $6x^7 - 28x^9 + 3x^4 - 6x^5 + 22x^3 + x^6 - 7x + 23$

52. $-13y^5 - 29y - 37y^9 - 93y^2 - 57 - 86y^{14} - 45y^7 - 68y^{11}$

53. $8z^5 - 4z^2 + 6(z^7 + z + 2) - 3(z^{14} - z^{11} + z^7)$

Ordena los siguientes polinomios en orden ascendente de acuerdo con la variable que se indique.

54. $36xy^2z^5 + 21x^4y + 13x^2y^7z - 11x^5z^2 - 9y^6x^3 - 8x^7y^5z^4 + 49$ con respecto a x.

55. $6xy^7 - 8x^4y^5 + 3x^3y - 2x^2y^3 - 7xy^2$ con respecto a y.

56. $11x^4w^2 - 8x^2w^5 + 6x^3w^6 - x^5w + 7xw^3$ con respecto a w.

57. $26a^6b^4 - 11a^5b^8 - 6abc + 70a^4b^2c$ con respecto a b.

Construye el polinomio que se indica.

58. Un monomio de grado 6 con tres variables.

59. Un monomio de grado 12 con cuatro variables.

60. Un binomio de grado 2 con dos variables.

61. Un binomio de grado 5 con una variable.

62. Un trinomio de grado 9 con tres variables.

63. Un polinomio de grado 10 con dos variables y cuatro términos.

64. Un polinomio de grado 4 con una variable y cinco términos.

65. Un polinomio de grado 3 con tres variables y seis términos.

6.7 SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Encontrar el perímetro de un cuadrilátero cuyos lados miden $4x - 6$, $2x^2 - 2$, $5x - 3$, $x^2 + 3$.

Solución:

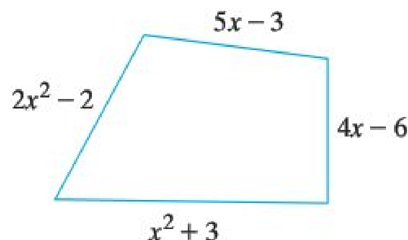


Figura 6.1

Para encontrar el perímetro del polígono se suman las longitudes de sus lados.

$$\text{Perímetro} = (4x-6)+(2x^2-2)+(5x-3)+(x^2+3).$$

Simplificamos sumando los términos semejantes:

$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= (4x-6)+(2x^2-2)+(5x-3)+(x^2+3)\\ &= (2x^2+x^2)+(4x+5x)+(-6-2-3+3)\\ &= 3x^2+9x-8.\end{aligned}$$

¿Cuál es el valor del perímetro del cuadrilátero si $x=2$?
Evaluamos el polinomio cuando $x=2$:

$$\text{Perímetro} = 3(2^2)+9(2)-8 = 22.$$

Regla para sumar polinomios

Para sumar dos polinomios se escribe uno a continuación del otro con sus respectivos signos, se agrupan los términos semejantes y se reduce.

Ejemplo

- Sumar $4a^2-10ab+6b^2$ y $-3a^2+5a^2b-11b^2-ab$.

Solución: Simplificamos sumando los términos semejantes:

$$(4a^2-10ab+6b^2)+(-3a^2+5a^2b-11b^2-ab)=$$
$$(4a^2-3a^2)+(-10ab-ab)+(6b^2-11b^2)+5a^2b = a^2-11ab-5b^2+5a^2b.$$

Podemos también alinear verticalmente los términos semejantes y después sumar:

$$\begin{array}{r} 4a^2-10ab+\ \ 6b^2 \\ \underline{-3a^2-\ \ \ ab-11b^2+5a^2b} \\ a^2-11ab-\ \ 5b^2+5a^2b. \end{array}$$

El opuesto o simétrico de un polinomio

El opuesto o simétrico de un polinomio es el polinomio que se obtiene al cambiar el signo de cada uno de sus términos.

Ejemplo

- Encontrar el opuesto del polinomio $17z^5 - 3z^3 + 10z^2 - 23z - 31$.

Solución: Para encontrar el opuesto del polinomio, cambiamos el signo de cada término; es decir,

$$-17z^5 + 3z^3 - 10z^2 + 23z + 31.$$

Regla para restar polinomios

La resta de polinomios es parecido a la resta de números reales. Para restar un polinomio se suma su opuesto.

Ejemplo

- Restar $5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12$ menos $6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10$.

Solución: Debemos sumar $5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12$ con el opuesto de $6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10$:

$$\begin{aligned}(5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) - (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10) &= \\ 5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12 - 6x^3 + 9xy^2 - 8x + 10 &= \\ (5x^3 - 6x^3) + (x^2y) + (-7xy^2 + 9xy^2) + (-8x) + (12 + 10) &= \\ -x^3 + x^2y + 2xy^2 - 8x + 22.&\end{aligned}$$

También podemos alinear verticalmente los términos semejantes

$$\begin{array}{rrrrr} 5x^3 + x^2y & -7xy^2 & & +12 \\ -(6x^3 & -9xy^2 & +8x & -10) \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} 5x^3 + x^2y & -7xy^2 & & +12 \\ -6x^3 & +9xy^2 & -8x & +10 \\ \hline -x^3 + x^2y & +2xy^2 & -8x & +22 \end{array}$$

6.7.1 Ejercicios

En cada ejercicio suma los polinomios.

1. $12x^2 - 18x + 7; 6x^3 - 9x^2 - 5x - 19$
2. $z^4 - 8z^3 + 2; 3z^4 + 8z^3 - 5z^2 + z$
3. $8w^2 - 5wy + y^3 - 4; 7w^2 - 10wy - 8y^3$
4. $4a^3b - 7ab^2; -6a^3b + ab^2 - b^2$
5. $c^4d + 3c^2d^2 - 2cd^3; 5c^4d - c^2d^2 - 2c$
6. $15y^6 - 8y^5 + 2y^3; 13y^6 + 4y^5 - 5y^3$
7. $7 + 5z^6 + 10z^7 + 14z^9 + (9 + 12z^7 + 8z^9)$
8. $16c^8 + 23c - 19 + (27c^8 - 2c^6 - 3c^3)$
9. $4x^4 + x^3y - 8x^2y^2 + 3xy^5; 5x^5 - 4x^4 + 6x^3y - 2x^2y^2 + 1$
10. $7z^3 - 3wz^2 - 4w^2z + w^3; -5z^3 - 11wz^2 - 12w^2z + 9w^3 - 8$
11. $5x^7 - 42x^3 + x^2 - 16; 25x^6 + 43x^4 - 2x$
12. $a^2 + 2ab + b^2; a^2 - 2ab + b^2; a^2 - b^2$
13. $4m^5 + 7m^4n - 9m^3n^2; -2m^3n^2 - m^2n^3 + 10m^4n + 8n^5; -3m^5 + 5m^2n^3 - 6mn^4 - 8n^5$
14. $a^6 - 6a^5 + 4a^3 + 10; 3a^6 + 5a^4 - 7a^3 + a^2 - 2; 9a^5 - 4a^4 - 2a^3 - 6a^2 - 8a - 12; -2a^6 + a^2 - 1$

En cada ejercicio encuentra la resta del primer polinomio menos el segundo.

15. $8a-4b-7; 9a+4b-6$
16. $4c-9d+e; 2c+d-3e$
17. $r^3-s^2; r^3-3rs-s^2$
18. $a^2-2ab+b^2; a^2-b^2$
19. $7x^3-4y^3+5z^3; 6x^3+9y^3-7z^2$
20. $8a^3-2x-4; 6a^3-5x+3$
21. $15x^7y^8-18x^5y^9+21x^4y^{11}+5; 7x^7y^8-14x^5y^9+21x^4y^{11}+xy^{14}$
22. $7a^2-5ab+2b^2-9ac+12bc-4c^2; 4a^2-6ab+2b^2-8ac+15bc-2c^2$
23. $28m^6n^4p^3+35m^5n^3p^2-17m^2n^2p^2; 28m^6n^4p^3+35m^5n^3p^2-16m^2n^2p^2+8mn^2p$
24. $19r^3s^5t^4-31r^5s^4t^8-26r^7st^{12}-10r^9t^{14}-45; 32r^3s^5t^4+10r^5s^4t^8-29r^9t^{14}+68$
25. $-47a^4b^6c^8-72a^3b^3c^3-80a^8b^2c^{10}-54a^{11}b; 74a^4b^6c^8+27a^3b^3c^3+8a^8b^2c^{10}+45a^{11}b$
26. $x^9y^2z^6w^{11}+64x^8yz^8w^8+35x^7z^3w^{11}+48x^6z; 43x^9y^2z^6w^{11}+19x^{10}yz^8w^8+35x^{14}z^3w^{11}$

En cada ejercicio realiza las operaciones indicadas.

27. $8b-\left[13b-\left(6b-\left(7b-9b\right)\right)\right]$
28. $6a+4b+3c-(b-2c)-\left[2a-(b+c)\right]$
29. $x+(y-z)-\left[(3x-2y)+z\right]+\left[x-(y-2z)\right]$
30. $(a-b)-(b+c-d)+(b+c-d)+(2b-a)$

En los ejercicios 31 a 33, traduce cada problema al lenguaje algebraico. Después simplifica la expresión algebraica que obtuviste.

31. Cuatro veces la diferencia de 11 menos $2z$, menos el triple de la resta de 10 menos z.
32. El triple de la suma de 5 y x, más el doble de la diferencia de $3x$ menos 4.
33. Un número de cuatro dígitos satisface lo siguiente: si al dígito de las decenas menos el de las unidades se le agrega la suma del dígito de las centenas más el de los millares más el de las unidades, a lo obtenido se le resta la diferencia del dígito de las decenas menos el de los millares y finalmente se resta la diferencia del dígito de las centenas menos el de las decenas, el resultado es 8.
34. Pepe tiene en total 11 sobrinos, jugando con el número de niños y niñas, puede escribir una ecuación: tres veces el número de niños, menos la diferencia del número de niñas menos el de niños más el doble del número de niños es igual a 3. ¿Cuántas sobrinas y cuántos sobrinos tiene Pepe?
35. Un número de cinco dígitos es tal que cada uno de ellos es una unidad mayor que el que está a su derecha. Además, el dígito de las unidades más dos veces el de las decenas menos tres veces el de las centenas más cuatro veces el de los millares menos cinco veces el de las decenas de millar es igual a -15. Encuentra dicho número.
36. Cinco números enteros consecutivos satisfacen la siguiente igualdad: el último más el primero más el cuarto menos el tercero, es igual al quinto más el cuarto más el primero menos el tercero. Encuentra dichos números.

6.8 Producto de un polinomio por un monomio

Encontrar el área del rectángulo cuyos lados miden x y $x+5$.

Solución: Encontrar el área del rectángulo es equivalente a sumar las áreas de los dos rectángulos pequeños.

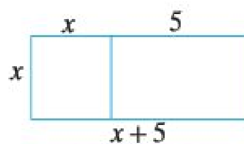


Figura 6.2

Utilizamos la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes:

$$x(x+5) = x(x) + 5x = x^2 + 5x.$$

También se puede escribir verticalmente

$$\begin{array}{r} x+5 \\ \times \quad x \\ \hline x^2+5x \end{array}$$

Observa que se multiplica cada término del polinomio por el monomio.
Así, el área del rectángulo es:

$$x^2 + 5x.$$

¿Cuánto vale el área del rectángulo si $x = 3$?
Evaluamos el polinomio cuando $x = 3$:

$$\text{Área} = 3^2 + 5(3) = 24.$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

EJEMPLOS

1. Multiplicar $-7a(3a^2 - 5a + 6)$.

Solución:

$$\begin{aligned} -7a(3a^2 - 5a + 6) &= -7a(3a^2) - 7a(-5a) - 7a(6) \\ &= -21a^3 + 35a^2 - 42a. \end{aligned}$$

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 5a + 6 \\ \times \qquad\quad -7a \\ \hline -21a^3 + 35a^2 - 42a \end{array}$$

2. Multiplicar $8x^2y(5x^2 - 4xy + y^2 - 3)$.

Solución:

$$\begin{aligned} 8x^2y(5x^2 - 4xy + y^2 - 3) &= 8x^2y(5x^2) + 8x^2y(-4xy) + 8x^2y(y^2) + 8x^2y(-3) \\ &= 40x^4y - 32x^3y^2 + 8x^2y^3 - 24x^2y. \end{aligned}$$

En forma vertical:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4xy + y^2 - 3 \\ \times \qquad\qquad 8x^2y \\ \hline 40x^4y - 32x^3y^2 + 8x^2y^3 - 24x^2y \end{array}$$

3. Resolver la ecuación $\frac{1}{2}\left(8-12x^2\right)-3x(6-2x)=-32$.

Solución: Efectuamos las operaciones indicadas y despejamos x.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(8-12x^2\right)-3x(6-2x)&=-32\\4-6x^2-18x+6x^2&=-32\\4-18x&=-32\\-18x&=-32-4\\x&=\frac{-36}{-18}\\x&=2.\end{aligned}$$

La solución es $x=2$.

Comprobación:

$$\frac{1}{2}\left(8-12(2)^2\right)-3(2)(6-2(2))=(4-24)-6(2)=-32.$$

6.8.1 Ejercicios

Efectúa los siguientes productos.

1. $c(6-2c)$
2. $\left(2y^2+8\right)5$
3. $5st\left(s^2+2st+t^2\right)$
4. $-2z(z-7)$
5. $-3b\left(b^3-4b\right)$
6. $\left(x^2-xy^2\right)\left(-x^3\right)$
7. $\left(2d^2+5d-1\right)8d$
8. $6x\left(x^3+4x^2-7\right)$
9. $6d\left(7d^3-5d^2+2\right)$
10. $-4a\left(a^2-\frac{5}{6}ab-3b^2\right)$
11. $\left(8c^5-4c^2-16\right)\frac{1}{2}c$
12. $-\frac{4}{3}a^2\left(9a^5-\frac{3}{2}a^4+\frac{1}{4}a\right)$

13. $12xy^2\left(3x^2y+5xy^2+6xy+x+y\right)$
14. $\left(x^3-4x^2y+5xy-2y^3\right)2x$
15. $-9c^3d\left(5c^4+c^3d^2-6cd^5-3\right)$
16. $3r^2s^2\left(2r^5s-6r^3s^2+3r^2s^6-8rs^7-1\right)$
17. $\frac{2}{3}ab^3c\left(a^3-b^3-4ab^2-2ac^3+c\right)$
18. $\frac{8}{7}s^3t^2\left(\frac{21}{2}s^4t-\frac{7}{4}s^3t^3+\frac{1}{16}st^2+1\right)$
19. $\left(w^2z^2-2aw^2z+w^4-2wz^2\right)(-7at)$
20. $5x^8y^2\left(x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4\right)$
21. $\left(-2xy^2\right)^2\left(1-x^2-y^2-z^4+z^6\right)$
22. $\left(3a^3+2a^2b^2+6ab^3+9b^5\right)\left(3ab^2c\right)^3$
23. $\left(5r^5s+8s^7-7r^4t^5+r^3s^9t^6\right)\left(-st^2\right)^5$
24. $\left(4w^4z^6\right)^3\left(w^5-w^3z^3+w^2z^4-wz^6\right)$
25. $\frac{4}{5}a^4b^3\left(\frac{15}{4}a^8b^6-\frac{5}{8}a^4b^3+\frac{1}{6}a^5\right)$
26. $\frac{7}{3}x^6y^9z^3\left(\frac{9}{14}w^5x^2y^7z^8-\frac{24}{28}w^7y^9\right)$

Efectúa las siguientes multiplicaciones utilizando la forma vertical.

27. $\begin{array}{r}x^2-3x+1\\ \times\qquad 4x\\\hline\end{array}$

28. $\begin{array}{r}6y^3-7y^2-4y+2\\ \times\qquad -2y\\\hline\end{array}$

29. $\begin{array}{r}2c^3d^2+c^2d^2+3cd-9\\ \times\qquad -3cd\\\hline\end{array}$

30. $\begin{array}{r}8r^4+3r^2s-2rs^2-s\\ \times\qquad 5r^2\\\hline\end{array}$

31. $\begin{array}{r} a^4b - 3a^3b^2 - 5a^2b^3 - 4ab^4 - 7 \\ \times \qquad\qquad\qquad 6a^2b \\ \hline \end{array}$

32. $\begin{array}{r} 5x^3y^3 - 7x^2y + xy^2 - 3xy - 10 \\ \times \qquad\qquad\qquad 7x^4y^2 \\ \hline \end{array}$

33. $\begin{array}{r} 4r^2t^5 + rs^3 - 8s^4t^2 - 5r^3st^6 + 12 \\ \times \qquad\qquad\qquad -2s^3t^2 \\ \hline \end{array}$

34. $\begin{array}{r} x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ \times \qquad\qquad\qquad 8x^3y^5 \\ \hline \end{array}$

Efectúa las operaciones indicadas y simplifícalas.

35. $3a(4-a)-4a(a+6)$

36. $-4b(b^2-4)+5b^2(3+b)$

37. $6x(x^2-2)+2x^2(7-3x+2x^2)$

38. $4d(d^2+d+1)-2d^2(2d-3)+5$

39. $w^3(2w^4+5w^3)-2w(w^3-6w^2-w)$

40. $2z^2(5z^4+8z^3-z)+z^4(10z^2-6z)$

41. $y^5(7y^3-y^2+1)+2y^2(4y^6-1)$

42. $9a^6+6a^4(4a^3-5a^2+8a)-35a^5$

43. $-3z^2(8z^4-11z^7+3)-5z^3(7z^5+19z^6+4)$

44. $9x^3y^2(10x^2y^3+4x^4y^5+5x^6y^9)+2x^2y(x^3y^4-6x^5y^6-7x^7y^{10})$

45. $7a^7b^3c^2(-8a^5bc^3-11a^6b^5c^2-3)-4a^9b^4c(6a^3c^4-7a^4b^4c^3+2)$

46. $12x^4y^6z^8(3w^2x^3z^7+5y^9z^3-4)+5w^2x^5y(10x^2y^5z^{15}-7w^3x^7y^{12}z^5)$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

47. $x(x+1)-2x=x^2-5(x+3)+5$

48. $2y^2+4(y-5)=3y(y-6)-y(y+2)$

49. $4c(c-3)+3(5-c^2)=c(c-10)-3$

50. $9(d^2-d)-3d(3d+2)=18$

51. $8(z+4)-6(2-z)=2z$

52. $4x(6x-9)+8=8x(3x-8)$

53. $45y^2+23y-22=9y(5y+2)+23$

54. $-7w(7w+2)=-49w^2-4(2w+15)$

55. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el producto del primero por el segundo sea igual a la diferencia del producto del primero por el tercero menos 10.

56. Encuentra tres números enteros consecutivos pares tales que el producto del primero por el tercero sea igual al producto del primero por el segundo, más 16.

57. Un trapecio está formado por un cuadrado y dos triángulos rectángulos. En cada uno de los triángulos, el cateto que forma parte de la base mayor del trapecio es 5 unidades menor que el otro cateto.

   a. ¿Cuál es el área del trapecio? Simplifica tu respuesta.

   b. ¿Cuál es el área del trapecio si el lado del cuadrado mide 9 unidades?

58. Dos círculos concéntricos son bases de dos cilindros circulares rectos; el pequeño tiene radio 5 cm menor que el grande y ambos cilindros tienen una altura igual a h centímetros. Escribe el volumen de la región que se encuentra dentro del cilindro grande y fuera del chico como el producto de un monomio por un polinomio.

6.9 Multiplicación de polinomios

Encontrar cuatro números enteros consecutivos tales que 2 más el producto del primero por el segundo es igual al producto de los otros dos.

Solución: Llamemos n, $n+1$, $n+2$ y $n+3$ a los cuatro enteros consecutivos.

Planteamos la ecuación:

$$2+n(n+1)=(n+2)(n+3). \qquad (6.3)$$

Para resolver esta ecuación debemos realizar los productos indicados. Para hacer $(n+2)(n+3)$ utilizamos la ley distributiva:

$$(n+2)(n+3)=n(n+3)+2(n+3)=n^2+3n+2n+6.$$

Sustituimos este resultado en la ecuación (6.3) y la resolvemos

$$\begin{aligned} n(n+1)+2 &= (n+2)(n+3)\\ n^2+n+2 &= n^2+5n+6\\ n+2 &= 5n+6\\ 2-6 &= 5n-n\\ -4 &= 4n\\ -1 &= n. \end{aligned}$$

De donde los números son: $-1, 0, 1, 2$.

Comprobación:

Si $n=-1$, $n+1=0$, $n+2=1$ y $n+3=2$, entonces

$$\left.\begin{aligned} n(n+1)+2=(-1)(0)+2=2\\ (n+2)(n+3)=(1)(2)=2 \end{aligned}\right\};$$

así,

$$n(n+1)+2=(n+2)(n+3).$$

Al multiplicar un polinomio por un monomio, utilizamos la propiedad distributiva y multiplicamos cada término del polinomio por el monomio; por ejemplo,

$$3x\left(x^2+7x+2\right)=3x\left(x^2\right)+3x(7x)+3x(2)=3x^3+21x^2+6x.$$

Si en lugar de multiplicar por un monomio multiplicamos por un polinomio, aplicamos la propiedad distributiva, como en el caso anterior:

$$(3x-8)\left(x^2+7x+2\right)=(3x-8)\left(x^2\right)+(3x-8)(7x)+(3x-8)(2).$$

Así, hemos reducido el problema a la multiplicación de polinomios por monomios:

$$\begin{aligned} (3x-8)\left(x^2+7x+2\right) &= (3x-8)\left(x^2\right)+(3x-8)(7x)+(3x-8)(2)\\ &= 3x^3-8x^2+21x^2-56x+6x-16\\ &= 3x^3+13x^2-50x-16. \end{aligned}$$

Por supuesto, se obtiene la misma respuesta si distribuimos el otro polinomio:

$$\begin{aligned} (3x-8)\left(x^2+7x+2\right) &= 3x\left(x^2+7x+2\right)-8\left(x^2+7x+2\right)\\ &= 3x^3+21x^2+6x-8x^2-56x-16\\ &= 3x^3+13x^2-50x-16. \end{aligned}$$

La forma vertical resulta muy cómoda para resolver multiplicaciones de polinomios:

$$\begin{array}{rl} x^2+7x+2 & \\ \times \quad 3x-8 & \\ \hline 3x^3+21x^2+6x & \longleftarrow \quad 3x(x^2+7x+2) \\ -8x^2-56x-16 & \longleftarrow \quad -8(x^2+7x+2). \\ \hline 3x^3+13x^2-50x-16 & \end{array}$$

EJEMPLOS

1. Multiplicar $(5x^3-9x+5)(4x+6)$.

Solución:

$$\begin{array}{r} 5x^3-9x+5 \\ \times \quad 4x+6 \\ \hline 20x^4 \quad -36x^2+20x \\ +30x^3 \quad -54x+30 \\ \hline 20x^4+30x^3-36x^2-34x+30 \end{array}$$

2. Multiplicar $(a^2b-3b^2-4ab)(5ab-9a^2b+8b^2)$.

Solución: Conviene escribir los polinomios en cierto orden de manera que el grado de una de las variables vaya creciendo o decreciendo; esto facilita las operaciones.

Escribiremos los polinomios en orden decreciente en *a:*

$$\begin{array}{r} a^2b-4ab-3b^2 \\ \times \quad -9a^2b+5ab+8b^2 \\ \hline -9a^4b^2+36a^3b^2+27a^2b^3 \\ +5a^3b^2 \quad -20a^2b^2-15ab^3 \\ +8a^2b^3 \quad -32ab^3-24b^4 \\ \hline -9a^4b^2+41a^3b^2+35a^2b^3-20a^2b^2-47ab^3-24b^4 \end{array}$$

6.9.1 Ejercicios

Efectúa los siguientes productos.

1. $(2x-1)(3x+2)$
2. $(5y-3)(y-6)$
3. $(4a+8)(7a+9)$
4. $(6b+5)(9b-10)$
5. $(3x-9y)(2z-5w)$
6. $(a+b)(2a^2-1)$
7. $\left(\frac{7}{2}t+\frac{5}{4}\right)\left(\frac{2}{7}t+\frac{5}{4}\right)$
8. $(c^3-2d^5)\left(3c^4+\frac{1}{2}d^6\right)$
9. $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$
10. $(5a+9)(3a^2+6ab^2-b^3)$
11. $(a^3-8)(a^4+3a^2+4)$
12. $(c^2-2c-6)(2c+5)$
13. $\left(\frac{4}{3}a^6bc^2+\frac{16}{9}ab^4c^3\right)\left(\frac{9}{2}a^2b^3c-27abc\right)$
14. $(4a^3+12a-16)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a^5\right)$
15. $(y^4+4y^3+5y^2-3y-5)(y^2+1)$
16. $(z^3-7z-8)(2z^3+z^2-3)$
17. $(5x^4-2x^2-4x+1)(3x^2-6)$
18. $(b^3+8b^2-2b-4)(9b^2-4)$

19. $\left(-7x^5-10x^3y^2-5x^2y\right)\left(4xy^3+x^2y^2\right)$
20. $\left(c^4+2c^2d^2-d^4\right)(2c-2cd+d)$
21. $\left(6r^6s^2+9r^3s^8t^5+t^8-s^9\right)\left(3r^2t^4-5s^3t^2\right)$
22. $(z-1)^2\left(z^2+z+1\right)$
23. $\left(r^4-4r^3s^2+7r^2s^5-9s^3\right)\left(-3r^4-5r^3s^3\right)$
24. $\left(a^3-a^2b+ab^2-b^3\right)(a+b)$
25. $\left(a^2-3a+6\right)\left(a^2+3a+6\right)$
26. $\left(x^2+6x+18\right)\left(x^2-6x+18\right)$
27. $\left(3x^2+4xy+2y^2\right)\left(5x^2+xy+6y^2\right)$
28. $\left(7a^6-2a^4b^3+4ab^5\right)(1-2a+b)$
29. $\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)(a+b+c)$
30. $\left(y^2+2z^2-2yz\right)\left(y^2+2z^2+2yz\right)$
31. $\left(5x^3-2x^2+3x-4\right)\left(x^3+5x^2-x+2\right)$
32. $(3x-4y)(3x+4y)\left(9x^2+16y^2\right)$
33. $\left(8x^5y+4x^4y^3-9x^2y^4-xy-x+y^2-y+1\right)\left(x^2+xy+y^2+1\right)$
34. $\left(a\left(a^2+5a+3\right)-8b-4\right)b-\left(a^2-3b-4\right)(a+b)$
35. $\left(9s^3t^3+s^4t^4-7s^5t^5\right)-\left(s^3t-s^4t^2+s^5t^3\right)\left(st-7t^2\right)$
36. $\left(5x^5-7x^4+3x^2-8x+2\right)\left(-4x^4+9x^3+6x^2-x-5\right)$
37. $[xz-(x-y)(y+z)]-y[y-(x-z)]$
38. $a^2\left(ac-ab+b^2-c\right)-b^2(ab-2ac)-c^2(b-a)-(a-b)(a-c)(b-c)\left(b^2-2c\right)$
39. $(r-s)(r+s)6-(s-rs-t)r-\left[(s-6)\left(s-t+7rst^2\right)-(s-t)(s+t)\right]$
40. $(x-2y)(y-2x)-(x-3y)(4y-x)+2xy\left(x^2-6y-5x+y^2x\right)$
41. $(w-1)(w-2)-3w(w+3)+2[(w+2)(w+1)-3]\left[(w-5)\left(w^2-2\right)\right]$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

42. $(y-7)(y+7)=(y+3)(y+9)$
43. $(z+2)(z-7)=(2z-1)(z+2)-z^2$
44. $(x-1)(x+5)=(x+2)(x+3)$
45. $(4x+1)(x-2)+1=(3x-2)(x+3)+x^2$
46. $(w-4)^2=(w-3)^2$
47. $(2y+1)(y-1)=2(y-8)(y+4)$
48. $(3d+8)(d-5)+2d^2=(5d-7)(d+6)$
49. $(a-6)(a+5)=2a(a+4)-(a+1)(a+6)$
50. $(w+6)(3w-4)=(5w-1)(w+2)-(w+4)(2w-3)$
51. $(7x-3)(x-2)-(4x+3)(x+2)=(5x-2)(x-3)-(2x-3)(x-3)$
52. $(4c-2)(c+3)=2c(c-5)+(c+7)(2c-2)$

Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados. Después efectúa los productos obtenidos para verificar que el planteamiento es correcto.

53. El cuadrado de la suma de tres números es igual a la suma de los cuadrados de los tres números más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del primero por el tercero, más el doble producto del segundo por el tercero.
54. La suma de los cubos de dos números es igual al producto de la suma de los números por el cuadrado del primero menos el producto de los números más el cuadrado del segundo.
55. La suma de las sextas potencias de dos números es igual al producto de la suma de los cuadrados de los números por la potencia cuarta del primero menos el producto de los cuadrados de los números más la potencia cuarta potencia del segundo.
56. La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos impares es −32. Encuentra dichos números.
57. Tres números enteros consecutivos satisfacen la siguiente condición: 8 veces el primero más el cubo del segundo menos el cubo del primero es igual al cubo del tercero menos el cubo del segundo. Encuentra dichos números.

Resumen

Leyes de los exponentes

- $b^m b^n = b^{m+n}$.
- $(b^m)^n = b^{mn}$.
- $(ab)^n = a^n b^n$.
- $\dfrac{b^m}{b^n} = \begin{cases} b^{m-n} & \text{si } m > n \\ \dfrac{1}{b^{n-m}} & \text{si } m < n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$

6.10 EJERCICIOS DE REPASO

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $(10a^4b^5c^6)^4\left(\dfrac{a^2bc^3}{10}\right)^5(2a^3c)^2$
2. $\dfrac{5}{24}(w^{16}x^4y^8)^5\dfrac{6}{7}(w^9x^6y^3)^5(w^2y^2)$
3. $(-x^{14}y^{17}z^8)^6(5x^5y^{11}z^9)^3$
4. $(a^3c^7)^9(a^4b^8)(b^2c^4)^5(a^3b^6c^9)$
5. $\dfrac{(2r^6s^5t^{10})^8(5r^7s^{13}t^5)^4}{(6r^8s^{12}t^9)^3(10r^{19}s^7t^8)^6}$
6. $\dfrac{45(21x^{20}y^{18}z^{32})^2(x^2y^4z^6)^7}{(3x^7y^{10}z^{23})^5(14x^9y^{15}z)^3}$
7. Escribe en orden ascendente el polinomio $32x^{12}y^9 - 71x^3y^{20} + 28x^{14}y^3 - 17x^5y^{22} + 45x^7y^{19} - 12x^{20} - 8$ con respecto a cada una de las variables.
8. Escribe en orden descendente el polinomio

$$57a^5b^{13}c^{20} + 37a^{21}b^6c^{11} - 68a^{16}b^{25}c^3 + 125 - 84a^5b^{13}c^{20} + 18a^{19}b^{14} - 10a^7b^3c^{18}$$

con respecto a cada una de las variables.

9. Si $x = a + 2b - 3c$, $y = b + 2c - 3a$, $z = c + 2a - 3b$, prueba que $x + y + z = 0$.
10. ¿Qué hay que sumarle a $x^2 + 5y^2 + 3z^2$ para que el resultado sea $2y^2 - z^2$?

Encuentra el valor correspondiente si: $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ y $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

11. $s(s-a)(s-b)(s-c)$
12. $s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2$
13. $s^2 - (s-a)(a-b) - (s-a)(s-c) - (s-b)(s-c)$

Si $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$, *encuentra el valor de cada una de las siguientes expresiones.*

14. $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2$
15. $(y+z)^3 - (z-x)^2 - (x-y)$
16. $(x-y)(x-z) + z(3x-y-z) + 2xz - (x-z) + 2y$
17. $(x+y)^2(x^3-xy-z)(z^2-11)(x-y)^3 - (x-z)^4$

En cada uno de los siguientes ejercicios, efectúa primero la suma de los dos polinomios y después resta el primer polinomio menos el segundo.

18. $9a^3 - 5b^3 + 3c^3; 7a^3 + 3b^3 - 12c^3$
19. $x^4 + 2x^2 + 1; 5x^4 - 3x^3 - 4x + 2$
20. $12r^2 - 4rs + 5rs^2; 6r^2 - 4rs - rs^2 - s^5$
21. $9a^3b + 7a^2 - 3b^2; 6ab^2 - 7a^3b + 9a^2$
22. $8x^5 - x^4 + 7x^2 - 3x - 1; -2x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4$
23. $ab^2c^5 + 15ab^3c^2 - c^3; ab^2c^4 - 4ab^2c^3 - 4ab^2c^3 + 3c^3$

Efectúa las operaciones indicadas.

24. $(5a+3)(7a-2)$
25. $(12c-8)(2c+10)$
26. $(6b^2+b)(9b-5)$
27. $(x^2-x+4)(x^3-12)$
28. $(2y^4-5y^2-1)(5y^5-2)$
29. $(x^3+5x^2+11)(x^2-x+3)$
30. $(8a^6+a^3-5a)(4a^5-2a^3+a^2)$
31. $(x^4-x^3y-x^2y^2+xy^3-y^4)(x-y)$
32. $(6a^3+a^2b^2+3b^3)(3a^3+a^2b^2+5b^3)$
33. $(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)(a-b-c)$
34. $[(2x-y)(x-2y)][3x-2y+(2x+3y)]$
35. $(a-b-c)(a+b+c)+b(b+2c)$
36. $(c^2+cd+d^2)(c^2-cd+d^2)$
37. $(w^4+w^2z^2+z^4)(w^2-z^2)$
38. $[x(x^2+9x+21)-3y-1]y-(x^2-6x-8)(x-y)$
39. $(7a^4b^4-3a^3b^5+8a^2b^6+ab^7)+(ab^2+2a^2b^3)(-a^3b^2+6a^2b^3-ab^4)$

En los ejercicios 40 a 42, traduce al lenguaje algebraico y simplifica los siguientes enunciados.

40. Un número x de tres dígitos satisface lo siguiente: el producto de la diferencia del dígito de las unidades menos el de las decenas por la suma del dígito de las centenas más uno, es igual al dígito de las unidades más el doble la suma del dígito de las centenas y el de las decenas.

41. Un número y de cinco cifras satisface las siguientes condiciones:

 a. El producto de la suma del dígito de las decenas de millar más el de los millares por la diferencia del dígito de las centenas menos el de las decenas por la suma del dígito de las unidades más el de las decenas de millar, agregado al producto del dígito de los millares por la suma del dígito de las decenas más el de las centenas, es igual a 184.

 b. Si los dígitos son enteros consecutivos, encuentra la ecuación que se satisface.

42. Cuatro números enteros consecutivos satisfacen que el producto de los cuatro es igual a la suma del cubo del primero, más el producto del tercero más uno por tres veces el cuadrado del primero, más el producto del segundo más dos por el doble del primero; todo lo anterior multiplicado por el cuarto.

43. La bolsa de valores ganó 147 puntos en cinco días. Durante la semana tuvo las siguientes variaciones $(4a-15)$, $(2a-28)$, $(-5a+3)$, $(3a-18)$ y $(-10a+7)$. Encuentra cuántos puntos ganó o perdió cada día.

44. Un ama de casa invierte sus ahorros al 10% de interés compuesto anual durante 2 años; al término de ese plazo recibe \$786.50. ¿Cuál fue la inversión inicial?

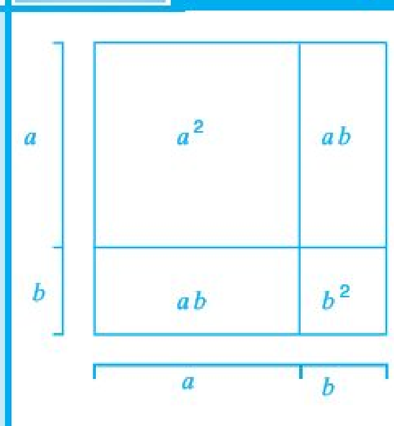
45. Ana María tiene \$25,000 y Julián tiene \$25,500. Ana María invierte su dinero durante tres años a una tasa de interés compuesto mensual de 2%, mientras que Julián elige una tasa de interés compuesto bimestral de 4% invirtiendo su dinero también durante tres años. Al final, ¿quién tendrá más dinero?

46. Cuatro números enteros consecutivos satisfacen que el producto de los tres primeros es igual al producto de los tres últimos menos tres veces el cuadrado del primero, menos 51. Encuentra dichos números.

capítulo

7

Productos notables y factorización



7.1 Cuadrado de una suma: $(a+b)^2$

7.2 Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2$

7.3 Producto de una suma por una diferencia: $(a+b)(a-b)$

7.4 Producto de $(a+b)(a+c)$

7.5 Otros productos notables

7.6 Factorización de polinomios

7.7 Factorización por agrupamiento

7.8 Factorización de trinomios: x^2+bx+c

7.9 Casos particulares

7.10 Factorización de trinomios: ax^2+bx+c

7.11 Combinación de distintos métodos de factorización

7.12 Factorización de otros productos notables

7.13 Ejercicios de repaso

En múltiples situaciones aparecen ciertos productos que pueden calcularse a través de fórmulas establecidas. Es conveniente recordar dichos productos y fórmulas para realizar los cálculos o simplificar expresiones. Estos productos se llaman *productos notables,* y en este capítulo veremos las fórmulas correspondientes a ellos.

7.1 Cuadrado de una suma: $(a+b)^2$

Encontrar dos números enteros consecutivos tales que el cuadrado del mayor sea igual al cuadrado del menor, más 85.

Solución: Llamamos n y $n+1$ a los enteros consecutivos, así que:

$$(n+1)^2 = n^2 + 85.$$

Para resolver esta ecuación debemos realizar primero la operación:

$$(n+1)^2 = (n+1)(n+1),$$

es decir, debemos realizar el producto de estos dos binomios:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+1) &= n(n+1)+1(n+1)\\ &= n^2+n+n+1\\ &= n^2+2n+1.\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2+85\\ n^2+2n+1 &= n^2+85\\ 2n &= 84\\ n &= 42.\end{aligned}$$

Así, los dos números buscados son 42 y 43.

Comprobación: Si $n=42$, entonces:

Lado izquierdo: $(n+1)^2 = 43^2 = 1849.$

Lado derecho: $n^2+85 = 42^2+85 = 1764+85 = 1849.$

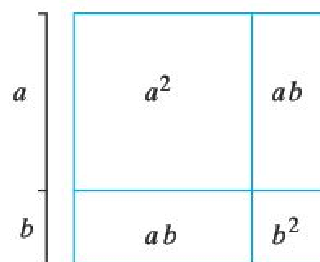


Figura 7.1

Para calcular el área del cuadrado de la figura 7.1 multiplicamos las longitudes de sus lados, es decir, $(a+b)(a+b)$; o lo que es lo mismo, sumamos las áreas de los rectángulos internos. Es decir,

$$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Si se efectúa directamente la multiplicación, obtenemos:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Observa que se obtiene el trinomio formado por:

- El cuadrado del primer término $\to a^2$
- más el doble producto del primer término por el segundo $\to 2ab$
- más el cuadrado del segundo término $\to b^2$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

EJEMPLOS

1. Desarrollar $(2x+7)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x+7)^2&=(2x)^2+2(2x)(7)+7^2\\&=4x^2+28x+49.\end{aligned}$$

2. Calcular $(53)^2$ utilizando la fórmula del cuadrado de una suma.

Solución:

$$\begin{aligned}(53)^2&=(50+3)^2\\&=50^2+2(50)(3)+3^2\\&=2500+300+9\\&=2809.\end{aligned}$$

3. Desarrollar $(3x^2y+4y^3)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}(3x^2y+4y^3)^2 &= (3x^2y)^2 + 2(3x^2y)(4y^3) + (4y^3)^2 \\ &= 9x^4y^2 + 24x^2y^4 + 16y^6.\end{aligned}$$

7.2 Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$

En la figura 7.2, la distancia DE es igual a 90 metros, la distancia AD es de 31 metros y la distancia BE es de 40 metros. Encontrar la distancia DC tal que la distancia AC sea igual a la distancia CB.

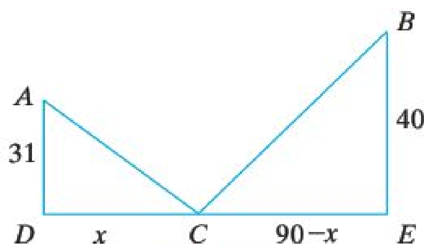


Figura 7.2

Solución: Llamamos x a la distancia DC. Entonces la distancia CE es igual a $90 - x$.

Por el teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = x^2 + (31)^2$$

y

$$BC^2 = (90 - x)^2 + (40)^2.$$

Como queremos que estas distancias sean iguales, sus cuadrados también deben ser iguales; entonces, igualando ambas cantidades tenemos:

$$x^2 + (31)^2 = (90 - x)^2 + (40)^2. \tag{7.1}$$

Para resolver esta ecuación debemos desarrollar primero $(90 - x)^2$,

$$(90 - x)^2 = (90 - x)(90 - x),$$

es decir,

$$\begin{aligned}(90 - x)(90 - x) &= 90(90 - x) - x(90 - x) \\ &= 8100 - 90x - 90x + x^2 \\ &= 8100 - 180x + x^2.\end{aligned}$$

Sustituimos este valor en (7.10):

$$\begin{aligned}x^2 + (31)^2 &= (90 - x)^2 + (40)^2 \\ x^2 + 961 &= 8100 - 180x + x^2 + 1600 \\ 180x &= 8739 \\ x &= 48.55.\end{aligned}$$

Así que la distancia DC es 48.55 metros y la distancia CE es igual a 41.45 metros.

Comprobación: Si $x = 48.55$, entonces:

Lado izquierdo: $x^2 + (31)^2 = (48.55)^2 + 961 = 2357.1025 + 961 = 3318.1025$

Lado derecho: $(90 - x)^2 + (40)^2 = (41.45)^2 + 1600 = 3318.1025.$

En la figura 7.3, encontrar el área del cuadrado cuyo lado mide $a - b$.

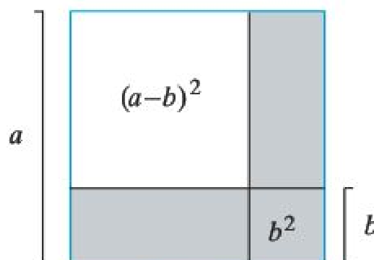


Figura 7.3

Observamos que si al área del cuadrado del lado a le restamos la suma de las áreas de los rectángulos con lados a y b y sumamos al resultado el área del cuadrado del lado b, obtenemos el área buscada; es decir,

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Por otro lado, si efectuamos directamente la multiplicación obtenemos:

$$\begin{array}{rrr} & a - & b \\ \times & a - & b \\ \hline & a^2 - & ab \\ & - & ab + b^2 \\ \hline & a^2 - & 2ab + b^2 \end{array}$$

En este caso obtenemos el trinomio formado por:

- El cuadrado del primer término $\rightarrow a^2$
- ***menos*** el doble producto del primer término por el segundo $\rightarrow -2ab$
- más el cuadrado del segundo término $\rightarrow b^2$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

EJEMPLOS

1. Desarrollar $(5a - 9)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} (5a - 9)^2 &= (5a)^2 - 2(5a)(9) + 9^2 \\ &= 25a^2 - 90a + 81. \end{aligned}$$

2. Calcular $(88)^2$ utilizando la fórmula del cuadrado de una diferencia.

Solución:

$$\begin{aligned}(88)^2 &= (90-2)^2\\ &= 90^2 - 2(90)(2) + 2^2\\ &= 8100 - 360 + 4\\ &= 7744.\end{aligned}$$

3. Desarrollar $\left(6ab^2 - 5a^2\right)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(6ab^2 - 5a^2\right)^2 &= \left(6ab^2\right)^2 - 2\left(6ab^2\right)\left(5a^2\right) + \left(5a^2\right)^2\\ &= 36a^2b^4 - 60a^3b^2 + 25a^4.\end{aligned}$$

Fórmulas del cuadrado de una suma y de una diferencia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Observación:

En las fórmulas del cuadrado de una suma y de una diferencia, los términos a y b pueden ser cualquier expresión algebraica y tener cualquier signo; teniendo en cuenta esta observación podemos ver a la fórmula del cuadrado de una diferencia como un caso particular del cuadrado de una suma:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

7.2.1 Ejercicios

Utilizando las fórmulas del cuadrado de una suma o el cuadrado de una diferencia, calcula los siguientes cuadrados.

1. 24^2 2. 99^2 3. 77^2 4. 82^2 5. 43^2 6. 35^2 7. 69^2 8. 58^2

Desarrolla los siguientes productos.

9. $(7+x)^2$
10. $(a-5)^2$
11. $(y+9)^2$
12. $(-b-6)^2$
13. $\left(\frac{1}{5}w+9\right)^2$
14. $\left(w+\frac{11}{4}\right)^2$
15. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$
16. $\left(r+\frac{5}{6}\right)^2$
17. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+6\right)^2$
18. $\left(y+\frac{7}{4}\right)^2$
19. $\left(\frac{1}{3}z-2\right)^2$
20. $-\left(x+\frac{2}{5}\right)^2$
21. $(-11-y)^2$
22. $-(6x+3)^2$
23. $(-8+5y)^2$
24. $(-11x-4)^2$
25. $(8x-9)^2$
26. $(5x+2)^2$
27. $\left(x^3+1\right)^2$
28. $(9y+1)^2$
29. $\left(\frac{1}{7}z^2-7\right)^2$
30. $\left(\frac{1}{5}ab-b^3\right)^2$
31. $-\left(\frac{2}{3}z-\frac{10}{3}\right)^2$
32. $\left(\frac{1}{4}a-\frac{5}{6}\right)^2$
33. $(ab-2)^2$
34. $(ab-c)^2$
35. $\left(-y^2+4\right)^2$
36. $\left(x^3-1\right)^2$
37. $\left(3x+5y^4\right)^2$
38. $(13s-8t)^2$
39. $\left(t^2+2t\right)^2$
40. $-\left(2x^2-3y^2\right)^2$
41. $\left(\frac{3}{8}c^2+\frac{2}{9}d^3e\right)^2$
42. $\left(2r^3s-\frac{1}{2}r^2s^6\right)^2$
43. $\left(\frac{5}{7}cd^2+\frac{7}{9}c^2d\right)^2$
44. $\left(4ab^2c^8-6b^7c\right)^2$
45. $\left(12r^4s+9t^5w^7\right)^2$
46. $(a+b)^2(a-b)$
47. $\left(x^2-xy+y^2\right)(x+y)$
48. $(r+s)^2(r-s)^2$
49. $(a+b)^2(a+b)$
50. $(z-1)^2\left(z^2+z+1\right)$
51. $\left(x^2-x+1\right)(x+1)^2$
52. $\left(\frac{1}{2}z+w\right)^2-\left(\frac{1}{2}z-w\right)^2$
53. $(r-2s)^2+\left(\frac{1}{4}(2r-s)\right)^2$

En los ejercicios 54 al 63, resuelve las ecuaciones.

54. $(x-2)^2+(x-3)^2=(x-5)^2+(x-6)^2$
55. $(z+4)^2=z(z-12)-4$
56. $(w+3)^2+3w=(w-3)^2+6(14-w)$
57. $(y-9)^2-(y+7)^2=0$
58. $z^2+(z+2)^2=(2z-3)(z+1)$
59. $(3w+5)^2-6w^2=(3w+2)(w+3)$
60. $2r(r+5)(r-9)+53=r^3+r(r-4)^2$
61. $(3b+4)^2+3(b-5)^2=(4b-5)^2-(2b-8)^2$
62. $(2y+5)^2+(y+1)^2=(3y-1)^2-(2y+3)^2$
63. $(5z+3)^2-(4z+5)^2=(7z+2)^2-40z^2$
64. Las longitudes de un lado de un rectángulo y de la diagonal son dos enteros consecutivos, y el cuadrado de la longitud del otro lado mide 9 m^2. Encuentra el perímetro del rectángulo.
65. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el cuadrado del primero más el cuadrado del tercero es igual al doble del cuadrado del segundo.
66. En una escuela tienen cierto número de mosaicos y quieren formar un cuadrado en el centro del patio. Colocando cierto número de mosaicos en cada fila sobran 39, y añadiendo un mosaico en cada fila faltan 24. ¿Cuántos mosaicos hay en la escuela?
67. Un salón de recepciones tiene forma cuadrada y se quiere colocar en el centro un tapete cuadrado dejando un pasillo alrededor de 2 metros de ancho. Se sabe que el área del tapete mide 80 m^2 menos que el área del salón. ¿Cuánto mide de lado el salón?
68. Encuentra dos números enteros consecutivos impares tales que el cuadrado del mayor menos el cuadrado del menor sea igual a 104.
69. Encuentra dos números enteros pares consecutivos tales que el cuadrado del mayor sea igual al cuadrado del menor más 68.

7.3 Producto de una suma por una diferencia: $(a+b)(a-b)$

Un número x de dos dígitos satisface las siguientes propiedades: el producto de la suma de los dígitos por la diferencia del dígito de las decenas menos el dígito de las unidades es igual a 24. La cifra de las decenas es igual a 12 menos la cifra de las unidades. Encontrar dicho número.

Solución: Llamamos d al dígito de las decenas y u al de las unidades, así que:

$$x=10d+u. \tag{7.2}$$

Planteamos la ecuación:

$$(d+u)(d-u)=24.$$

Resolvemos el producto indicado

$$\begin{aligned}(d+u)(d-u)&=24\\ d(d-u)+u(d-u)&=24\\ d^2-du+ud-u^2&=24\\ d^2-u^2&=24.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Ahora utilizamos el otro dato del problema:

$$d=12-u. \tag{7.4}$$

Ahora sustituimos este valor de d en la última ecuación de (7.3):

$$\begin{aligned}d^2-u^2&=24\\ (12-u)^2-u^2&=24\\ 144-24u+u^2-u^2&=24\\ 144-24&=24u\\ \frac{120}{24}&=u\\ 5&=u.\end{aligned}$$

Sustituimos este valor en (7.4):

$$d = 12 - 5 = 7.$$

Sustituimos los valores de d y u en (7.2):

$$x = 10d + u = 10(7) + 5 = 75.$$

Por tanto, el número buscado es 75.

Comprobación: Si $d = 7$ y $u = 5$, entonces,

$$(d+u)(d-u) = (7+5)(7-5) = 12(2) = 24.$$

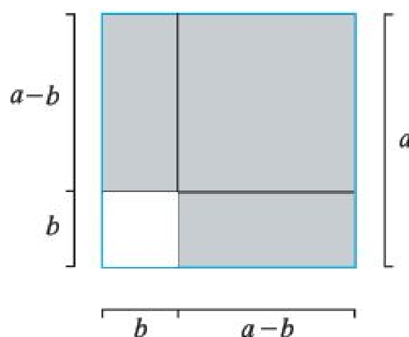


Figura 7.4

Para encontrar el área de la parte sombreada del cuadrado de la figura 7.4, observamos que la suma de las áreas de los rectángulos que la forman es $a(a-b)+b(a-b)$. Observa que si factorizamos, esta suma es igual a $(a+b)(a-b)$. También podemos obtener el área de la parte sombreada como el área del cuadrado grande menos el área del cuadrado chico, es decir, a^2-b^2.

Tenemos ahora el producto de la suma por la diferencia de los mismos dos términos. Efectuamos directamente el producto y obtenemos

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Observa que los productos cruzados se cancelan pues tienen diferente signo y queda únicamente la diferencia de los cuadrados de los dos términos, en el mismo orden en el que aparecen en la diferencia.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

EJEMPLOS

1. Desarrollar $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$.

Solución:

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) = x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{9}{16}.$$

2. Desarrollar $\left(-4a^2-5b\right)\left(-4a^2+5b\right)$.

Solución:

$$(-4a^2-5b)(-4a^2+5b)=(-4a^2)^2-(5b)^2$$
$$=16a^4-25b^2.$$

3. Multiplicar 48×52 utilizando la fórmula del producto de una suma por una diferencia.

Solución:

$$\begin{aligned}48\times 52&=(50-2)(50+2)\\&=50^2-2^2\\&=2500-4\\&=2496.\end{aligned}$$

7.4 Producto de $(a+b)(a+c)$

Tres números enteros consecutivos impares satisfacen la siguiente propiedad: el producto del segundo por el tercero es igual a 26 más el producto del primero por el tercero. ¿Cuáles son dichos números?

Solución: Llamamos $2n+1$, $2n+3$ y $2n+5$ a los números enteros consecutivos impares. Entonces,

$$(2n+3)(2n+5)=(2n+1)(2n+5)+26. \qquad (7.5)$$

Primero desarrollamos el producto:

$$\begin{aligned}(2n+3)(2n+5)&=2n(2n+5)+3(2n+5)\\&=4n^2+16n+15\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(2n+1)(2n+5)&=2n(2n+5)+1(2n+5)\\&=4n^2+12n+5.\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación (7.5) sustituyendo los productos obtenidos:

$$\begin{aligned}(2n+3)(2n+5)&=(2n+1)(2n+5)+26\\4n^2+16n+15&=4n^2+12n+5+26\\4n&=16\\n&=4.\end{aligned}$$

Entonces los números buscados son 9, 11 y 13.

Comprobación: Si $2n+1=9$, $2n+3=11$ y $2n+5=13$, entonces,

Lado izquierdo: $(2n+3)(2n+5)=11(13)=143.$
Lado derecho: $(2n+1)(2n+5)+26=9(13)+26=143.$

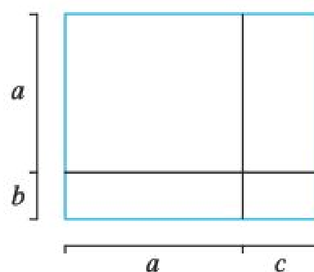


Figura 7.5

Para encontrar el área del rectángulo de la figura 7.5, sumamos el área del cuadrado de lado a más el área de los rectángulos con lados $a, b; a, c$ y b, c, respectivamente.

Si multiplicamos directamente obtenemos:

$$(a+b)(a+c)=a^2+ac+ab+bc=a^2+a(b+c)+bc.$$

Este producto aparece con tanta frecuencia, sobre todo al estudiar polinomios en una sola variable y al resolver ecuaciones de segundo grado, que conviene memorizarlo.

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc. \tag{7.6}$$

EJEMPLOS

1. Desarrollar $(x+2)(x+3)$.

Solución:

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3)&=x^2+(2+3)x+(2)(3)\\&=x^2+5x+6.\end{aligned}$$

2. Desarrollar $(2x-5)(2x+8)$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x-5)(2x+8)&=(2x)^2+2x(-5+8)+(-5)(8)\\&=4x^2+6x-40.\end{aligned}$$

3. Desarrollar $(4y-\frac{2}{3})(4y-\frac{5}{3})$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(4y-\frac{2}{3}\right)\left(4y-\frac{5}{3}\right)&=(4y)^2+4y\left(-\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\\&=16y^2-\frac{28}{3}y+\frac{10}{9}.\end{aligned}$$

7.4.1 Ejercicios

Encuentra cada producto utilizando la fórmula del producto de una suma por una diferencia.

1. 27×33
2. 16×24
3. 78×82
4. 105×95
5. 59×61
6. 43×37

Desarrolla los siguientes productos.

7. $(a-9)(a+9)$
8. $(5+y)(5-y)$
9. $(z+7)(z-7)$
10. $\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$
11. $\left(4y+\frac{1}{6}\right)\left(4y-\frac{1}{6}\right)$
12. $\left(\frac{6}{7}+w\right)\left(\frac{6}{7}-w\right)$
13. $(-a+20)(-a-20)$
14. $(6-2b)(6+2b)$
15. $(3b-11)(3b+11)$
16. $(7x+1)(7x+1)$
17. $(c-8)(c+8)$
18. $(-5x+7)(5x+7)$
19. $(9-4y)(9+4y)$
20. $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$
21. $(12x+3y)^2$
22. $(8d+12)(8d-12)$
23. $(6y-2)(6y+2)$
24. $(x-\pi)(x+\pi)$
25. $\left(2x^2-25\right)\left(2x^2+25\right)$
26. $(8z-9w)^2$
27. $(y+5z)(y-5z)$
28. $\left(\frac{5}{4}t-\frac{11}{5}\right)^2$
29. $\left(\frac{3}{5}x-10\right)^2$
30. $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{4}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)$
31. $(x-2)(x+3)$
32. $(x+8)(x-9)$
33. $(x-4)(x+1)$
34. $(y+6)(y+7)$
35. $(z+11)(z-3)$
36. $(x-15)(x+20)$
37. $(5t-5)(5t-9)$
38. $(x-5)(x+3)$
39. $(x-1)(x+1)$
40. $\left(x^2-2\right)\left(x^2-6\right)$
41. $(y-13)(y+1)$
42. $(4t+9)(4t-3)$
43. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}\right)$
44. $\left(t^2+\frac{1}{6}\right)\left(t^2+6\right)$
45. $\left(5x^2-\frac{1}{10}\right)\left(5x^2-\frac{5}{4}\right)$
46. $\left(2a^6+3\right)\left(2a^6-2\right)$
47. $\left(8b^5c^4-1\right)\left(8b^5c^4+8\right)$
48. $\left(3x^3+4\right)\left(3x^3+3\right)$
49. $\left(\frac{7}{6}y-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{6}y-\frac{11}{6}\right)$
50. $\left(\frac{1}{3}x-3\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$
51. $\left(\frac{2}{3}z^4y^3+5\right)\left(\frac{2}{3}z^4y^3-\frac{1}{5}\right)$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

52. $(y-6)(y+6)=(y+4)(y-7)$
53. $(x+2)(x+3)=(x-5)^2$
54. $(2z-8)(z+9)+2z^2=(2z-2)^2$
55. $(3w-5)^2=(3w+7)^2$
56. $(x+6)(x+8)=(x-6)(x-8)$
57. $(x-5)^2=(x-3)(x+3)$

Traduce al lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

58. Con una cartulina de forma rectangular, se quiere construir una caja abierta. Para ello se quitan cuadrados iguales de lado h en cada esquina y se doblan hacia arriba los bordes. Encuentra la fórmula del volumen si la cartulina mide:
    a. 12 cm de largo y 12 cm de ancho.
    b. 8 cm de largo y 5 cm de ancho.
59. El área de un círculo de radio r es πr^2. ¿Cuál es la fórmula del área A del anillo que se obtiene de quitar a un círculo de radio y un círculo de radio x con el mismo centro?
60. Un número de tres dígitos es tal que al efectuar el producto de la suma del dígito de las decenas más el de las centenas por la suma del dígito de las centenas más el de las unidades, se obtiene 48. Si se sabe además que todos los dígitos son pares y cada uno es exactamente 2 unidades menor que el que se encuentra a la derecha, entonces escribe la ecuación resultante.
61. Un número de tres cifras satisface las siguientes dos condiciones:

    El producto de la suma de la cifra de las decenas más la de las unidades por la diferencia del dígito de las decenas menos el de las centenas es igual al opuesto de la diferencia del doble de las unidades menos tres.

    El producto de la suma de la cifra de las centenas más la de las decenas por la diferencia del dígito de las centenas menos el de las decenas es igual al dígito de las unidades.

    a. Traduce y simplifica obteniendo dos ecuaciones.
    b. Si la cifra de las decenas es una unidad menor que la de las centenas, encuentra el número.
62. Considera tres números enteros consecutivos. Efectúa la suma del tercero más el primero, resta 1, y multiplica lo obtenido por el segundo. ¿El cubo del segundo número es el resultado obtenido?

7.5 OTROS PRODUCTOS NOTABLES

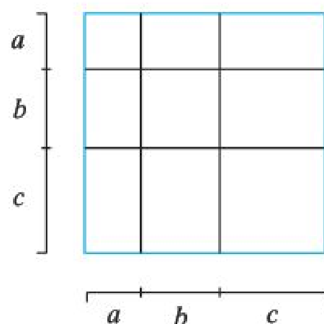


Figura 7.6

En la figura 7.6 podemos observar que el área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado cuyo lado es a, más el área de dos rectángulos con lados a y b, más el área de dos rectángulos con lados a y c, más el área del cuadrado con lado b, más el área de dos rectángulos con lados b y c, más el área del cuadrado con lado c. Es decir,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.$$

Obtenemos el mismo resultado si factorizamos el producto:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Es decir, debemos sumar los cuadrados de cada sumando y los dobles productos que podemos formar con los tres elementos a, b y c.

EJEMPLOS

1. Desarrollar $(2x+5y+4z)^2$.

   Solución: No hace falta efectuar el producto. Podemos utilizar el resultado obtenido en (7.7)

$$\begin{aligned}(2x+5y+4z)^2 &= (2x)^2 + (5y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(5y) + 2(2x)(4z) + 2(5y)(4z) \\ &= 4x^2 + 25y^2 + 16z^2 + 20xy + 16xz + 40yz.\end{aligned}$$

2. Desarrollar $(6a-7b+8c)^2$.

   Solución:

$$\begin{aligned}(6a-7b+8c)^2 &= (6a)^2 + (-7b)^2 + (8c)^2 + 2(6a)(-7b) + 2(6a)(8c) + 2(-7b)(8c) \\ &= 36a^2 + 49b^2 + 64c^2 - 84ab + 96ac - 112bc.\end{aligned}$$

Otros productos notables que aparecen con frecuencia son: el cubo de una suma y el cubo de una diferencia:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (7.8)$$

Para probar la primera identidad de (7.8) haremos el producto indicado por la potencia:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Ahora probaremos la segunda identidad utilizando la primera identidad de (7.8):

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Desarrollar $(6w+8z)^3$.

Solución: Aplicamos el resultado obtenido en (7.8):

$$\begin{aligned}(6w+8z)^3 &= (6w)^3 + 3(6w)^2(8z) + 3(6w)(8z)^2 + (8z)^3\\ &= 216w^3 + 864w^2z + 1152wz^2 + 512z^3.\end{aligned}$$

2. Desarrollar $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{5}\right)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{5}\right)^3 &= \left(\frac{x}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3\\ &= \frac{x^3}{27} - 3\left(\frac{x^2}{9}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{9}{25}\right) - \frac{27}{125}\\ &= \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{5} + \frac{9x}{25} - \frac{27}{125}.\end{aligned}$$

Otros productos relacionados con cubos son:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

7.5.1 Ejercicios

Desarrolla los siguientes productos.

1. $(x+y+8)^2$
2. $(3r+7s+2)^2$
3. $(a-b+c)^2$
4. $(5w-9z+6)^2$
5. $(a-b-c)^2$
6. $(4x+3y-5z)^2$
7. $\left(\frac{3}{2}r-\frac{1}{4}s-\frac{2}{3}t\right)^2$
8. $\left(\frac{5a+4b-8c}{4}\right)^2$
9. $(6w+2z)^3$
10. $\left(9r+\frac{7}{3}s+\frac{2}{3}\right)^2$
11. $(-3x+4y)^3$
12. $(7a-5b)^3$
13. $(a^2-6b-9)^2$
14. $(-w^2-6z)^3$
15. $(a+b)^4$
16. $\left(\frac{1}{6}r-\frac{1}{3}s\right)^3$
17. $\left(\frac{c}{5}+\frac{d}{2}\right)^3$
18. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}y\right)^3$
19. $(x-y)^4$
20. $(5a-8)^3$
21. $(a+b+c)^3$
22. $(6x+11)^3$
23. $(7a+9b)^3$
24. $(10x-3y)^2$
25. $\left(\frac{1}{2}z-4\right)^3$
26. $\left(\frac{1}{3}w+\frac{1}{5}\right)^3$
27. $\left(\frac{r}{2}+\frac{s}{4}+\frac{t}{8}\right)^2$
28. $(x+y)^5$
29. $(a+b)^6$
30. $(w-z)^7$

Utilizando los productos notables simplifica las siguientes expresiones.

31. $(2+5a-4b)^2-(4b-5a-2)^2$
32. $(x+y)^3+(x-y)^3-6xy^2$
33. $(x+y)^2+(x-y)^2-2(x^2-y^2)$
34. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$
35. $2(w+z)^2(w-z)-2(w-z)^2(w+z)$
36. $\left((x+y)^2-x+y\right)^2$
37. $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$
38. $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$
39. $\left((x+3)^2-4\right)^3$
40. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
41. $(a-b)(a^2+b^2)(a+b)$
42. $(z-w+x-y)(y-x+z-w)$
43. $(x^3+y^4)(y^8-x^3y^4+x^6)$
44. $(z^2-wz+w^2)(w^2+wz+z^2)$
45. $(x-y+z)\left((x-y)^2-y(x-z)+z^2\right)$
46. $(r+s)^3-3(r+s)^2(r-s)-(r-s)^3+3(r+s)(r-s)^2$

Prueba las siguientes igualdades.

47. $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
48. $x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$
49. $w^6-z^6=(w-z)(w+z)(w^4+w^2z^2+z^4)$
50. $a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$
51. $a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$
52. $x^8-y^8=(x-y)(x^4+y^4)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$
53. $w^9-z^9=(w-z)(w^8+w^7z+w^6z^2+w^5z^3+w^4z^4+w^3z^5+w^2z^6+wz^7+z^8)$

7.6 Factorización de polinomios

En lo que resta de este capítulo estudiaremos cómo factorizar polinomios como producto de polinomios más sencillos y de grado menor o igual que el polinomio original.

7.6.1 Máximo común divisor (MCD) de monomios

Podemos extender el concepto de *máximo común divisor* (MCD) a monomios.

Para encontrar el MCD de dos o más monomios, tenemos que encontrar el MCD de los coeficientes y multiplicarlo por las mínimas potencias de las variables que aparecen en todos los monomios.

EJEMPLOS

1. Encontrar el MCD de $20x^3y^2$ y $16x^2y^4z$.

Solución: El MCD de 20 y 16 es 4.
Las potencias de las variables que aparecen en ambos monomios son x y y.

Primer monomio	$\rightarrow$	x^3;	y^2
Segundo monomio	$\rightarrow$	x^2;	y^4
		$\downarrow$	$\downarrow$
Las mínimas potencias de cada variable común son	$\rightarrow$	x^2	y^2.

El MCD de $20x^3y^2$ y $16x^2y^4z$ es $4x^2y^2$.

2. Encontrar el MCD de $30w^5x^3y^4z^3$, $42x^2yz^5$, $54x^4y^3z^4$.

Solución: El MCD de 30, 42 y 54 es 6.
Las variables comunes son x, y y z.
x^2, y y z^3 son las mínimas potencias de las variables, que son comunes a los tres monomios.
Por tanto, el MCD de $30w^5x^3y^4z^3$, $42x^2yz^5$ y $54x^4y^3z^4$ es $6x^2yz^3$.

7.6.2 Máximo común divisor (MCD) de un polinomio

Recuerda que para encontrar el MCD de dos o más números, el algoritmo de Euclides es una manera sencilla y sistemática de hacerlo.

El *MCD de un polinomio* es el MCD de sus términos. El MCD de un polinomio nos sirve para factorizar el polinomio como producto de su MCD y otro polinomio más sencillo que el original.

EJEMPLOS

1. Factorizar el MCD de $20a^3b^2 - 45a^2b^5$.

Solución: El MCD de $20a^3b^2$ y $45a^2b^5$ es $5a^2b^2$.
Escribimos

$$20a^3b^2 - 45a^2b^5 = 5a^2b^2\left(4a - 9b^3\right).$$

2. Factorizar el MCD de $14m^3n^5p^4 + 35m^4n^3q - 49m^4n^4p^3q^4$.

Solución: El MCD de $14m^3n^5p^4$, $35m^4n^3q$, $49m^4n^4p^3q^4$ es $7m^3n^3$.
Escribimos

$$14m^3n^5p^4 + 35m^4n^3q - 49m^4n^4p^3q^4 = 7m^3n^3\left(2n^2p^4 + 5mq - 7mnp^3q^4\right).$$

7.6.3 Ejercicios

Encuentra el MCD de los siguientes monomios.

1. $3a^4; 12a^6$
2. $6b^3; 4b^5$
3. $21c^2; 26c$
4. $-36x^7y^9; 60x^5y^{11}$
5. $a^3b^8x^{10}; -a^3b^6x$
6. $18a^4b^5; 27c^3d^9$
7. $-30xy^6z^2; -50y^3z$
8. $24x^5y^3z^6; 64x^4y^4z^4$
9. $30a^4b; 55a^3b^2; 35a^2b^3$
10. $-2x^4y^6; 18x^7y^9; -26x^4y^7$
11. $8r^2s^2; -16rs^2t; 24r^2s^3t^2$
12. $27r^6s^4t; 72r^3s^5t^2; 63r^4s^7t^3$

13. $-10c^8d^4e^3; -25c^4d^2e^5; -40c^5d^2e^2$

14. $11x^3y^3z^3; -x^4z^6w^2; 5x^5y^3z^4w$

15. $-42a^3bc^6; -56a^5b^2c^5; -28a^4b^3c^4$

16. $27a^9b^{11}c^7; 33a^4b^{10}c^8; 18a^5b^{12}c^6$

17. $75w^{14}x^{10}y^{12}z^9; 200w^{11}x^8y^{13}z^{21}; 125w^{20}x^{12}y^{17}z^{32}$

18. $-54r^{20}s^{18}t^{31}; -78r^{23}s^{30}t^{10}; -120r^{21}s^{25}t^{27}; -102r^{24}s^{19}t^{15}$

19. $21a^3b^9; 25c^3d^8; 31e^4f^7; x^5y^7z^4; 17a^4c^3e^7y^5$

20. $40a^{16}b^7c^{19}d^8; -160a^6b^{13}c^{23}d^{10}; 320a^{14}b^{18}c^{22}d^{25}$

Factoriza el MCD de cada uno de los siguientes polinomios.

21. $8z^2+4z$

22. $y^7+6y^4+5y^2+1$

23. $9x^3+6x^2+3xy$

24. $6t^3-4t^2-2t$

25. w^5+3w^2

26. x^4-16x^2

27. $3y^2+9y-27$

28. $2t^2-7t+10$

29. $24t^6+8t^4-16t^2$

30. $15a^3x+5a^3y+10a^3z$

31. w^2+1

32. $33x^2y^2-3xy^3$

33. $4x^2y-12xy^2+8xy$

34. $-8t^2-18t^3+4t^5$

35. $-15s^4t-25s^2t^2-20st^3$

36. $10a^4x^3+a^3x^4+13a^2x^3$

37. $4x^{10}y^4-6x^6y^6-12x^5y^8$

38. $15c^7d^8e^3-24c^6d^{11}e^4+21c^5d^{12}e^5$

39. $21a^5b^2c^3-35a^4b^6c^4-49a^3b^3c^2$

40. $44r^{16}s^{18}+66r^{10}s^{20}-88r^7s^{21}$

41. $35b^3y^2z+10b^2y^3z+45b^5y^2z^2$

42. $2x^4y^{12}-8x^5y^{11}-6x^8y^9+4x^6y^{13}$

43. $-64w^{24}x^{32}z^{43}-25w^{18}x^{45}z^{72}-12$

44. $56r^{10}s^7t^9-64r^{12}s^5t^{11}+72r^{11}s^9t^{12}$

45. $36a^8b^{23}c^{17}+55a^{11}b^{13}c^9+17a^{15}b^{33}$

46. $x^2y^7+x^6y^2-x^4y^3+x^2y^2-x^9y^3+x^{12}y^4$

47. $72r^{31}s^{26}t^{21}+24r^{23}s^{26}t^{15}-84r^{40}s^{21}t^{19}-18r^{34}s^{21}t^{17}+108r^{29}s^{30}t^{20}-120r^{38}s^{23}t^{16}$

48. $-30a^9b^{15}c^3d^{15}-105a^7b^{10}c^8-135a^{12}b^6c^{15}d^4-45a^9b^{18}c^{23}d^{11}-60a^{19}b^{13}c^9d^{12}$

49. $66x^4\left(x^3-2y^2\right)^5+121x^3y^5\left(x^3-2y^2\right)^6-132x^5y\left(x^3-2y^2\right)^4$

50. $\left(z^2+4zy+y^2\right)^3-z^4\left(z^2+4zy+y^2\right)^4+y^4\left(z^2+4zy+y^2\right)^3$

7.7 Factorización por agrupamiento

La suma de un número y su recíproco es igual a $-\frac{10}{3}$. Encontrar el número.

Solución: Llamemos z al número; entonces su recíproco es $\frac{1}{z}$.

Planteamos la ecuación:

$$z+\frac{1}{z}=-\frac{10}{3}. \qquad (7.9)$$

Resolvemos la ecuación. Para ello, multiplicamos la ecuación por z y después por 3:

$$z+\frac{1}{z}=-\frac{10}{3}$$

$$z^2+1=z\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$3z^2+3=-10z.$$

Ahora pasamos todos los términos de un lado de la igualdad para tener una ecuación igualada a cero:

$$3z^2+10z+3=0.$$

Para factorizar el polinomio $3z^2+10z+3$, escribimos el término $10z$ de la siguiente manera:

$$3z^2+(9z+z)+3=0.$$

Agrupando y factorizando obtenemos:

$$\begin{aligned}3z^2+(9z+z)+3&=0\\(3z^2+9z)+(z+3)&=0\\3z(z+3)+(z+3)&=0\\(3z+1)(z+3)&=0.\end{aligned}$$

Para que el producto de dos factores sea cero, alguno de ellos debe ser cero; por tanto,

$$3z+1=0 \quad \text{o} \quad z+3=0.$$

De donde hay dos soluciones:

$$z=-\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad z=-3.$$

Comprobación: Sustituimos $z=-\frac{1}{3}$ en la ecuación (7.9):

$$z+\frac{1}{z}=\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}.$$

Sustituimos $z=-3$ en la ecuación (7.9):

$$z+\frac{1}{z}=(-3)+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{10}{3}.$$

La clave de esta factorización es la ley distributiva

$$ac+bc=(a+b)c \tag{7.10}$$

y lo importante es tener presente que a, b y c pueden ser cualesquiera expresiones algebraicas.

EJEMPLOS

1. Factorizar $x(x-1)+5(x-1)$.

Solución: Usamos la ley distributiva (7.10) haciendo:

$$a=x,\ b=5,\ c=x-1,$$

así

$$x(x-1)+5(x-1)=(x+5)(x-1).$$

2. Factorizar $5y(x^2-2)-3x(2-x^2)$.

Solución: Observamos que x^2-2 y $2-x^2$ son opuestos, por lo que al factorizar -1 de uno de ellos, obtenemos el otro.

$$5y(x^2-2)-3x(2-x^2)=5y(x^2-2)-(-1)3x(-2+x^2)$$
$$=5y(x^2-2)+3x(x^2-2)=(x^2-2)(5y+3x).$$

3. Factorizar $8xz-4xy-14z+7y$.

Solución: Los términos de este polinomio no tienen ningún factor común; sin embargo, si agrupamos los términos que comparten algunos factores obtenemos:

$$8xz-4xy-14z+7y=(8xz-4xy)+(-14z+7y)$$
$$=4x(2z-y)-7(2z-y)=(4x-7)(2z-y).$$

4. Resolver la ecuación $y(y+8)-3(y+8)=0$.

Solución: Primero factorizamos la ecuación:

$$y(y+8)-3(y+8)=0$$
$$(y-3)(y+8)=0.$$

Recuerda que el producto de dos factores es igual a cero si, y sólo si, alguno de los factores es igual a cero. Entonces,

$$y-3=0 \qquad \text{o} \qquad y+8=0$$
$$y=3 \qquad\qquad\quad y=-8.$$

Las soluciones son $y=3$, $y=-8$.

Comprobación: Sustituimos $y=3$ en la ecuación original:

$$y(y+8)-3(y+8)=3(3+8)-3(3+8)=0.$$

Sustituimos $y=-8$ en la ecuación original:

$$y(y+8)-3(y+8)=-8(-8+8)-3(-8+8)=0.$$

En dos de los ejemplos anteriores utilizamos la siguiente propiedad:

Propiedad del cero en la multiplicación

Dados dos números reales a y b, tenemos que:

$ab=0$ si, y sólo si, $a=0$ o $b=0$.

Seguiremos usando esta propiedad para resolver ecuaciones.

Como vimos en el capítulo 3, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Una ecuación polinomial es una ecuación en la que las expresiones de ambos lados de la igualdad son polinomios. Las ecuaciones polinomiales, una vez igualadas a cero y simplificadas, suelen nombrarse de acuerdo con el grado del polinomio distinto de cero que aparece en ellas.

$5x+3=0$ es una *ecuación lineal* o de *primer grado.*

$4x^2+7x-5=0$ es una *ecuación cuadrática* o de *segundo grado.*

$7x^3-10x^2+8x-21=0$ es una *ecuación cúbica* o de *tercer grado.*

$x^4+5x^2-9x=0$ es una *ecuación de cuarto grado.*

Resolver una ecuación significa encontrar los valores numéricos de las variables para los cuales la igualdad propuesta es verdadera.

Para resolver una ecuación polinomial:

I. Pasamos todos los términos de un lado de la ecuación de manera que el polinomio quede igualado a cero.

II. Factorizamos el polinomio.

III. Utilizamos la propiedad del cero en la multiplicación, es decir, el polinomio es igual a cero si, y sólo si, alguno de los factores es cero.

Más adelante veremos otros métodos para resolver ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLOS

1. Resolver $2x^2+4x+10=x^2-4x-5$.

Solución:

I. Pasamos todos los términos de un lado de la ecuación de manera que el polinomio quede igualado a cero:

$$2x^2+4x+10-x^2+4x+5=0$$
$$x^2+8x+15=0.$$

II. Factorizamos el polinomio.

$$x^2+8x+15=0$$
$$x^2+3x+5x+15=0$$
$$x(x+3)+5(x+3)=0$$
$$(x+3)(x+5)=0.$$

III. Utilizamos la propiedad del cero en la multiplicación:

$$(x+3)=0 \quad \text{o} \quad (x+5)=0,$$

de donde:

$$x=-3 \quad \text{o} \quad x=-5.$$

Comprobación: Si $x=-3$, entonces,

Lado derecho: $x^2-4x-5=(-3)^2-4(-3)-5=16.$

Lado izquierdo: $2x^2+4x+10=2(-3)^2+4(-3)+10=16.$

Si $x=-5$, entonces

Lado derecho: $x^2-4x-5=(-5)^2-4(-5)-5=40.$

Lado izquierdo: $2x^2+4x+10=2(-5)^2+4(-5)+10=40.$

2. Resolver $3x^2 + 21x = 9 - 23x - 2x^2$.

Solución:

I. Pasamos todos los términos de un lado de la ecuación de manera que el polinomio quede igualado a cero:

$$3x^2 + 21x = 9 - 23x - 2x^2$$
$$3x^2 + 21x - 9 + 23x + 2x^2 = 0$$
$$5x^2 + 44x - 9 = 0.$$

II. Factorizamos el polinomio:

$$5x^2 + 44x - 9 = 0$$
$$5x^2 + 45x - x - 9 = 0$$
$$5x(x+9) - (x+9) = 0$$
$$(x+9)(5x-1) = 0.$$

III. Utilizamos la propiedad del cero en la multiplicación:

$$(x+9) = 0 \quad \text{o} \quad (5x-1) = 0,$$

de donde

$$x = -9 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{5}.$$

Comprobación: Si $x = -9$, entonces

Lado izquierdo: $9 - 23x - 2x^2 = 9 - 23(-9) - 2(-9)^2 = 54.$

Lado derecho: $3x^2 + 21x = 3(-9)^2 + 21(-9) = 54.$

Si $x = \frac{1}{5}$, entonces

Lado izquierdo: $9 - 23x - 2x^2 = 9 - 23\left(\frac{1}{5}\right) - 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{108}{25}.$

Lado derecho: $3x^2 + 21x = 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 21\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{108}{25}.$

7.7.1 Ejercicios

Factoriza los siguientes polinomios.

1. $6(x-8) + y(x-8)$
2. $a(a+7) - 9(a+7)$
3. $z(z-1) - 12(z-1)$
4. $9(10-x) - x(x-10)$
5. $3w(w-2) - 16(w-2)$
6. $x(8+y) + z(8+y)$
7. $y(y+4) - 20(y+4)$
8. $13(5w-2) - w(5w-2)$
9. $w(x^2-3) + 7(3-x^2)$
10. $a^2(a-1) - 6(1-a)$
11. $z(x^2+y) - y(x^2+y)$
12. $3y(y+5) + z(5+y)$
13. $z^2(z^2-1) - (z^2-1)$
14. $5a(4b-a) - 6b(a-4b)$
15. $3x^3 - 5x^2 - 6x + 10$
16. $y^3 - 3y^2 + 9y - 27$
17. $2(4w-9z) - 6w^2(4w-9z)$
18. $ab - 3ac + 3b - 9c$
19. $w^2 - zw + 6w - 6z$
20. $a^2 - 7ab - 3ac + 21bc$
21. $y^4 - y^3 - y + 1$
22. $b^2 - 6b + 10b - 60$
23. $x^3 + 4x^2 + 3x + 12$
24. $6z^4 + 8z^3 - 9z^2 - 12z$
25. $a(2-a) + 5(a-2)$
26. $y^5 + 5y^3 - 4y^2 - 20$
27. $40w^2 + 5wy + 16w + 2y$

En los ejercicios 28 a 36, resuelve las ecuaciones.

28. $14y^2-112y=0$

29. $8z^2-68z=-32$

30. $3w^2=-17w-10$

31. $y^2+4y-45=0$

32. $(x-1)(x+5)=13x-5$

33. $x(x-10)-11(x-10)=0$

34. $z(z-9)+9(z-9)=0$

35. $2z(z-6)+5(z-6)=0$

36. $x^2-13x+12=0$

37. Un número menos su recíproco es igual a $-\frac{8}{3}$. Encuentra los números.

38. La suma de un número y su recíproco es igual a $\frac{17}{4}$. Encuentra los números.

39. El recíproco de un número más el doble del número es igual a $\frac{9}{2}$. Encuentra los números.

40. Los catetos de un triángulo rectángulo miden x y $3x+3$, y la hipotenusa mide $4x-3$. ¿Cuánto mide cada cateto y la hipotenusa del triángulo?

41. Los números x, $5x+5$ y $6x-5$ satisfacen que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero. Encuentra dichos números.

42. En un partido de beisbol, el bateador envía la pelota directamente hacia arriba a una velocidad de 29.4 m/seg. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire antes de que la atrape el cátcher? La pelota tarda el mismo tiempo en subir que en bajar. ¿A qué altura llegó la pelota? La relación entre la altura y el tiempo está dada por la ecuación $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, donde $g=9.8$ m/seg^2 es la aceleración debida a la gravedad y v_0 es la velocidad inicial.

43. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo es 2 unidades menor que el otro. El área del triángulo es igual a 35. ¿Cuánto vale el cuadrado de la hipotenusa?

44. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que el segundo elevado a la cuarta menos el primero elevado también a la cuarta es igual al doble producto del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

45. Si un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 44.1 m/seg, ¿cuánto tardará en llegar al suelo? (Usa la fórmula del problema 42.)

7.8 Factorización de trinomios: $x^2 + bx + c$

¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 27 en dicho sistema sea 123?

Solución: Debemos escribir el número 123 en forma desarrollada. Recuerda que en los sistemas de numeración posicionales, cada posición indica una potencia de la base; así, el 1 está en el lugar de la base al cuadrado, el 2 está en el lugar de la base a la primera potencia y el 3 está en el lugar de la base elevada a cero. Por tanto, el número se escribe

$$1a^2+2a^1+3a^0$$

y como este número es igual a 27, entonces la ecuación que obtenemos es:

$$a^2+2a+3=27. \qquad (7.11)$$

Pasamos todos los términos de un lado de la igualdad, para obtener una ecuación igualada a cero:

$$a^2+2a+3=27$$
$$a^2+2a+3-27=0$$
$$a^2+2a-24=0.$$

Recordemos que en la página 195 vimos el producto notable

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc.$$

Debemos encontrar dos números b y c tales que el producto de ellos sea -24 y cuya suma sea 2. Tales números son 6 y -4. Así

$$(a+6)(a-4)=a^2+2a-24,$$

y por tanto debemos resolver:

$$(a+6)(a-4)=0.$$

Por la propiedad del cero en la multiplicación tenemos que:

$$(a+6)=0 \quad \text{o} \quad (a-4)=0.$$

Despejando obtenemos las soluciones:

$$a=-6 \quad \text{o} \quad a=4.$$

Como las bases de los sistemas de numeración deben ser positivas, entonces nos quedamos con el 4. El número 123 es la representación de 27 en base 4.

Comprobación: Sustituimos $a=4$ en la ecuación (7.11):

$$a^2+2a+3=(4)^2+2(4)+3=16+8+3=27.$$

Como hemos visto en el proceso de factorización, es conveniente recordar los productos notables vistos al principio de este capítulo.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\\ (a+b)(a+c) &= a^2+a(b+c)+bc.\end{aligned} \qquad (7.12)$$

Ahora veremos cómo factorizar trinomios utilizando los productos anteriores.

EJEMPLOS

1. Factorizar el trinomio $x^2-11x+30$, en dos factores lineales.

Solución: Queremos factorizar al trinomio como el producto de dos binomios:

$$x^2-11x+30=(x+b)(x+c).$$

Observamos el cuarto producto notable de la lista anterior y ponemos x en el lugar de la a. Debemos encontrar dos números b y c tales que el producto de ellos sea 30 (el término independiente) y cuya suma sea -11 (el coeficiente de x).

Probamos con los factores enteros; como 30 es positivo, b y c deben tener el mismo signo para que su producto sea positivo. Como -11 es negativo, b y c deben ser negativos.

Los números buscados son -5 y -6, así que:

$$x^2-11x+30=(x-5)(x-6).$$

Podemos comprobar directamente lo anterior multiplicando los dos factores.

2. Factorizar el trinomio $x^2-3x-28$.

Solución: Pensamos en:

$$x^2-3x-28=(x+b)(x+c).$$

Debemos encontrar ahora dos números b y c tales que su producto sea -28 y cuya suma sea -3.

Como -28 es negativo, b y c deben tener signo contrario, y como -3 es negativo, el número negativo debe tener mayor valor absoluto que el número positivo.

Los números buscados son -7 y 4, así que:

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4).$$

3. Resolver la ecuación $y^2 + 3y - 54 = 0$.

Solución: Primero debemos factorizar el trinomio $y^2 + 3y - 54$ como un producto de dos binomios,

$$y^2 + 3y - 54 = (y + b)(y + c),$$

es decir, debemos encontrar b y c tales que el producto de ellos sea -54 y cuya suma sea 3. Los números buscados son -6 y 9, así que:

$$y^2 + 3y - 54 = (y - 6)(y + 9)$$

y

$$(y - 6)(y + 9) = 0.$$

Ahora, utilizando la propiedad del cero en la multiplicación, tenemos que:

$$y - 6 = 0 \quad \text{o} \quad y + 9 = 0$$
$$y = 6 \qquad\qquad y = -9.$$

Las soluciones son $y = 6$, $y = -9$.

Comprobación: Sustituimos $y = 6$ en la ecuación original:

$$y^2 + 3y - 54 = (6)^2 + 3(6) - 54 = 36 + 18 - 54 = 0.$$

Sustituimos $y = -9$ en la ecuación original:

$$y^2 + 3y - 54 = (-9)^2 + 3(-9) - 54 = 81 + (-27) - 54 = 0.$$

4. Factorizar el trinomio $x^2 + 14x + 24$.

Solución: Hacemos

$$x^2 + 14x + 24 = (x + b)(x + c).$$

Ahora debemos encontrar dos números b y c tales que su producto sea 24 y cuya suma sea 14.

Como 24 es positivo, b y c deben tener el mismo signo; y como 14 es positivo, b y c deben ser positivos.

Los números buscados son 12 y 2, así que

$$x^2 + 14x + 24 = (x + 12)(x + 2).$$

Observa que otras factorizaciones de 24 no sirven; por ejemplo,

$$24 = 4 \times 6 \quad \text{pero} \quad 4 + 6 = 10$$
$$24 = 24 \times 1 \quad \text{pero} \quad 24 + 1 = 25.$$

5. Factorizar el trinomio $12 + 4z - z^2$.

Solución: Observa que en este ejemplo el coeficiente de z^2 es -1; entonces factorizamos el -1, es decir,

$$12+4z-z^2=-1(z^2-4z-12)=-1(z+b)(z+c).$$

Ahora debemos encontrar dos números b y c tales que su producto sea -12, y cuya suma sea -4. Como -12 es negativo, b y c deben tener distinto signo; y como -4 es negativo, el número negativo debe tener valor absoluto mayor que el positivo.

Los números buscados son -6 y 2, así que:

$$-1(z^2-4z-12)=-1(z-6)(z+2)=(-z+6)(z+2).$$

6. Factorizar el trinomio $-3x^3-3x^2+126x$.

Solución: Lo primero que observamos es que todos los términos tienen un factor común, así que factorizamos primero $-3x$.

$$-3x^3-3x^2+126x=-3x(x^2+x-42).$$

El factor entre paréntesis es del tipo de los ejemplos anteriores, por lo que buscamos ahora dos números b y c cuyo producto sea -42 y su suma sea 1. Dichos números son $b=7$ y $c=-6$, así que:

$$-3x^3-3x^2+126x=-3x(x+7)(x-6).$$

7. Resolver la ecuación $2y^4-4y^3-126y^2=0$.

Solución: Factorizamos primero $2y^2$.

$$2y^4-4y^3-126y^2=2y^2(y^2-2y-63).$$

Buscamos dos números cuyo producto sea -63 y cuya suma sea -2. Dichos números son -9 y 7.

$$2y^4-4y^3-126y^2=2y^2(y-9)(y+7).$$

Entonces la ecuación que tenemos que resolver es:

$$2y^2(y-9)(y+7)=0.$$

Ahora utilizamos la propiedad del cero en la multiplicación, por lo que:

$$\begin{aligned}2y^2&=0\\ y&=0\end{aligned}\quad \text{o}\quad \begin{aligned}y-9&=0\\ y&=9\end{aligned}\quad \text{o}\quad \begin{aligned}y+7&=0\\ y&=-7.\end{aligned}$$

Las soluciones son $y=0$, $y=9$, $y=-7$.

Comprobación: Sustituimos $y=0$ en la ecuación original:

$$2y^4-4y^3-126y^2=2(0)^4-4(0)^3-126(0)^2=0.$$

Sustituimos $y=9$ en la ecuación original:

$$2y^4-4y^3-126y^2=2(9)^4-4(9)^3-126(9)^2=13122-2916-10206=0.$$

Sustituimos $y = -7$ en la ecuación original:

$$2y^4 - 4y^3 - 126y^2 = 2(-7)^4 - 4(-7)^3 - 126(-7)^2 = 4802 + 1372 - 6174 = 0.$$

7.8.1 Ejercicios

Factoriza los siguientes trinomios.

1. $x^2 + 7x + 10$
2. $y^2 + 3y - 4$
3. $15 + 2w - w^2$
4. $z^2 + 14z + 49$
5. $y^2 - 9y + 18$
6. $54 - 3x - x^2$
7. $x^2 - 18x + 81$
8. $z^2 - 10z + 21$
9. $z^2 + z - 110$
10. $y^2 - 12y + 36$
11. $w^2 - 17w + 72$
12. $x^2 - 9x - 36$
13. $x^2 + 24x + 144$
14. $60 + 7t - t^2$
15. $y^2 - y - 30$
16. $z^2 + 13z + 22$
17. $5w^3 + 10w^2 - 315w$
18. $8 - 7s - s^2$
19. $t^2 - 2t - 3$
20. $z^2 + 13z + 40$
21. $-3x^5 + 3x^4 + 60x^3$
22. $30 + 7y - y^2$
23. $9 - 8x - x^2$
24. $z^2 + 14z + 48$
25. $w^2 - 4w - 32$
26. $y^2 + 10y + 24$
27. $2t^4 + 22t^3 + 36t^2$
28. $x^2 + x - 30$
29. $72 + 6y - y^2$
30. $w^2 - 10w - 11$
31. $45 - 4z - z^2$
32. $x^2 + 15x + 56$
33. $12y^2 - 12y - 144$
34. $y^2 + 6y + 5$
35. $z^2 - z - 42$
36. $13 + 12x - x^2$

Factoriza los siguientes polinomios.

37. $x^2(x^2 - 2x + 1) + 5x(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 - 2x + 1)$
38. $y^2(y^2 - 4y + 3) + 4y(y^2 - 4y + 3) - 32(y^2 - 4y + 3)$
39. $z^2(z^2 + 4z + 12) + 10z(z^2 + 4z + 12) + 21(z^2 + 4z + 12)$
40. $w^2(w^2 - 3w - 28) + 2w(w^2 - 3w - 28) - 15(w^2 - 3w - 28)$

En los ejercicios 41 a 49, resuelve las ecuaciones.

41. $x^2 - 6x - 16 = 0$
42. $y^5 - 4y^4 = 45y^3$
43. $2z^6 + 4z^5 = 160z^4$
44. $-5w^5 - 90w^3 = 55w^4$
45. $3x^3 + 30x = 33x^2$
46. $360y^3 + 117y^4 + 9y^5 = 0$
47. $z^2 = 17z - 66$
48. $t^3 + 5t^2 = 14t$
49. $x^6 = -28x^5$

50. El ancho de un rectángulo es 3 unidades menor que su largo. Si el área es igual a 4, ¿cuánto miden los lados?
51. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 70 en dicho sistema sea 154?
52. Un cuadrado de lado ℓ se deforma para obtener un rectángulo, sumando 7 unidades al largo y restando 7 al ancho; sin embargo, después de efectuar la deformación, el área obtenida es cero. ¿Cuánto mide el lado ℓ del cuadrado?
53. Un rectángulo tiene un perímetro de 28 cm y un área de 45 cm^2. ¿Cuántos centímetros miden sus lados?
54. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 7 en dicho sistema sea 111?
55. La suma de los cuadrados de dos números enteros pares consecutivos es 100. Encuentra dichos números.
56. La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos es 110. Encuentra dichos números.
57. Hace 3 años, la edad de Nicolás era cierto número. Dentro de 9 años, su edad será dicho número elevado al cuadrado. ¿Qué edad tiene ahora Nicolás?
58. Escribe 9 como la suma de dos números tales que 4 veces el cuadrado del primero más 5 veces el cuadrado del segundo sea igual a 189.
59. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 35 en dicho sistema sea 120?
60. En una competencia de lucha grecorromana hay cierto número de personas. Compiten todos contra todos. Si hubo 10 combates, ¿cuántos competidores había?

7.9 Casos particulares

Hay trinomios que pueden factorizarse más directamente usando los dos primeros productos notables de la lista (7.12) de la página 207; esto sucede cuando el trinomio es el cuadrado de un binomio. Estos trinomios se llaman *trinomios cuadrados perfectos.* Por ejemplo, si $x^2 + bx + c = (x - r)^2$, entonces $x^2 + bx + c$ es llamado un cuadrado perfecto.

El área de un rectángulo mide 64 m^2 y el ancho más el largo miden 16 metros. Encontrar la longitud de sus lados.

Solución: Llamamos a al ancho y b al largo del rectángulo. Sabemos que el área de un rectángulo es el producto de sus lados, por lo que:

$$\text{área } = ab = 64. \tag{7.13}$$

Como:

$$a + b = 16, \tag{7.14}$$

entonces podemos despejar b, con lo que obtenemos:

$$b = 16 - a.$$

Sustituimos este valor de b en la ecuación (7.13), con lo que obtenemos:

$$a(16 - a) = 64.$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} a(16 - a) &= 64 \\ 16a - a^2 &= 64 \\ 0 &= a^2 - 16a + 64 \\ 0 &= (a - 8)^2. \end{aligned}$$

Entonces $a = 8$ y $b = 16 - 8 = 8$. Observa que se trata de un cuadrado cuyo lado mide 8 metros.

Comprobación: Sustituimos $a = 8$ y $b = 8$ en las ecuaciones (7.13) y (7.14):

$$ab = 8(8) = 64; \qquad a + b = 8 + 8 = 16.$$

EJEMPLOS

1. Determinar si el trinomio $x^2 + 18x + 81$ es un cuadrado perfecto y, en su caso, factorizarlo.

Solución: Queremos expresar al trinomio como:

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2bx + b^2,$$

donde b es un número real.

Nos fijamos que $81 = 9^2$, así que el candidato para ser b es 9, y verificamos que $2 \times 9 = 18$.

Así que:

$$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2.$$

Observa que hubiéramos podido utilizar el método usado en la sección anterior y escribir:

$$x^2 + 18x + 81 = (x + b)(x + c).$$

Es decir, buscamos dos números b y c que multiplicados dan 81 y que sumados dan 18; dichos números son $b = 9$ y $c = 9$, con lo que obtenemos el mismo resultado.

2. Determinar si el trinomio $y^2 + 10y + 16$ es un cuadrado perfecto y, en su caso, factorizarlo.

Solución: Nos fijamos que $16 = 4^2$, así que el candidato para ser b es 4, pero $2 \times 4 = 8 \neq 10$, por lo que el trinomio no es un cuadrado perfecto.

3. Determinar si el trinomio $w^2 - 24w + 144$ es un cuadrado perfecto y, en su caso, factorizarlo.

Solución: Buscamos b tal que:

$$w^2 - 24w + 144 = (w - b)^2.$$

Nos fijamos que $144 = 12^2$, entonces el candidato para b es 12, y verificamos que $2 \times 12 = 24$, así que:

$$w^2 - 24w + 144 = (w - 12)^2.$$

4. Resolver la ecuación $x^2 + 12x + 36 = 0$.

Solución: Primero factorizamos el polinomio:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + b)^2.$$

Como $36 = 6^2$, entonces el candidato para b es 6, y como $2 \times 6 = 12$, entonces,

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2,$$

así que la ecuación que tenemos que resolver es:

$$(x + 6)^2 = 0.$$

Entonces los dos factores son iguales, así que:

$$\begin{aligned} x + 6 &= 0 \\ x &= -6. \end{aligned}$$

La solución es $x = -6$.

Comprobación: Sustituimos $x = -6$ en la ecuación original:

$$x^2 + 12x + 36 = (-6)^2 + 12(-6) + 36 = 36 - 72 + 36 = 0.$$

Otro caso importante es el de los polinomios que son diferencia de cuadrados.

Veamos una forma muy original de plantear un problema:

Si con granos de oro puedo decir
el cariño que siento por ti,
y si acaso lo quieres descubrir:
cuenta cuántos meses tiene un año
y si piensas que es demasiado,
resta cuatro por los días que he llorado,
y divídelo entre 2
por los que me he enojado.
Ahora ya conoces el cuadrado
del cariño que por ti he guardado.

Araceli Bernabé

Solución: Analizando los renglones del verso, podemos deducir la ecuación:
En este caso, la incógnita aparece en el último renglón y se refiere al cariño guardado hacia cierta persona, al que llamaremos x:

$$\frac{12-4}{2}=x^2,$$

es decir,

$$4=x^2. \tag{7.15}$$

Resolvemos la ecuación:

$$4=x^2$$
$$0=x^2-4$$
$$0=(x-2)(x+2).$$

Entonces:

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=-2.$$

La solución que Araceli incluyó a su problema es la siguiente:

Si aún eres mi amigo
2 granos te han tocado;
si, por el contrario, no
lo mereces, regresa los
2 que me has robado.

Comprobación:

Sustituimos $x=2$ en la ecuación (7.15): $x^2=(2)^2=4$.

Sustituimos $x=-2$ en la ecuación (7.15): $x^2=(-2)^2=4$.

EJEMPLOS

1. Factorizar x^2-25.

Solución: Observamos que este polinomio no tiene término en x, y además el término independiente es un cuadrado, así que el polinomio es de la forma

$$x^2-25=x^2-b^2,$$

donde $b = 5$.
De acuerdo con la tercera fórmula de (7.12) de la página 207, tenemos que:

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5).$$

Por supuesto, podemos factorizar este polinomio utilizando la regla general vista en la sección anterior, por lo que escribimos:

$$x^2 - 25 = x^2 + 0x - 25 = (x+b)(x+c)$$

y buscamos dos números que multiplicados den 25 y sumados den 0. Dichos números son $b = 5$ y $c = -5$, así que:

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5).$$

2. Factorizar $w^2 - 121$.

Solución: El polinomio es una diferencia de cuadrados, pues $121 = 11^2$, así que:

$$w^2 - 121 = w^2 - 11^2 = (w+11)(w-11).$$

Algunas veces es necesario factorizar el MCD de los términos del polinomio antes de reconocer que hay un cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados.

EJEMPLOS

1. Factorizar $4y^4 - 56y^3 + 196y^2$.

Solución: Factorizamos primero $4y^2$:

$$4y^4 - 56y^3 + 196y^2 = 4y^2(y^2 - 14y + 49).$$

Ahora podemos reconocer que el factor entre paréntesis es un cuadrado perfecto, haciendo $b = 7$, así que:

$$4y^4 - 56y^3 + 196y^2 = 4y^2(y-7)^2.$$

2. Factorizar $-5x^5 + 80x^3$.

Solución: Factorizamos primero $-5x^3$:

$$-5x^5 + 80x^3 = -5x^3(x^2 - 16).$$

Reconocemos ahora que el factor entre paréntesis es una diferencia de cuadrados, así que:

$$-5x^5 + 80x^3 = -5x^3(x-4)(x+4).$$

3. Factorizar $7z^6 + 70z^5 + 175z^4$.

Solución: Factorizamos primero $7z^4$:

$$7z^6 + 70z^5 + 175z^4 = 7z^4(z^2 + 10z + 25).$$

El factor que está entre paréntesis es un cuadrado perfecto:

$$7z^6 + 70z^5 + 175z^4 = 7z^4(z+5)^2.$$

7.9.1 Ejercicios

Determina si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos; si es así, factorízalos.

1. x^2-4x+4
2. $y^2+26y+169$
3. z^2-7z+9
4. $w^2+12w-6$
5. $z^2-10z+25$
6. $x^2+8x+15$
7. $y^2+16y+64$
8. $x^2+60x+900$
9. w^2-2w+1
10. $z^2-24z+49$
11. $w^2-4w+16$
12. $y^2+10y-25$
13. $w^2-28w+139$
14. z^2+6z+9
15. $x^2-22x+121$
16. $w^2-24w+144$
17. $y^2-14y+49$
18. $z^2+12z+38$
19. $a^2-18a+81$
20. $b^2+200b+100$

Factoriza los siguientes polinomios.

21. x^2-6x+9
22. $y^2+14y+49$
23. z^2-64
24. $144-z^2$
25. $z^2+10z+25$
26. $w^2-12w+36$
27. $y^2+18y+81$
28. $169-x^2$
29. $-x^2+4x-4$
30. $w^2-8w+16$
31. $t^2-22t+121$
32. $16-8y+y^2$
33. y^2-100
34. $x^2-40x+400$
35. $w^2+30w+225$
36. $-w^2-10w-25$
37. t^2-64
38. z^2-2z+1
39. $64-16z+z^2$
40. $y^2+20y+100$
41. $49-x^2$
42. $81-x^2$
43. w^2-49
44. $-y^2+26y-169$
45. $a^2(a^2-4a+4)-4a(a^2-4a+4)+4(a^2-4a+4)$
46. $y^2(y^2+2y+1)-64(y^2+2y+1)$
47. $z^2(z^2-6z+9)-8z(z^2-6z+9)+16(z^2-6z+9)$
48. $w^2(w^2+10w+25)+10w(w^2+10w+25)+25(w^2+10w+25)$
49. $c^2(c^2-9)-25(c^2-9)$
50. $b^2(b^2+18b+81)+14b(b^2+18b+81)+49(b^2+18b+81)$
51. $x^2(x^2-2x+1)-7x(x^2-2x+1)+12(x^2-2x+1)$
52. b^2-a^2+6a-9
53. $x^2-y^2+12x+36$

En los ejercicios 54 a 62, resuelve las siguientes ecuaciones.

54. $y^2=169$
55. $2z^5=32z$
56. $w^5+24w^4=-144w^3$
57. $w^2-16w+64=0$
58. $x^4-676x^2=0$
59. $5y^5+45y^5=30y^4$
60. $3x^3+120x^2=-1200x$
61. $4y^4+100y^2=40y^3$
62. $t^3=196t$

63. El área de un rectángulo es de 48 m^2 y las longitudes de sus lados miden dos números enteros consecutivos pares. Encuentra las longitudes de sus lados. Encuentra el perímetro del triángulo rectángulo formado al trazar la diagonal del rectángulo.
64. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el producto del primero por el segundo sea igual al tercero más 7.
65. Si un anillo está formado por dos círculos concéntricos y el radio del círculo menor es 4, ¿cuál debe ser el radio del círculo mayor para que el área del anillo sea 33π?
66. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que el cuadrado del mayor menos el cuadrado del menor es igual a 61.
67. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número:
    a. 9 sea 100?
    b. 36 sea 100?
    c. 144 sea 100?
68. A un baile asistió igual número de hombres que de mujeres. Si cada hombre bailó con todas las mujeres y cada mujer bailó con todos los hombres, y en total se hicieron 225 parejas distintas, ¿cuántas personas hubo en el baile?

7.10 Factorización de trinomios: $ax^2 + bx + c$

Con una resortera se lanza una piedra verticalmente con una velocidad inicial de 39.2 m/seg. ¿Cuándo alcanzará una altura de 34.3 metros?

Solución: Para resolver este problema debemos utilizar la fórmula de la física que relaciona la altura, que llamaremos h, la velocidad inicial, v_0, el tiempo, t, y la magnitud de la aceleración debida a la fuerza de gravedad, g.

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

$g = 9.8$ m/seg^2 aproximadamente. Sustituyendo los datos que tenemos:

$$34.3 = 39.2t - \frac{1}{2}(9.8)t^2. \qquad (7.16)$$

Escribimos la ecuación como:

$$4.9t^2 - 39.2t + 34.3 = 0.$$

Factorizamos primero el coeficiente de t^2.

$$4.9\left(t^2 - 8t + 7\right) = 0.$$

Ahora tenemos que encontrar dos números tales que

su producto sea: 7, su suma sea: -8.

Dichos números son -7 y -1, así que:

$$4.9\left(t^2 - 8t + 7\right) = 4.9(t-7)(t-1).$$

Entonces resolvemos:

$$4.9(t-7)(t-1) = 0,$$

con lo cual obtenemos:

$$t - 7 = 0 \quad \text{o} \quad t - 1 = 0$$
$$t = 7 \qquad\qquad t = 1.$$

Hay dos momentos en que la piedra alcanza una altura de 34.3 metros, 1 segundo después de ser lanzada (cuando va de subida) y también 7 segundos después del lanzamiento (cuando va de bajada).

Comprobación: Sustituimos $t = 1$ segundo en la ecuación (7.16):

$$39.2t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = (39.2)(1) - \frac{1}{2}(9.8)(1)^2 = 39.2 - 4.9 = 34.3$$

Sustituimos $t = 7$ segundos en la ecuación (7.16):

$$39.2t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = (39.2)(7) - \frac{1}{2}(9.8)(7)^2 = 274.4 - 240.1 = 34.3$$

Observa que en este ejemplo, a pesar de que el coeficiente de t^2 no era 1, dicho coeficiente era factor de todos los términos del polinomio y pudimos factorizarlo, con lo que obtuvimos un polinomio cuyo coeficiente de t^2 es 1.

Dicho de manera más general, para factorizar un polinomio de segundo grado cuyo coeficiente de x^2 no es 1, factorizamos dicho coeficiente y después factorizamos el polinomio que lo multiplica.

Hay un método más general que nos puede ayudar en otros casos y que ejemplificamos ahora.

Ejemplo

- Resolver la ecuación $5x^2 - 14x - 3 = 0$.

Solución: Buscamos dos números tales que:

$$rs = (5)(-3) \quad \text{y} \quad r + s = -14,$$

es decir, buscamos dos números cuyo producto sea -15 y cuya suma sea -14. Tales números son:

$$r = -15, \quad s = 1.$$

Ahora escribimos la ecuación original como

$$\begin{aligned} 5x^2 - 14x - 3 &= 5x^2 - 15x + x - 3 \\ &= 5x(x-3) + x - 3 \\ &= (5x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación:

$$(5x+1)(x-3) = 0,$$

de donde:

$$\begin{aligned} 5x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

En general, si $ax^2 + bx + c$ es un polinomio con $c \neq 0$, la clave del método antes descrito es descomponer el término bx en una suma de dos términos; así, buscamos dos números r y s tales que su suma sea b y su producto sea ac; es decir,

$$\begin{aligned} r + s &= b \\ rs &= ac. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Como $rx + sx = bx$, escribimos el polinomio como:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + rx + sx + c.$$

Despejando a de la segunda ecuación de (7.17), sustituyendo en la ecuación anterior y factorizando por agrupamiento, tenemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + rx + sx + c &= \frac{rs}{c}x^2 + rx + sx + c \\ &= \frac{r}{c}x(sx + c) + sx + c \\ &= \left(\frac{r}{c}x + 1\right)(sx + c), \end{aligned}$$

así que si encontramos dichos números r y s, el polinomio $ax^2 + rx + sx + c$ siempre se puede factorizar por agrupamiento.

EJEMPLOS

1. Factorizar $-4x^2+4x+3$.

Solución: Buscamos dos números r y s tales que:

$$rs = ac = -4\times 3 = -12$$
$$r+s = b = 4.$$

Dichos números son $r=6$ y $s=-2$.

Descomponemos el término en x como $4x = 6x-2x$ y escribimos el polinomio:

$$-4x^2+4x+3 = -4x^2+6x-2x+3.$$

Factorizamos $-2x$ de los dos primeros términos y -1 de los últimos dos términos

$$-4x^2+6x-2x+3 = -2x(2x-3)-(2x-3).$$

Observa que factorizamos -1 para que las expresiones entre paréntesis sean iguales. Ahora factorizamos $(2x-3)$ y obtenemos el resultado:

$$-4x^2+4x+3 = (2x-3)(-2x-1).$$

2. Resolver la ecuación $(x-2)(4x+5)=0$.

Solución: Observa que el polinomio ya está igualado a cero y factorizado. Por la propiedad del cero en el producto $(x-2)(4x+5)$ es igual a cero si, y sólo si, alguno de los factores es igual a cero.

$$x-2=0 \qquad\qquad 4x+5=0$$
$$x=2 \qquad \text{o} \qquad 4x=-5$$
$$x=-\frac{5}{4}.$$

Las soluciones son $x=2$, $x=-\dfrac{5}{4}$.

Comprobación: Sustituimos $x=2$ en la ecuación original:

$$(x-2)(4x+5) = (2-2)(4(2)+5) = 0.$$

Sustituimos $x=-\dfrac{5}{4}$ en la ecuación original:

$$(x-2)(4x+5) = \left(-\frac{5}{4}-2\right)\left(4\left(-\frac{5}{4}\right)+5\right) = 0.$$

3. Resolver la ecuación $3x^2+x=10$.

Solución: Pasamos todos los términos al primer miembro.

$$3x^2+x=10$$
$$3x^2+x-10=0.$$

Factorizamos el polinomio, buscamos dos números cuyo producto sea $3(-10)=-30$ y su suma sea 1. Dichos números son 6 y -5:

$$3x^2+6x-5x-10=0$$
$$3x(x+2)-5(x+2)=0$$
$$(3x-5)(x+2)=0.$$

Igualamos cada uno de los factores a cero y encontramos las soluciones:

$$3x - 5 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$$
$$3x = 5 \qquad \text{o} \qquad x = -2.$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Las soluciones son $x = \frac{5}{3}$, $x = -2$.

Comprobación: Sustituimos $x = \frac{5}{3}$ en la ecuación original:

$$3x^2 + x = 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} = \frac{25}{3} + \frac{5}{3} = 10.$$

Sustituimos $x = -2$ en la ecuación original:

$$3x^2 + x = 3(-2)^2 + (-2) = 12 - 2 = 10.$$

7.10.1 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Podemos reconocer también trinomios cuadrados perfectos aun cuando el coeficiente de x^2 no sea 1.

EJEMPLOS

1. Determinar si el polinomio $9x^2 - 12x + 4$ es cuadrado perfecto y, en su caso, factorizarlo.

   Solución: Queremos determinar si el polinomio es de la forma $a^2 - 2ab + b^2$. Observamos que:

   $$9x^2 = (3x)^2 \;\text{ y }\; 4 = 2^2,$$

   así que intentamos:

   $$a = 3x \;\text{ y }\; b = 2.$$

   Calculamos:

   $$2ab = 2(3x)(2) = 12x,$$

   así que, efectivamente:

   $$9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2.$$

2. Determinar si el polinomio $16z^2 + 40z + 25$ es cuadrado perfecto y, en su caso, factorizarlo.

   Solución: Como:

   $$16z^2 = (4z)^2 \;\text{ y }\; 25 = 5^2,$$

   si hacemos:

   $$a = 4z \;\text{ y }\; b = 5,$$

   calculamos:

   $$2ab = 2(4z)(5) = 40z.$$

Así,

$$16z^2+40z+25=(4z+5)^2.$$

3. Factorizar $4y^2-12yz+9z^2$.

Solución: Reconocemos que:

$$4y^2=(2y)^2;\ 9z^2=(3z)^2 \quad \text{y} \quad 12yz=2(2y)(3z).$$

Así,

$$4y^2-12yz+9z^2=(2y-3z)^2.$$

4. Factorizar $20x^3y+100x^2y^2+125xy^3$.

Solución: Factorizamos primero el MCD de los términos del polinomio:

$$20x^3y+100x^2y^2+125xy^3=5xy(4x^2+20xy+25y^2).$$

Reconocemos ahora que:

$$4x^2=(2x)^2;\quad 25y^2=(5y)^2 \quad \text{y} \quad 20xy=2(2x)(5y).$$

Así,

$$20x^3y+100x^2y^2+125xy^3=5xy(2x+5y)^2.$$

5. Resolver la ecuación $64z^2-48z+9=0$.

Solución: Primero factorizamos el polinomio:

$$64z^2-48z+9=(8z-3)^2.$$

Ahora resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}(8z-3)^2&=0\\ 8z-3&=0\\ z&=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

La solución es $z=\frac{3}{8}$.

Comprobación: Sustituimos $z=\frac{3}{8}$ en la ecuación original:

$$64z^2-48z+9=64\left(\frac{3}{8}\right)^2-48\left(\frac{3}{8}\right)+9=9-18+9=0.$$

7.10.2 Factorización de diferencias de cuadrados

También podemos reconocer diferencias de cuadrados, en casos menos obvios que $x^2-b^2=(x+b)(x-b)$.

EJEMPLOS

1. Factorizar $16x^2-81$.

Solución: Reconocemos que $16x^2$ y 81 son cuadrados; es decir:

$$16x^2 = (4x)^2$$
$$81 = 9^2.$$

Así,

$$16x^2 - 81 = (4x-9)(4x+9).$$

2. Factorizar $25y^2 - 36z^2$.

Solución: Reconocemos ahora que:

$$25y^2 = (5y)^2$$
$$36z^2 = (6z)^2.$$

Así,

$$25y^2 - 36z^2 = (5y-6z)(5y+6z).$$

3. Factorizar $12x^4y^3 - 27y^5$.

Solución: Factorizamos primero $3y^3$:

$$12x^4y^3 - 27y^5 = 3y^3(4x^4 - 9y^2).$$

Reconocemos ahora que el segundo factor es una diferencia de cuadrados, así que:

$$3y^3(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y).$$

4. Resolver la ecuación $100x^2 = 4x^4$.

Solución:

$$100x^2 = 4x^4$$
$$-4x^4 + 100x^2 = 0$$
$$-4x^2(x^2 - 25) = 0$$
$$-4x^2(x-5)(x+5) = 0.$$

Para que el producto sea cero, alguno de los factores debe ser cero:

$$-4x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x-5=0 \quad \text{o} \quad x+5=0,$$

que nos lleva a tres soluciones:

$$x = 0,\ x = 5,\ x = -5.$$

Comprobación: Sustituimos $x = 0$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $100x^2 = 100(0)^2 = 0.$

Lado derecho: $4x^4 = 4(0)^4 = 0.$

Sustituimos $x = 5$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $100x^2 = 100(5)^2 = 2500.$

Lado derecho: $4x^4 = 4(5)^4 = 2500.$

Sustituimos $x = -5$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $100x^2 = 100(-5)^2 = 2500.$

Lado derecho: $4x^4 = 4(-5)^4 = 2500.$

■

7.10.3 Ejercicios

Factoriza los siguientes polinomios.

1. $3x^2 - 13x + 4$
2. $4y^2 + 3y - 10$
3. $4 - 4z - 15z^2$
4. $14w^2 + 33w - 15$
5. $6t^2 - 20t - 16$
6. $5x^2 - 2x - 7$
7. $9y^2 - 48y + 64$
8. $40 - 3x - x^2$
9. $6w^2 - 19w + 10$
10. $5z^2 + 14z - 3$
11. $60 + 4z - z^2$
12. $1 - 6y - 7y^2$
13. $9x^2 - 11x + 2$
14. $z^2 - 6z + 8$
15. $4y^2 + 4y + 1$
16. $-4t^2 - 14t - 12$
17. $30x^2 + 8x - 6$
18. $14w^2 - 19w - 3$
19. $4z^2 - 36$
20. $25w^2 + 15w - 4$
21. $x^2 - 2x + 1$
22. $15y^2 + y - 2$
23. $-6t^2 - 26t - 8$
24. $5z^2 + 9z - 2$
25. $81z^2 + 72z + 16$
26. $6w^2 + 35w - 6$
27. $-8w^2 - 16w - 6$
28. $4w^2 - 8w - 5$
29. $9t^2 + 6t + 1$
30. $16y^2 - 24y + 9$
31. $2 - 15y - 8y^2$
32. $z^2 - 16z + 63$
33. $24x^2 + 22x - 35$
34. $18x^2 - 9x + 1$
35. $36y^2 - 84y + 49$
36. $3 + 11x - 20x^2$
37. $24 + 14y + 2y^2$
38. $2y^2 - 17y - 9$
39. $3 - 10y + 8y^2$
40. $2w^2 - 17w + 21$
41. $144 - 9t^2$
42. $40 + 6x - x^2$

Di si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos y, si lo son, factorízalos.

43. $16x^2 - 48x + 36$
44. $100y^2 + 100y + 25$
45. $25z^2 + 30z + 16$
46. $49 - 28y + 4y^2$
47. $81x^2 - 72x + 16$
48. $144y^2 - 72y + 9$
49. $64z^2 + 79z + 25$
50. $25w^2 - 30wy + 9y^2$
51. $25 + 70w - 49w^2$

Factoriza los siguientes polinomios.

52. $27x^4y - 72x^3y^2 + 48x^2y^3$
53. $36a^7b^4 - 100a^3b^8$
54. $36c^2 + 25d^2 - 60cd$
55. $25x^2z^2 - 49y^2$
56. $9x^3y - 6x^2y^2 + xy^3$
57. $16x^2 + 48xy + 36y^2$
58. $6x^4y^4 - 54y^6$
59. $64c^8d^2 + 16c^4d^4 + 64c^5d^3$

En los ejercicios 60 al 71, resuelve las siguientes ecuaciones.

60. $9x^2 - 16 = 0$
61. $3z(9z + 7) = 20$
62. $36w^5 - 49w^3 = 0$
63. $x(x - 5) = 4(3 - x)$
64. $(x - 4)(x - 6) = 8$
65. $9w^2 - w^4 = 0$
66. $25y^3 = y$
67. $(z - 6)(z - 5) = 12$
68. $y^2 + 5y = 36$
69. $36x^4 + 49x^2 = 84x^3$
70. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
71. $49y^3 + 36y = 84y^2$

72. Encuentra tres números enteros pares consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero.

73. Al cumplir 16 años, Armando decide repartir entre sus primos las 66 canicas que posee; a cada uno le corresponde cierto número de canicas, pero uno de ellos decide no aceptar las canicas, por lo que la repartición se hace entre los restantes, tocando a cada uno 11 canicas más que en la primera repartición. ¿Entre cuántos primos quería repartir las canicas inicialmente?

74. Un niño lanza un dardo con una cerbatana verticalmente hacia arriba a una velocidad de 19.6 m/seg. ¿En qué momento alcanza el dardo una altura de 19.6 metros? ¿En qué momento el dardo vuelve a tocar el suelo? ¿Dónde se encuentra 3 segundos después de ser lanzado?

75. Encuentra dos números enteros pares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a −176.

76. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 61. Encuentra dichos números.

77. En los problemas de movimiento aparece la ecuación

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

que es muy parecida a la de caída libre; aquí s es la distancia recorrida, v_0 es la velocidad inicial y a es la aceleración. Un auto corre a 61.2 km/h y disminuye la velocidad con una desaceleración de 4 m/seg^2; es decir, $a = -4$ m/seg^2. ¿En cuánto tiempo recorrerá 36 metros? Observa que la velocidad está dada en kilómetros por hora y la necesitas en metros por segundo.

78. Al concluir la semana, un padre de familia tiene \$120 en la bolsa y decide repartirlos en partes iguales entre sus hijos. Al momento de repartir, piensa: "si tuviera dos hijos menos, le tocarían a cada uno \$16 más". ¿Cuántos hijos tiene? ¿Cuánto le tocó a cada uno?

79. Encuentra un número entero que satisfaga que su cuadrado más su mitad más 1 sea igual a 496.

80. Dos círculos concéntricos determinan un anillo. El círculo grande tiene radio 3 unidades mayor que el pequeño. El

área del anillo es igual al área del círculo pequeño más 14π. ¿Cuál es el radio de cada uno de los círculos que determinan el anillo?

81. Encuentra un número que satisfaga la siguiente condición: a la mitad del número réstale 8 unidades y multiplica el resultado por el número que obtienes al dividir entre 4 el número original y después sumar un medio. El producto obtenido debe ser igual a -10.

82. Un auto parte del reposo y acelera 3 m/seg^2. ¿En cuánto tiempo habrá recorrido 96 metros?

7.11 Combinación de distintos métodos de factorización

Para factorizar un polinomio en producto de polinomios, algunas veces debemos utilizar más de un método de factorización. A continuación veremos una guía de los pasos que deben seguirse para efectuar la factorización.

1. Factorizar primero el MCD de los términos del polinomio.
2. Determinar si es una diferencia de cuadrados.
3. Determinar si es un cuadrado perfecto.
4. Si un trinomio de segundo grado no es cuadrado perfecto, buscar un par de factores de primer grado.
5. Si un polinomio tiene cuatro o más términos, ver la manera de agrupar los términos en pares o en grupos de tres términos que formen un cuadrado perfecto.
6. Comprobar el resultado multiplicando los factores.

Ejemplos

1. Factorizar completamente $6z^4-12z^3$.

Solución:

$$6z^4-12z^3=6z^3(z-2).$$

Comprobación:

$$6z^3(z-2)=6z^3z-2(6z^3)=6z^4-12z^3.$$

2. Factorizar completamente $-x^3+10x^2-25x$.

Solución:

$$\begin{aligned}-x^3+10x^2-25x&=-x(x^2-10x+25)\\&=-x(x-5)^2.\end{aligned}$$

Comprobación:

$$-x(x-5)^2=-x(x^2-10x+25)=-x^3+10x^2-25x.$$

3. Factorizar completamente $9x^2-4y^2+4y-1$.

Solución: Reconocemos que los tres últimos términos forman un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}9x^2-4y^2+4y-1&=9x^2-(4y^2-4y+1)\\&=9x^2-(2y-1)^2.\end{aligned}$$

Lo que tenemos ahora es una diferencia de cuadrados:

$$9x^2-(2y-1)^2=(3x-(2y-1))(3x+(2y-1))$$
$$=(3x-2y+1)(3x+2y-1),$$

así que:

$$9x^2-4y^2+4y-1=(3x-2y+1)(3x+2y-1).$$

Comprobación:

$$(3x-2y+1)(3x+2y-1)=3x(3x+2y-1)-2y(3x+2y-1)+(3x+2y-1)$$
$$=9x^2+6xy-3x-6yx-4y^2+2y+3x+2y-1$$
$$=9x^2-4y^2+4y-1.$$

4. Factorizar completamente $2x^5-7x^3-4x$.

Solución: Factorizamos primero el MCD de los términos:

$$2x^5-7x^3-4x=x(2x^4-7x^2-4).$$

Observamos que, en el polinomio entre paréntesis, todas las x están elevadas a una potencia par, así que podemos hacer la sustitución $y=x^2$.

Entonces,

$$2x^4-7x^2-4=2y^2-7y-4$$
$$=2y^2-8y+y-4$$
$$=2y(y-4)+y-4$$
$$=(2y+1)(y-4).$$

Escribimos nuevamente el producto en términos de x:

$$(2y+1)(y-4)=(2x^2+1)(x^2-4).$$

Observamos todavía que:

$$x^2-4=(x-2)(x+2),$$

así que,

$$2x^5-7x^3-4x=x(2x^2+1)(x-2)(x+2).$$

Comprobación:

$$x(2x^2+1)(x-2)(x+2)=x(2x^2+1)(x^2-4)$$
$$=x(2x^4-8x^2+x^2-4)$$
$$=2x^5-7x^3-4x.$$

7.11.1 Ejercicios

Factoriza completamente los siguientes polinomios.

1. $y^2-20y+100$
2. z^2-81
3. w^2-2w-8
4. x^2-26
5. y^2+3y-4
6. $2a^2+5a-3$
7. $16z^2+24z+9$
8. $5x^2+25x$
9. y^2-3y+2
10. $49w^2-28w+4$
11. a^2+8a+7
12. $z^2+8z-33$
13. $8z^5+32z^4+32z^3$
14. $3x^5+42x^4$
15. $2y^4-18y^2$

16. $24x^2 - 150z^2 + 180z - 54$
17. $w^2 + 14w - 81z^2 + 49$
18. $36y^2 - 25x^2 - 30x - 9$
19. $18y^5 - 30y^4 - 12y^3$
20. $4r^2 - 19r + 12$
21. $6a^6 + 56a^4 - 18a^2$
22. $-4b^2 + 144a^2 - 20b - 25$
23. $5z^5 - 10z^4 - 175z^3$
24. $4y^5 + 72y^3 + 324y$
25. $x^2 - 16y^2 - 12x + 36$
26. $5x^6 - 5x^4 - 60x^2$
27. $x^2y^2 - 36y^2 + 49x^2 - 1764$
28. $w^4 - 16w^2 + 64$
29. $81a^4 - 450a^2 + 625$
30. $-2a^3 + 44a^2 - 242a$
31. $3w^5 - 28w^3 + 9w$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

32. $(w-7)(w+2) = -18$
33. $4x^4 - 72x^2 = 124x^2$
34. $14y^3 - 7y^2 - 105y = 0$
35. $z^5 - 5z^3 - 36z = 0$
36. $9x^2 + 42x = -49$
37. $4w^3 - 24w^2 + 36w = 0$
38. $z^4 - 8z^2 + 16 = 0$
39. $16y^4 - 72y^2 + 81 = 0$
40. $3w^5 - 72w^4 + 432w^3 = 0$
41. $4x^6 - 37x^4 + 9x^2 = 0$
42. $-5y^5 + 19y^3 + 4y = 0$
43. $9z^4 - 450z^2 + 5625 = 0$
44. $6x^4 - 95x^2 - 16 = 0$
45. $16y^6 + 12y^4 - 4y^2 = 0$

7.12 Factorización de otros productos notables

Dos cubos de distintos tamaños cumplen que la diferencia de sus volúmenes es igual a 13 veces la diferencia de sus lados. ¿Cuáles serán las dimensiones de los cubos si se sabe que las longitudes de sus lados son números enteros impares consecutivos?

Solución: Llamamos C_1 y C_2 a los dos cubos. Llamamos ℓ_1 a la longitud del lado de C_1 y ℓ_2 a la de C_2. Entonces el volumen de C_1 es ℓ_1^3 y el de C_2 es ℓ_2^3.

Planteamos la ecuación:

$$\ell_1^3 - \ell_2^3 = 13(\ell_1 - \ell_2). \tag{7.18}$$

Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$(\ell_1 - \ell_2)(\ell_1^2 + \ell_1\ell_2 + \ell_2^2) = 13(\ell_1 - \ell_2).$$

Como los cubos son de distintos tamaños, entonces $\ell_1 - \ell_2 \neq 0$ y podemos dividir entre esta cantidad, con lo que obtenemos:

$$(\ell_1^2 + \ell_1\ell_2 + \ell_2^2) = 13. \tag{7.19}$$

Ahora utilizaremos la hipótesis que nos falta usar; es decir, que ℓ_1 y ℓ_2 son enteros impares consecutivos:

$$\ell_1 = 2n+1 \qquad \text{y} \qquad \ell_2 = 2n+3,$$

sustituimos estos valores en (7.19) y simplificamos:

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 + (2n+1)(2n+3) + (2n+3)^2 &= 13\\ 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 8n + 3 + 4n^2 + 12n + 9 &= 13\\ 12n^2 + 24n + 13 &= 13\\ 12n^2 + 24n &= 0\\ n^2 + 2n &= 0\\ n(n+2) &= 0.\end{aligned}$$

El último producto es igual a cero si:

$$n = 0 \qquad \text{o} \qquad n = -2.$$

Si $n=0$ entonces $\ell_1=1$ y $\ell_2=3$.
Si $n=-2$ entonces ℓ_1 y ℓ_2 son negativos. Como son los lados de los cubos, no se puede dar este caso.

Comprobación: Sustituimos $\ell_1=1$ y $\ell_2=3$ en la ecuación (7.18):

Lado izquierdo: $\ell_1^3-\ell_2^3=1^3-3^3=-26$.
Lado derecho: $13(\ell_1-\ell_2)=13(1-3)=-26$.

Para poder realizar la factorización de polinomios donde aparecen términos elevados al cubo, conviene recordar algunos de los productos vistos al principio de este capítulo.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}\tag{7.20}$$

EJEMPLOS

1. Factorizar $8x^3+60x^2+150x+125$.

Solución: Para factorizar este polinomio, observamos el grado. Como es de tercer grado, vemos si es el cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}8x^3+60x^2+150x+125&=(2x)^3+3(20)x^2+3(50)x+125\\&=(2x)^3+3(2x)^2\,5+3(2x)25+125\\&=(2x+5)^3.\end{aligned}$$

Comprobación: Desarrollamos $(2x+5)^3$:

$$\begin{aligned}(2x+5)^3&=(2x)^3+3(2x)^2\,5+3(2x)(5)^2+125\\&=8x^3+60x^2+150x+125.\end{aligned}$$

2. Factorizar $36x^2+16y^2+48xy+12x+8y+1$.

Solución: Como el polinomio es de segundo grado en ambas variables y además hay término en xy, en x y en y, veremos si es el cuadrado de un trinomio:

$$\begin{aligned}36x^2+16y^2+48xy+12x+8y+1&=(6x)^2+(4y)^2+2(6x)(4y)+2(6x)+2(4y)+1\\&=(6x+4y+1)^2.\end{aligned}$$

Comprobación: Desarrollamos $(6x+4y+1)^2$:

$$\begin{aligned}(6x+4y+1)^2&=(6x)^2+(4y)^2+(1)^2+2(6x)(4y)+2(6x)(1)+2(4y)(1)\\&=36x^2+16y^2+1+48xy+12x+8y\\&=36x^2+16y^2+48xy+12x+8y+1.\end{aligned}$$

3. Factorizar x^6+y^6.

Solución: Observemos que este polinomio lo podemos identificar como una suma de cubos:

$$x^6 + y^6 = \left(x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3.$$

Ahora factorizamos esta suma de cubos

$$\left(x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(\left(x^2\right)^2 - x^2y^2 + \left(y^2\right)^2\right) = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right).$$

Comprobación: Realizamos el producto $\left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right)$:

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) = x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 + x^4y^2 - x^2y^4 + y^6 = x^6 + y^6.$$

En el caso de polinomios de grado mayor o igual que 3 puede ser difícil encontrar una factorización; sin embargo, en ocasiones puede lograrse utilizando los productos notables. Además de (7.20), los que se usan con más frecuencia son:

$$a^4 - b^4 = (a - b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$$
$$a^4 - b^4 = (a + b)\left(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3\right)$$
$$a^5 + b^5 = (a + b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right)$$
$$a^5 - b^5 = (a - b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right).$$

EJEMPLOS

1. Factorizar $z^4 + 64$.

Solución: Para poder factorizar este polinomio, sumamos y restamos el término $16z^2$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto menos otro polinomio; así:

$$\begin{aligned} z^4 + 64 &= z^4 + 64 + 16z^2 - 16z^2 \\ &= z^4 + 16z^2 + 64 - 16z^2 \\ &= \left(z^2 + 8\right)^2 - 16z^2 \\ &= \left(\left(z^2 + 8\right) - 4z\right)\left(\left(z^2 + 8\right) + 4z\right) \\ &= \left(z^2 - 4z + 8\right)\left(z^2 + 4z + 8\right). \end{aligned}$$

Comprobación: Efectuamos el producto:

$$\begin{aligned} \left(z^2 - 4z + 8\right)\left(z^2 + 4z + 8\right) &= z^4 + 4z^3 + 8z^2 - 4z^3 - 16z^2 - 32z + 8z^2 + 32z + 64 \\ &= z^4 + 64. \end{aligned}$$

2. Factorizar $x^8 - y^8$.

Solución: Observemos que podemos identificar este polinomio como una diferencia de cuadrados:

$$x^8 - y^8 = \left(x^4\right)^2 - \left(y^4\right)^2.$$

Ahora factorizamos como el producto de la suma por la diferencia y observamos que el procedimiento puede repetirse con uno de los factores.
Así:

$$\begin{aligned}(x^4)^2-(y^4)^2 &= (x^4-y^4)(x^4+y^4)\\ &= ((x^2-y^2)(x^2+y^2))(x^4+y^4)\\ &= ((x-y)(x+y))(x^2+y^2)(x^4+y^4).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x^8-y^8=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4).$$

Comprobación: Realizamos los productos obtenidos:

$$\begin{aligned}((x-y)(x+y))(x^2+y^2)(x^4+y^4) &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\\ &= (x^4-y^4)(x^4+y^4)=x^8-y^8.\end{aligned}$$

■

7.12.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 32, factoriza las siguientes expresiones.

1. x^6-y^6
2. z^4+z^2+25
3. w^4+4
4. $a^{10}-b^{10}$
5. $6y^5-48y^2$
6. y^3-27
7. z^9+1
8. x^4-69x^2+36
9. x^5-243
10. $((w-2)^2-4)^3$
11. y^8-256
12. w^6-64
13. $x^3-6x^2+12x-8$
14. $27x^3+135x^2+225x+125$
15. $z^4+9z^3+27z^2+27z$
16. $27a^3-216a^2+576a-512$
17. $64w^3+432w^2+972w+729$
18. $125r^3-64s^3$
19. $x^2+49y^2+14xy+6x+42y+9$
20. $25x^2+9y^2+30xy+70x+42y+49$
21. $8x^3-12x^2y^2+6xy^4+y^6$
22. $36a^2+81b^2-108ab+60a-90b+25$
23. $a^4+24a^3+216a^2+864a+1296$
24. $9x^2y^2z^2+54x^2y^2z+81x^2y^2$
25. $x^2+y^2+2xy-1$
26. $x^3y^3+3x^3y^2+3x^3y+x^3$
27. $125y^3-300y^2+240y-64$
28. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
29. $16z^4-8z^3+24z^2-8z+1$
30. $w^5+10w^4+40w^3+80w^2+80w+64$
31. $r^3+3r^2s+3r^2t+6rst+3rs^2+3rt^2+s^3+3st^2+3s^2t+t^3$
32. $x^2-2xy+2xz-2xw+y^2-2yz+2yw+z^2-2zw+w^2$
33. El lado de un cubo mide 2 cm. El volumen de ese cubo más el volumen de otro cubo es igual a 12 por la suma del lado del primer cubo más el lado del segundo. Encuentra cuántos centímetros mide el lado del segundo cubo.
34. Dos cubos son tales que el lado de uno de ellos es 6 unidades mayor que el otro. Si la diferencia de las áreas de una de las caras de cada cubo es igual a 432, ¿cuál es la diferencia de los volúmenes de los cubos?
35. El volumen comprendido entre dos esferas concéntricas es igual a $\frac{224}{3}\pi$ cm^3. ¿Cuál es el volumen de la esfera pequeña si se sabe que su radio es 2 cm menor que el radio de la grande?
36. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la diferencia del cubo del mayor menos el cubo del menor es igual a 7. Encuentra dichos números.
37. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la suma de sus cubos es igual a 1 más el doble del menor. Encuentra dichos números.
38. Dos números enteros consecutivos pares satisfacen que la diferencia del mayor elevado a la cuarta, menos el menor elevado a la cuarta es igual a 80 veces la suma de 1 más el producto de la mitad del mayor por el menor. Encuentra dichos números.

39. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 99 en dicho sistema sea 1,020?

40. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 64 en dicho sistema sea 1,000,000?

Resumen

- $ab = 0$ si, y sólo si, $a = 0$ o $b = 0$.

Los siguientes productos notables, se usan con frecuencia:

- Cuadrado de una suma. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Cuadrado de una diferencia. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- Diferencia de cuadrados. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Otros productos notables:

- $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$.
- $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

7.13 EJERCICIOS DE REPASO

Efectúa las operaciones indicadas.

1. $(5x^3+5)(5x^3+2)$
2. $(10x^2-6y)(10x^2+4y)$
3. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
4. $(x^4-14)(x^4-5)$
5. $(12x^3+9)(12x^3+9)$
6. $(c-d)^2(c+d)^2$
7. $(11x-1)(11x-1)$
8. $(2x^2+7)(2x^2-1)$
9. $(5x^4-y^2)(5x^4+y^2)$
10. $(x+y)^2+(x-y)^2-2(x+y)(x-y)$
11. $(a^{10}+a^9b+a^8b^2+a^7b^3+a^6b^4+a^5b^5+a^4b^6+a^3b^7+a^2b^8+ab^9+b^{10})(a-b)$
12. $(w^4+w^2z^2+z^4)(w^2-z^2)$
13. $(3x-7y+4z)(x+2y-5z)^2+(x-y)(x^2-y^2)$
14. $(4a-5b)^3-(2a+4b)^3+(3a+2b+4c)^2$

Factoriza las siguientes expresiones.

15. $7x(5x-y+1)+3y(5x-y+1)$
16. $5b^4-2b^3-25b^2+10b$
17. $y^2-22y+121$
18. $16x^2y^4-25z^6$
19. $9a^6-25a^4$
20. $9w^2(w^2+2w+1)-8(w^2+2w+1)$
21. $64x^3-96x^2y+48xy^2+8y^3$
22. $64r^4+48r^2s^2+9y^4$
23. $\frac{9}{4}c^2-\frac{15}{4}c+\frac{25}{16}$
24. $\frac{49}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{147}$
25. $36x^2+16y^2+48xy+120x+80y+100$
26. a^4-1296

En los ejercicios 27 al 44, resuelve las siguientes ecuaciones.

27. $z^2-5z=14$
28. $y^2-17y+72=0$
29. $w^2-169=0$
30. $49x^4-36x^2=0$
31. $36y^2+84y+49=0$
32. $18z^5-48z^4+32z^3=0$

33. $16x^4 - 81 = 0$

34. $6w^4 - 33w^3 - 120w^2 = 0$

35. $a^4 + 4a^2 - 117 = 0$

36. $b^6 - 729 = 0$

37. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = (2x-3)(x+4)$

38. $(3y-10)^2 - 3y^2 = (3y+4)(2y-5)$

39. $(8w-6)(8w+6) = 4w(16w-24)$

40. $(8z-5)^2 = 4(4z+6)^2 + 3$

41. $(x-3)(x+3) = (x+3)(x+3)$

42. $(5z+2)^2 - (6z-1)^2 = -z(11z-8) - 22$

43. $(7a+12)^2 = 7a(7a+16)$

44. $(2y-11)(2y+11) - 3y = (2y+8)^2$

45. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el producto del primero por el tercero sea igual a 5 veces el segundo más 13.

46. Un cuadrado de lado ℓ se deforma para obtener un rectángulo sumando 3 unidades a uno de sus lados y restando 2 al otro. El rectángulo obtenido tiene área 6. Encuentra el valor de ℓ.

47. La suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos es 74. Encuentra dichos números.

48. Tres números enteros consecutivos satisfacen la siguiente propiedad: el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo es igual al cuadrado del tercero más 7 veces el segundo. ¿Cuáles son los números?

49. El área de un rectángulo es igual a 35 m^2 y su perímetro es igual a 24 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

50. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 2 unidades más que uno de los lados y una unidad más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?

51. Encuentra dos números enteros cuyo producto sea -30 y tales que uno sea 11 unidades mayor que el otro. ¿Hay más? ¿Por qué?

52. En un rectángulo, el ancho mide 2 cm menos que el largo. Si el área mide 48 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo? ¿Cuánto mide una de las diagonales?

53. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide una unidad menos que el otro. Si el cuadrado de la hipotenusa es igual a 25, ¿cuánto mide cada uno de los catetos?

54. El producto de la diferencia de 17 menos un número por la suma de 17 más el mismo número es igual a 64. ¿Sabes cuál es el número? ¿Puedes encontrar otro que cumpla las mismas condiciones?

55. El producto de dos números es 42. El mayor es el triple del menor menos 11. Encuentra dichos números.

56. Un proyectil es lanzado desde el suelo a 12.25 m/seg verticalmente hacia arriba. ¿En qué momento toca el suelo? (Véase el problema 42 de la página 206. No olvides utilizar $g = 9.8$ m/seg.)

57. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que el cubo del primero más el cubo del segundo más 7 veces el segundo es igual al cubo del tercero menos el cubo del primero.

58. El cuadrado de la suma de dos enteros consecutivos es igual a la suma de los cuadrados de los enteros más 12. Encuentra los enteros consecutivos.

59. La suma de dos números es 16 y la suma de sus cuadrados es 130. Encuentra los números.

60. El área de un rectángulo es de 15 m^2. La longitud del rectángulo es el doble de su anchura menos 1 metro. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo?

61. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la diferencia del cubo del mayor menos el cubo del menor es igual a 19. Encuentra dichos números.

62. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 825 en dicho sistema sea 1,080?

63. Si en la figura (7.2) las dimensiones son DE es igual a 35, AD es igual a 23 y BE es igual a 12, encuentra la distancia DC tal que $AC = BC$.

64. Encuentra dos números enteros impares consecutivos y negativos tales que el cuadrado del menor menos el mayor es igual al cuadrado del mayor más 4 veces el menor más uno.

65. Encuentra cuatro números enteros pares consecutivos tales que el cuadrado del mayor más el cuadrado del menor es igual al cuadrado del segundo más el cuadrado del tercero más el cuarto número.

capítulo

8

Expresiones racionales

$$
\begin{array}{r}
3x - 6 \\
2x + 5 \overline{)\, 6x^2 + 3x - 8} \\
-6x^2 - 15x \quad \\
\hline
-12x - 8 \\
+12x + 30 \\
\hline
22
\end{array}
$$

8.1 Introducción
8.2 Simplificación de expresiones racionales
8.3 Multiplicación de expresiones racionales
8.4 División de expresiones racionales
8.5 Suma y resta de expresiones racionales con el mismo denominador
8.6 Suma y resta de expresiones racionales con distinto denominador
8.7 División de polinomios
8.8 División de polinomios de varias variables
8.9 División sintética
8.10 Expresiones algebraicas complicadas
8.11 Desigualdades y expresiones racionales
8.12 Ejercicios de repaso

En este capítulo estudiaremos las expresiones racionales, las cuales son cocientes de polinomios y tienen propiedades similares a los números racionales. Aquí veremos el método llamado división sintética, que se usa para realizar divisiones entre polinomios de la forma $x - a$.

8.1 Introducción

Una *expresión racional* es un polinomio o un cociente de polinomios en una o más variables; por ejemplo,

$$3x^2 + 7x, \qquad \frac{a-b}{a+b}, \qquad \frac{(5x+3)^2}{(x-1)^3} \quad \text{y} \quad \frac{4x^2y + 5y^2 + 3x}{6x^2 - y}$$

son expresiones racionales.

Veamos el siguiente problema en el que aparecen expresiones racionales.

Si la suma de dos números es 60 y la razón del menor al mayor es $\frac{3}{7}$, ¿cuáles son dichos números?

Solución: Llamemos x al menor de los números; entonces el mayor es $60 - x$, ya que

$$x + (60 - x) = 60.$$

Planteamos la ecuación:

$$\frac{\text{número menor}}{\text{número mayor}} = \frac{3}{7},$$

es decir,

$$\frac{x}{60 - x} = \frac{3}{7}. \tag{8.1}$$

Resolvemos la ecuación quitando los denominadores y simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{60 - x} &= \frac{3}{7} \\
7x &= 3(60 - x) \\
10x &= 180 \\
x &= 18.
\end{aligned}$$

Entonces el número menor es 18 y el mayor es $60 - 18 = 42$.

Comprobación: Sustituimos $x = 18$ en la ecuación (8.1):

$$\frac{x}{60-x} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}.$$

Al trabajar con expresiones racionales, frecuentemente nos interesa evaluarlas; es decir, sustituir las variables por números.

EJEMPLOS

1. Evaluar $\dfrac{4x^2 - 5x + 7}{3x - 5}$ en $x = -5$.

Solución:

$$\frac{4(-5)^2 - 5(-5) + 7}{3(-5) - 5} = \frac{100 + 25 + 7}{-15 - 5} = -\frac{132}{20} = -\frac{33}{5}.$$

2. Evaluar $\dfrac{2xy - y}{y^2 + 2xy + 1}$ en $x = 1$, $y = 2$.

Solución:

$$\frac{2(1)(2) - (2)}{(2)^2 + 2(1)(2) + 1} = \frac{4 - 2}{4 + 4 + 1} = \frac{2}{9}.$$

3. Resolver la ecuación $x - 1 = \dfrac{5x - 9}{x}$.

Solución: Para resolver esta ecuación la multiplicamos por x y después la resolvemos:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{5x - 9}{x} \\ x(x - 1) &= 5x - 9 \\ x^2 - x - 5x + 9 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, así que:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación es $x = 3$.

Comprobación: Sustituimos $x = 3$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $x - 1 = 3 - 1 = 2$;

lado derecho: $\dfrac{5x - 9}{x} = \dfrac{5(3) - 9}{3} = 2.$

Una expresión racional puede evaluarse sólo en aquellos valores de las variables para las cuales el denominador no se anula. Para aquellos valores de las variables en las que el denominador se anula, decimos que la expresión racional *no estádefinida.*

EJEMPLOS

1. Evaluar $\frac{8w^2+3w+7}{w^2-4}$ en $w=-2$.

Solución: No es posible pues w^2-4 se anula cuando $w=2$. Es decir,

$$\frac{8w^2+3w+7}{w^2-4} \text{ no está definida en } w=-2.$$

2. Encontrar para qué valores de t la expresión racional $\frac{5t^2-7t+9}{t^2-t-30}$ no está definida.

Solución: Como una expresión racional no está definida cuando su denominador vale cero, debemos resolver $t^2-t-30=0$;

$$t^2-t-30=0$$
$$(t-6)(t+5)=0,$$

si, y sólo si,

$$\begin{aligned} t-6 &= 0 \\ t &= 6 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} t+5 &= 0 \\ t &= -5. \end{aligned}$$

Así, la expresión $\frac{5t^2-7t+9}{t^2-t-30}$ no está definida para $t=6$ y $t=-5$.

3. Encontrar para qué valores de z la expresión racional $\frac{(z-4)(2z+3)}{2z^3-z^2-15z}$ no está definida.

Solución: Veamos cuándo vale cero el denominador; es decir, debemos resolver $2z^3-z^2-15z=0$:

$$2z^3-z^2-15z=0$$
$$z(2z+5)(z-3)=0,$$

si, y sólo si,

$$z = 0 \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 2z+5 &= 0 \\ z &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} z-3 &= 0 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión $\frac{(z-4)(2z+3)}{2z^3-z^2-15z}$ no está definida para $z=0$, $z=-\frac{5}{2}$ y $z=3$.

8.1.1 Ejercicios

Evalúa las siguientes expresiones racionales cuando sea posible, o indica cuando no estén definidas en el valor propuesto.

1. $\dfrac{w^2+2w+1}{w^2-25}$ $w=-10$
2. $\dfrac{4t^2-5t}{4t-10}$ $t=\dfrac{5}{2}$
3. $\dfrac{x^2-3x+12}{9x+6}$ $x=-\dfrac{2}{3}$
4. $\dfrac{8x^2-20}{2x^2-6x+8}$ $x=-\dfrac{7}{2}$
5. $\dfrac{6w+16}{w^2-9w}$ $w=-9$
6. $\dfrac{3z^3+4z+1}{5z^2-1}$ $z=\dfrac{1}{5}$
7. $\dfrac{7a^4-3a^2}{a^3+1}$ $a=-1$
8. $\dfrac{2w^2-8w-15}{w^2-9w+8}$ $w=-6$
9. $\dfrac{x^4-2x^3+5x-27}{x(x-8)(x-2)}$ $x=-2$
10. $\dfrac{z^3+9z^2+4z+18}{z^2(5-z)(9-z)}$ $z=5$
11. $\dfrac{8t^2-6t+9}{16t^2-56t+49}$ $t=\dfrac{3}{4}$
12. $\dfrac{a^4-2a^3+3a^2-a}{6a^3-3a^2+a-1}$ $a=0$
13. $\dfrac{w^3-w^2-w-3}{w^2+5w+6}$ $w=3$
14. $\dfrac{25b^2-20b+32}{25b^2+80b+64}$ $b=-\dfrac{8}{5}$
15. $\dfrac{z^4-190}{z^3-4z^2-2z}$ $z=0$
16. $\dfrac{x^4-3x^3-x^2+x}{x^4-3x^2}$ $x=3$
17. $\dfrac{20c^2-7c+3}{5c^3-25c^2+10c}$ $c=-\dfrac{1}{5}$
18. $\dfrac{3w^3-6w^2+3w}{2w^4+5w^3-3w-8}$ $w=1$
19. $\dfrac{6a^2-5a+14}{2a^2-3a-20}$ $a=-\dfrac{5}{2}$
20. $\dfrac{5z^4+7z^3-15z^2}{3z^4-14z^3+8z^2}$ $z=4$

Encuentra para qué valores de la variable no está definida cada expresión racional.

21. $\dfrac{4y-11}{y+5}$
22. $\dfrac{z+20}{9z+3}$
23. $\dfrac{6x-14}{x-1}$
24. $\dfrac{x^2+2}{6x-8}$
25. $\dfrac{18-3w}{2w-16}$
26. $\dfrac{z^3+z^2-3z-21}{7+4z}$
27. $\dfrac{w-15}{(w-8)(4w-9)}$
28. $\dfrac{6t^3-17t+4}{(2t-7)(3t+21)}$
29. $\dfrac{25y^2-14y-18}{(10-8y)(12+15y)}$
30. $\dfrac{3z^2+4z-10}{z^2-16}$
31. $\dfrac{w^2-9}{w^2-9w+14}$
32. $\dfrac{5x^2+13x-6}{(x^2-2x+1)(x^2-25)}$
33. $\dfrac{a^3+2a^2+5}{a^2-2a-15}$
34. $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-13x+12}$
35. $\dfrac{3w^2-12w}{w^2+16w+63}$
36. $\dfrac{4b^2+5b-8}{b^2-4b-60}$
37. $\dfrac{z^2-6z+18}{z^2-12z+36}$
38. $\dfrac{5a-6}{a^2+8a+16}$
39. $\dfrac{(z+3)(z-8)}{z^2-2z-35}$
40. $\dfrac{6b+11}{b^2+5b-50}$
41. $\dfrac{x^2-12x+36}{x^2-24x+144}$
42. $\dfrac{(2t-5)(t+9)}{t^2+5t-66}$
43. $\dfrac{a^2-16}{a^2-3a+2}$
44. $\dfrac{z^3+z^2-z-1}{z^2-81}$
45. $\dfrac{8w^3+6w^2}{9w^2-25}$
46. $\dfrac{32x-56}{2x^2-11x+14}$
47. $\dfrac{12t^3-15t+7}{9t^2-30t+25}$
48. $\dfrac{z^5-5z^3-6}{z^4-9z^2}$
49. $\dfrac{3w^2+7w+17}{7w^3+20w^2-3w}$
50. $\dfrac{9x^4-2x^3-x}{x^2+12x+27}$
51. $\dfrac{5x^2+11x+12}{5x^2-11x-12}$
52 $\dfrac{670}{3z^2-7z+4}$
53. $\dfrac{2a^4+8a^2-10}{a^5-16a}$
54. $\dfrac{t^8+9t^6+t-1}{2t^5+4t^4-48t^3}$
55. $\dfrac{10t^2+28t-78}{4t^6-25t^4+36t^2}$
56. $\dfrac{x^4-10x-25}{x^4-50x^2+625}$

En los ejercicios 57 a 65, resuelve las ecuaciones.

57. $x-2=\frac{3x}{x+2}$

58. $\frac{z+18}{z}=z+8$

59. $\frac{w-3}{4}=\frac{3-w}{w-11}$

60. $\frac{x-7}{4x-29}=\frac{6}{25}$

61. $\frac{20}{s-6}=\frac{s}{2}$

62. $\frac{4}{r}=\frac{6}{r-2}$

63. $\frac{t+3}{2}=\frac{t+3}{t-3}$

64. $\frac{x-4}{x+3}=\frac{x-2}{x-4}$

65. $\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+2}{z}$

66. Dos ángulos suplementarios son aquellos cuya suma es 180°. Encuentra las medidas de dos ángulos suplementarios si están en una razón de 5 a 7.

67. ¿Qué número debe sumarse al numerador y al denominador de $\frac{5}{11}$ para que la fracción sea $\frac{2}{3}$?

68. Dos ángulos complementarios son aquellos cuya suma es 90°. Encuentra las medidas de dos ángulos complementarios si están en una razón de 3 a 2.

69. El numerador de una fracción es 4 unidades mayor que el denominador. Si aumentamos 11 unidades al denominador, la fracción es igual a $\frac{1}{2}$. Encuentra el numerador y el denominador de la fracción.

70. Santiago recorrió 425 km en el mismo tiempo que Jerónimo recorrió 325 km. La velocidad de Santiago era de 20 km/h más que la de Jerónimo. ¿A qué velocidad iba cada uno?

71. La suma de dos números es 45 y la razón del menor al mayor es $\frac{4}{5}$, ¿cuáles son dichos números?

72. Un río tiene una corriente de 5 km/h. Una lancha de motor tarda el mismo tiempo en recorrer 15 km a favor de la corriente que 9 km en contra de la corriente, ¿cuál es la velocidad de la lancha en aguas tranquilas?

73. Un número de dos cifras satisface las siguientes condiciones: la cifra de las decenas es 1 unidad menor que la cifra de las unidades. Si se divide el número entre la suma de sus cifras, el cociente es 5. Encuentra el número.

8.2 Simplificación de expresiones racionales

Habrás notado que los polinomios se parecen a los enteros en el sentido de que se pueden sumar, restar y también factorizar. El cociente de polinomios no es un polinomio, así como, en general, el cociente de números enteros no es un número entero:

$$\frac{x-3}{x+8}=1-\frac{11}{x+8} \text{ no es un polinomio}, \frac{4}{5}=0.8 \text{ no es un número entero.}$$

En las siguientes secciones veremos varias propiedades de las expresiones racionales y nos daremos cuenta de que estas propiedades se parecen a las de los números racionales.

Sabemos que un número racional se puede simplificar y escribir en su mínima expresión. En particular, cuando tanto el numerador como el denominador son múltiplos de un mismo entero, podemos cancelar dicho número sin modificar el valor del número racional; por ejemplo,

$$\frac{120}{90}=\frac{30\times 4}{30\times 3}=\frac{\cancel{30}\times 4}{\cancel{30}\times 3}=\frac{4}{3}.$$

Un número a de dos cifras satisface las siguientes condiciones: el número dividido entre el doble de la cifra de las unidades es igual al cociente del cuadrado de la suma de 2 más la cifra de las decenas, entre la suma de 4 más la cifra de las unidades. Además, la cifra de las decenas excede en 2 a la de las unidades. Encontrar dicho número.

Solución: Llamamos d a la cifra de las decenas de a, y u a la de las unidades, entonces:

$$a=10d+u.$$

De acuerdo con el enunciado, planteamos las ecuaciones

$$\frac{10d+u}{2u}=\frac{(2+d)^2}{4+u}. \tag{8.2}$$

$$d=u+2. \tag{8.3}$$

Sustituyendo este valor de d en la ecuación (8.2) obtenemos:

$$\frac{10(u+2)+u}{2u}=\frac{(2+(u+2))^2}{4+u}.$$

De donde:

$$\frac{11u+20}{2u}=\frac{(4+u)^2}{4+u}.$$

Simplificando del lado derecho de la ecuación tenemos:

$$\frac{11u+20}{2u}=4+u \quad \text{si } u\neq -4.$$

Ahora resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{11u+20}{2u}&=4+u\\ 11u+20&=2u^2+8u\\ 0&=2u^2-3u-20\\ 0&=(2u+5)(u-4).\end{aligned}$$

Por tanto, $u=4$ o $u=-\frac{5}{2}$. Como estamos buscando un número entero, sólo elegimos la solución $u=4$. Para obtener el valor de d, sustituimos este valor de u en (8.3):

$$d=u+2=4+2=6.$$

Entonces el número a es:

$$a=10(6)+4=64.$$

Comprobación: Sustituyendo $d=6$ y $u=4$ en la ecuación (8.2) tenemos:

Lado izquierdo: $\frac{10d+u}{2u}=\frac{10(6)+4}{2(4)}=8,$

lado derecho: $\frac{(2+d)^2}{4+u}=\frac{(2+6)^2}{4+4}=8.$

En general, cuando en una expresión racional tanto el numerador como el denominador tienen como factor común un número o un polinomio, se puede cancelar dicho factor sin alterar la expresión racional, salvo en el hecho de que la nueva expresión quizá puede evaluarse en números en los que la original no estaba definida; debemos tener presente esto en problemas que involucren evaluaciones.

Decimos que una expresión racional está *simplificada* cuando el máximo común divisor (MCD) del numerador y del denominador es 1.

EJEMPLOS

1. Simplificar $\frac{x-1}{x^2-1}$.

Solución: Factorizando el denominador obtenemos

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Observa que hemos cancelado el factor $(x-1)$, así que las dos expresiones anteriores valen lo mismo en cualquier número $x \neq 1$. La expresión de la izquierda no está definida en $x=1$ ya que x^2-1 se anula en $x=1$; en cambio, la expresión de la derecha vale $\frac{1}{2}$ cuando $x=1$.

2. Simplificar $\dfrac{3x^4+7x^3+2x^2}{x^3+7x^2+10x}$.

Solución: Factorizando el numerador y el denominador obtenemos:

$$\frac{3x^4+7x^3+2x^2}{x^3+7x^2+10x}=\frac{x^2(3x+1)(x+2)}{x(x+5)(x+2)}=\frac{x(3x+1)}{(x+5)}.$$

3. Simplificar $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Solución: El numerador es una diferencia de cuadrados y el denominador es un cuadrado perfecto; los factorizamos y obtenemos:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Observa que, en este caso, tanto la expresión original como la expresión simplificada no están definidas para $a=b$.

4. Simplificar $\dfrac{z^3-12z^2+48z-64}{z^2-8z+16}$.

Solución: El numerador es un cubo perfecto y el denominador es un cuadrado perfecto; los factorizamos y obtenemos:

$$\frac{z^3-12z^2+48z-64}{z^2-8z+16}=\frac{(z-4)^3}{(z-4)^2}=z-4.$$

Observa que ahora esta expresión sí está definida en $z=4$ y la original no lo está.

5. Resolver $\dfrac{w^2+2w+1}{2w+2}=\dfrac{4}{3}$.

Solución:

$$\frac{w^2+2w+1}{2w+2}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{(w+1)^2}{2(w+1)}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{w+1}{2}=\frac{4}{3}$$

$$w+1=\frac{8}{3}$$

$$w=\frac{5}{3}.$$

Comprobación: Sustituimos $w = \frac{5}{3}$ en la ecuación original:

$$\frac{w^2+2w+1}{2w+2} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2+2\left(\frac{5}{3}\right)+1}{2\left(\frac{5}{3}\right)+2} = \frac{\frac{25+30+9}{9}}{\frac{10+6}{3}} = \frac{3(64)}{9(16)} = \frac{4}{3}.$$

8.2.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones racionales.

1. $\frac{3y+18}{y+6}$
2. $\frac{z-2}{5z-10}$
3. $\frac{4x-20}{3x-15}$
4. $\frac{a+9}{a^2-81}$
5. $\frac{12b-60}{4b^2-100}$
6. $\frac{w^2+w}{5w^3-2w}$
7. $\frac{(4t-9)(7t+2)}{(7t+2)(t+3)}$
8. $\frac{(6a-2)(3a-4)}{(6a-2)^3}$
9. $\frac{c^2-4c+4}{(c-2)^2(3c+1)}$
10. $\frac{z^2-13z+12}{z^2-144}$
11. $\frac{x^2-10x+25}{x^2+2x-35}$
12. $\frac{z^2+3z-18}{z^2+2z-24}$
13. $\frac{3wz^2}{6wz^2+6w^2z}$
14. $\frac{4ab+8ac}{4ad+16a}$
15. $\frac{a^2-14a+48}{a^2-12a+36}$
16. $\frac{x^2+5x-14}{x^2+10x+21}$
17. $\frac{x^2+3x-7}{x^2-2x-35}$
18. $\frac{w^2+7w-8}{w^2-1}$
19. $\frac{a^2-12a+27}{a^2-7a-18}$
20. $\frac{x^2-16}{x^2+14x+40}$
21. $\frac{c^2+14c+48}{c^2+9c+18}$
22. $\frac{r^2-12r+36}{r^2-4r-12}$
23. $\frac{u^2+22u+121}{u^2+18u+77}$
24. $\frac{s^2-14s+45}{s^2-13s+36}$
25. $\frac{2x^2-7x-15}{3x^2-13x-10}$
26. $\frac{5c^2+7c-24}{2c^2+3c-9}$
27. $\frac{w^2+w-30}{w^2-2w-15}$
28. $\frac{6z^2+23z-4}{2z^2+5z-12}$
29. $\frac{4x^2-25}{2x^2-9x+10}$
30. $\frac{3s^2-25s+28}{9s^2-16}$
31. $\frac{2w^3-6w^2-36w}{w^2-13w+42}$
32. $\frac{z^2-81}{z^2+10z+9}$
33. $\frac{x^2+16x+64}{x^2+5x-24}$

En los ejercicios 34 a 42, resuelve las ecuaciones.

34. $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{8}$
35. $\frac{z^2+2z+1}{z^2+3z+2} = \frac{6}{5}$
36. $\frac{w^2-2w-15}{w^2+w-30} = -\frac{1}{2}$
37. $\frac{t^2-2t-8}{t^2+t-2} = \frac{2}{5}$
38. $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-3}{x+5}$
39. $\frac{s^2-49}{s^2+11s+28} = \frac{3}{14}$
40. $\frac{z^2-8z+16}{z^2-12z+36} = 1$
41. $\frac{w^2+5w-36}{w^2-81} = \frac{7}{12}$
42. $\frac{x^2-25}{x^2-16} = \frac{16}{7}$

43. La razón entre el volumen de una esfera y el perímetro de su ecuador es $\frac{54}{1}$. Encuentra el radio de la esfera.

44. Un número b de dos cifras satisface las siguientes condiciones: el número dividido entre el dígito de las unidades es igual al dígito de las unidades. Además, el dígito de las decenas es igual a la mitad del dígito de las unidades. Encuentra dicho número.

45. Dos números enteros son tales que el mayor es 2 unidades más grande que el menor y el cociente del mayor entre el menor es igual al recíproco del cociente del número menor entre su cuadrado. Encuentra los números.

46. Si al volumen de un cubo le restamos la longitud de una arista, se obtiene la misma cantidad que al sumar la longitud de dicha arista al área de una de las caras. ¿Cuáles son las dimensiones del cubo?

47. En una fracción $\frac{a}{b}$, el denominador es 3 unidades mayor que el numerador. Si se suman 3 unidades al numerador y al denominador, la fracción obtenida es $\frac{1}{6}$ mayor que la original. Encuentra la fracción original.

8.3 MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Las expresiones racionales se multiplican de la misma manera que los números racionales: el numerador del producto es el producto de los numeradores, y el denominador del producto es el producto de los denominadores; pero al igual que en el caso de los números racionales, conviene simplificar primero las expresiones antes de llevar a cabo las multiplicaciones, ya que de esta manera se manipulan expresiones más simples.

Regla para multiplicar expresiones racionales

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son expresiones racionales, donde $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces,

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

EJEMPLOS

1. Efectuar la operación $\frac{4}{15} \times \frac{35}{18}$.

Solución:

$$\frac{4}{15} \times \frac{35}{18} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \times \underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{14}{27}.$$

2. Efectuar la operación $\frac{2x+3}{5x-2} \times \frac{6x-1}{-7x+4}$.

Solución:

$$\frac{2x+3}{5x-2} \times \frac{6x-1}{-7x+4} = \frac{(2x+3)(6x-1)}{(5x-2)(-7x+4)} = \frac{12x^2+16x-3}{-35x^2+34x-8}.$$

3. Efectuar la operación $\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-4} \times \frac{x+1}{x+3}$.

Solución: Hacemos factorizaciones en el numerador y denominador de la primera expresión racional para, en su caso, hacer alguna simplificación.

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-4} \times \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x+1)(x-4)} \times \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+3)(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-4)(x+3)} = \frac{x-5}{x-4}.$$

En el capítulo 6 vimos que cuando se eleva a una potencia un producto AB, lo que se hace es elevar a esa potencia cada uno de los factores. En el caso de la división, tenemos una situación parecida: si A y B son expresiones algebraicas, entonces:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m = \overbrace{\left(\frac{A}{B}\right)\cdots\left(\frac{A}{B}\right)}^{m \text{ veces}} = \frac{\overbrace{AA\cdots A}^{m \text{ veces}}}{BB\cdots B} = \frac{A^m}{B^m}$$

así tenemos la siguiente:

Regla de la potencia de un cociente

Si A y B son expresiones algebraicas, donde $B \neq 0$ y m es un entero positivo, entonces

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{A^m}{B^m}.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\left(\frac{x}{2}\right)^4$.

Solución:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^4 = \frac{x^4}{2^4} = \frac{x^4}{16}.$$

2. Simplificar $\left(\frac{4x}{5y}\right)^3\left(\frac{15y^2}{2x^2}\right)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{4x}{5y}\right)^3\left(\frac{15y^2}{2x^2}\right)^2 &= \frac{(4x)^3}{(5y)^3}\times\frac{(15y^2)^2}{(2x^2)^2}\\ &= \frac{(4^3x^3)(15^2y^4)}{(5^3y^3)(2^2x^4)}\\ &= \frac{4^2 3^2 y}{5x}\\ &= \frac{144y}{5x}.\end{aligned}$$

3. Simplificar $\left(\frac{3a-4b}{c-d}\right)^2\left(\frac{c^2-d^2}{9a^2-16b^2}\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3a-4b}{c-d}\right)^2\left(\frac{c^2-d^2}{9a^2-16b^2}\right) &= \frac{(3a-4b)^2}{(c-d)^2}\times\frac{(c-d)(c+d)}{(3a-4b)(3a+4b)}\\ &= \frac{(3a-4b)(c+d)}{(c-d)(3a+4b)}.\end{aligned}$$

8.3.1 Ejercicios

En cada ejercicio simplifica las expresiones algebraicas.

1. $\frac{x^2+3x-10}{x^2-5x-24}\times\frac{x-8}{x-2}$

2. $\frac{5a^2+7a-24}{a^2-6a+8}\times\frac{a-4}{5a-8}$

3. $\frac{w^2-2w-63}{w^2-49}\times\frac{w-1}{w^2-16w+63}$

4. $\frac{z^2-9z+8}{z^2+2z-8}\times\frac{4-z}{z^2+z-2}$

5. $\dfrac{c^2-3c-18}{c^2-2c-15}\times\dfrac{c^2-25}{c^2-12c+36}$

6. $\dfrac{24x-30}{14x^3}\times\dfrac{21x^5}{4x-5}$

7. $\dfrac{s^2+2s-63}{s^2+2s-24}\times\dfrac{s^2+5s-6}{s^3+8s^2-9s}$

8. $\dfrac{z^2-6z+9}{z^4-9z^2}\times\dfrac{z^2-4}{z^2-5z+6}$

9. $\dfrac{4x^2-25}{x^2-11x+18}\times\dfrac{x^2-81}{2x^2+14x-45}$

10. $\dfrac{z^2+4z-5}{z^2+7z-8}\times\dfrac{z^2+10z+16}{z^2-25}$

11. $\dfrac{w^2-w-12}{w^2-6w-8}\times\dfrac{w^2-7w+10}{w^2-9}$

12. $\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^2+3x-10}\times\dfrac{2x^2+7x-15}{2x^3+x^2}$

13. $\dfrac{9c^2-49}{5c^2+c-6}\times\dfrac{25c^2-36}{3c^2-10c+7}$

14. $\dfrac{2t^2-3t-2}{3t^2-7t+2}\times\dfrac{3t^2-19t+6}{2t^2-11t-6}$

15. $\left(\dfrac{6a^2b}{7c^3}\right)^4\left(\dfrac{7c^4}{9ab^2}\right)^2$

16. $\left(\dfrac{10x^5y^8}{16w^3z^9}\right)^5\left(\dfrac{4w^5z^7}{5x^4y^7}\right)^8$

17. $\left(\dfrac{22r^9s^{10}}{8t^{12}}\right)^6\left(\dfrac{14t^8s}{11r^5}\right)^9$

18. $\left(\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-4x+4}\right)\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$

19. $\left(\dfrac{z^2-12z+36}{z^2-25}\right)^2\left(\dfrac{z+5}{z-6}\right)^3$

20. $\left(\dfrac{(w+9)(w-2)}{w^2+2w-8}\right)^3\left(\dfrac{w^2+8w+16}{w^2-81}\right)^3$

21. $\left(\dfrac{2x^2+2x-40}{2x^2-28x+80}\right)^3\left(\dfrac{x^2-5x-50}{x^2+10x+25}\right)^4$

22. $\left(\dfrac{r^3-49r}{r^2-11r-12}\right)^7\left(\dfrac{r^2-144}{3r^2+17r-28}\right)^5$

8.4 División de expresiones racionales

En el capítulo de números reales vimos que dividir un número a entre un número b distinto de cero significa multiplicar a por el inverso de b.

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Si a y b son números racionales, digamos:

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{r}{s} \quad \text{con} \quad r \neq 0 \quad \text{y} \quad s \neq 0$$

el inverso multiplicativo de b es $\frac{1}{b} = \frac{s}{r}$, ya que:

$$\frac{r}{s} \times \frac{s}{r} = \frac{\cancel{r} \times \cancel{s}}{\cancel{s} \times \cancel{r}} = 1.$$

Así, la regla para dividir a entre b es la siguiente:

$$a \div b = \frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}.$$

Si en lugar de números tenemos expresiones algebraicas, procedemos exactamente igual.

Regla para dividir expresiones racionales

Si P, Q, R y S son polinomios, $Q \neq 0$, $R \neq 0$ y $S \neq 0$, entonces:

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR}.$$

EJEMPLOS

1. Efectuar $\frac{5x^3}{18y^5} \div \frac{20x}{6y^2}$.

Solución:

$$\frac{5x^3}{18y^5} \div \frac{20x}{6y^2} = \frac{5x^3}{18y^5} \times \frac{6y^2}{20x} = \frac{x^2}{12y^3}.$$

2. Efectuar $\frac{x^2+2x-3}{2x^2+9x+4} \div \frac{x^2+3x}{x^2+6x+8}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+9x+4} \div \frac{x^2+3x}{x^2+6x+8} &= \frac{x^2+2x-3}{2x^2+9x+4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2+3x}\\ &= \frac{(x-1)(x+3)(x+4)(x+2)}{(2x+1)(x+4)(x+3)x}\\ &= \frac{(x-1)(x+2)}{(2x+1)x}\\ &= \frac{x^2+x-2}{2x^2+x}.\end{aligned}$$

3. Efectuar $\dfrac{\frac{w+3}{w^2-w}}{\frac{2w+6}{w-1}}$.

Solución: Recordemos que la raya de fracción significa división, es decir, $\frac{a}{b} = a \div b$, así que:

$$\frac{\frac{w+3}{w^2-w}}{\frac{2w+6}{w-1}} = \frac{w+3}{w^2-w} \div \frac{2w+6}{w-1} = \frac{(w+3)(w-1)}{(w^2-w)(2w+6)} = \frac{1}{2w}.$$

Observa que después de hacer la división obtuvimos una expresión racional que tiene como numerador el producto de los extremos de la fracción múltiple y como denominador tiene al producto de los medios.

El ejemplo anterior nos conduce a la siguiente regla práctica.

Si A, B, C y D son polinomios, donde $B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, entonces

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{AD}{BC} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{producto de extremos}\\ \hline \leftarrow \text{producto de medios}\end{array}$$

A esta regla se le conoce vulgarmente como "ley de la tortilla".

8.4.1 Ejercicios

Efectúa las siguientes divisiones y simplifica tus respuestas.

1. $\frac{3a}{5a-5} \div \frac{5a}{a-1}$

2. $\frac{6z+3}{6z} \div \frac{4z+2}{4z}$

3. $\frac{x-1}{x} \div \frac{x^2-2}{x^2}$

4. $\dfrac{\frac{a^3-25a}{a^2+a-2}}{\frac{a^3+10a^2+25a}{a^2+4a+4}}$

5. $\dfrac{\frac{16x^2-40x+25}{2x^2+17x+8}}{\frac{16x^2-25}{x^2-16x+64}}$

6. $\dfrac{\frac{x(x+z)+z(x-z)}{(x-z)(x+z)}}{\frac{x(x+z)-z(x-z)}{x^2-z^2}}$

7. $\dfrac{\frac{w^2-5w-14}{w^2+9w+18}}{\frac{w^2-3w-28}{w^2+8w+15}}$

8. $\dfrac{\frac{3z^2-4z-4}{z^2+5z+6}}{\frac{9z^2+12z+4}{z^2-4}}$

9. $\dfrac{\frac{x^6-64}{x^2}}{\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x}}$

10. $\frac{w^2-64}{w^2-3w-40} \div \frac{w^2+6w-16}{w^2-25}$

11. $\frac{z^2-3z-40}{z^2+5z+4} \div \frac{z^2-12z+32}{z^2+13z+12}$

12. $(x^2-5x+4) \div (x^2+3x-4)$

13. $(y^2-2y-63) \div (y^2-3y-54)$

14. $\frac{r^2+4r-21}{r^2+11r+18} \div \frac{r^2+10r+21}{r^2+15r+54}$

15. $\frac{w^2-121}{w^2+22w+120} \div \frac{w^2-w-132}{w^2-144}$

16. $2z^3-10z^2-72 \div 2z^2-6z-56$

17. $3b^2+8b-60 \div 3b^4-34b^3+80b^2$

18. $\frac{c^2+4c-45}{c^2+14c+45} \div \frac{c^2-c-20}{c^2-4c-45}$

19. $\frac{2r^2+7r+3}{r^2+13r+30} \div \frac{2r^2-13r-7}{r^2-100}$

20. $\frac{a^3-125}{a^2-10a+25} \div \frac{a^2+5a+25}{a^2+10a+25}$

21. $\frac{c^4-16}{(c-2)^2} \div \frac{c^2+2c}{c-2}$

22. $\frac{(2z+4)(z-1)+5-3z}{4+2z} \div (z-z^2+2z^3)$

23. $\frac{w^2-81}{w^2-144} \div \frac{w-9}{w+12}$

24. $\frac{5w^2-32w-21}{w^2+10w+21} \div \frac{2w^2-19w+35}{w^2+14w+49}$

25. $\frac{a^3-2a^2-3a}{6a^2+26a+8} \div \frac{3a^2+5a+2}{2a^2+2a-24}$

26. $\frac{(x-3)(2x-6)-2x+2}{2x-6} \div \frac{x-3}{(x-4)(x-2)+5x-28}$

27. $\frac{(a-5)(a-6)^2-a^2+12a-36}{a^2-36} \div \frac{a^3-216}{a^3+216}$

28. $\frac{(2w-5)(w+2)+6(2w-5)}{(w-5)(w+1)+2w-10} \div \frac{(w-8)^2+5(w-20)-4}{w^2-13w+40}$

29. $\frac{(z+5)(z+3)+1}{z^2+16z+60} \div \frac{(z+4)(z^2-4z+16)+12z(z+4)}{2z^2-11z-40}$

30. $\frac{(c^2+16c+64)(c+6)}{3c^2+3c-18} \div \frac{c^2+11c+24}{c(3c-6)+6(c^2+c-14)+3}$

8.5 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES CON EL MISMO DENOMINADOR

La suma de dos números es 40. Si dividimos el mayor entre el menor, el cociente es 1 y el residuo es 10. Encontrar dichos números.

Solución: Llamamos w al número mayor, entonces $40-w$ es el número menor. Planteamos la ecuación:

$$\frac{w}{40-w}=1+\frac{10}{40-w}. \tag{8.4}$$

Para resolver la ecuación escribimos los términos con w del mismo lado de la ecuación:

$$\frac{w}{40-w}-\frac{10}{40-w}=1.$$

Ahora efectuamos las operaciones

$$\begin{aligned}\frac{w}{40-w}-\frac{10}{40-w}&=1\\ \frac{w-10}{40-w}&=1\\ w-10&=40-w\\ 2w&=50\\ w&=25.\end{aligned}$$

El otro número es:

$$40-w=40-25=15.$$

Entonces los números son 25 y 15.

Comprobación: Sustituimos $w=25$ en la ecuación (8.4):

Lado izquierdo: $\frac{w}{40-w}=\frac{25}{15}$;

lado derecho: $1+\frac{10}{40-w}=1+\frac{10}{15}=\frac{25}{15}$.

Recordemos que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son números racionales con el mismo denominador, entonces,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Si en lugar de números racionales tenemos expresiones racionales, procedemos de la misma forma.

Regla para sumar expresiones racionales con el mismo denominador

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son expresiones racionales, donde $B \neq 0$, entonces,

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}.$$

EJEMPLOS

1. Efectuar la operación $\frac{4t^2-3t}{2t-5}+\frac{-6t+7}{2t-5}$.

Solución:

$$\frac{4t^2-3t}{2t-5}+\frac{-6t+7}{2t-5}=\frac{\left(4t^2-3t\right)+\left(-6t+7\right)}{2t-5}=\frac{4t^2-9t+7}{2t-5}.$$

2. Efectuar la operación $\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x-10}-\frac{5x+13}{x^2-3x-10}$.

Solución:

$$\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x-10}-\frac{5x+13}{x^2-3x-10}=\frac{\left(x^2+3x-2\right)-(5x+13)}{x^2-3x-10}=\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-10}$$
$$=\frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}.$$

3. Resolver la ecuación $\frac{z^2-8z}{z^2-5z-24}+\frac{2z-16}{z^2-5z-24}=\frac{7}{8}$.

Solución:

$$\frac{z^2-8z}{z^2-5z-24}+\frac{2z-16}{z^2-5z-24}=\frac{7}{8}$$
$$\frac{z^2-6z-16}{z^2-5z-24}=\frac{7}{8}$$
$$\frac{(z-8)(z+2)}{(z+3)(z-8)}=\frac{7}{8}$$
$$\frac{(z+2)}{(z+3)}=\frac{7}{8}$$
$$8z+16=7z+21$$
$$z=5.$$

Comprobación: Sustituimos $z=5$ en la ecuación original:

$$\frac{z^2-8z}{z^2-5z-24}+\frac{2z-16}{z^2-5z-24}$$
$$=\frac{5^2-8(5)}{5^2-5(5)-24}+\frac{2(5)-16}{5^2-5(5)-24}=\frac{-15}{-24}+\frac{-6}{-24}=\frac{7}{8}.$$

■

8.5.1 Ejercicios

Realiza la operación indicada.

1. $\frac{x+5}{x+7}+\frac{2x-8}{x+7}$
2. $\frac{z^2+8z}{6-z}+\frac{3z^2-9}{6-z}$
3. $\frac{w-4}{w-9}-\frac{w+3}{w-9}$
4. $\frac{2a^2-14}{3a+7}+\frac{a^2+a}{3a+7}$
5. $\frac{2x^2-6x}{5x-1}-\frac{3x^2-9}{5x-1}$
6. $\frac{4b^2-3b}{2b-9}-\frac{3b^2+3b}{2b-9}$
7. $\frac{2w^2+10w}{w^2-16}-\frac{w^2+10w}{w^2-16}$
8. $\frac{5c^2-15}{6c+10}+\frac{4c^2-10}{6c+10}$
9. $\frac{7b-4}{2b-8}-\frac{2b^2-5b}{8-2b}$
10. $\frac{3a^2-2a}{a+2}+\frac{a^2+2a-16}{2+a}$
11. $\frac{7x^2-6x+3}{5x+4}+\frac{3x^2+4x-1}{5x+4}$
12. $\frac{4z^2+2z-13}{6z-9}-\frac{z^2-4z+11}{6z-9}$
13. $\frac{(w+5)(w-4)}{w^2+13w+42}-\frac{4-w}{(w+6)(w+7)}$

14. $\dfrac{x^2+4x-2}{x^2+10x-11}+\dfrac{3(2x-3)}{x^2+10x-11}$

15. $\dfrac{2z^2+7z+38}{z^2-25}-\dfrac{z^2-8z-12}{z^2-25}$

16. $\dfrac{w^2+9w}{2w^2+13w-45}-\dfrac{6w+54}{2w^2+13w-45}$

17. $\dfrac{a^2+2a+10}{(a-5)(a-8)}+\dfrac{15(2-a)}{a^2-13a+40}$

18. $\dfrac{2x^2+7x+24}{(x-6)(x+6)}+\dfrac{18+6x-x^2}{x^2-36}$

19. $\dfrac{3c^2-5c-2}{c^2-4c-21}-\dfrac{2c^2+5c+7}{c^2-4c-21}$

20. $\dfrac{3a^3+4a^2+4a-5}{2s^2+11s+12}-\dfrac{2a^3+10a^2-8a+3}{2s^2+11s+12}$

21. $\dfrac{-8s^3+s^2-20s}{8s^3-125}+\dfrac{8s^3+3s^2+25}{8s^3-125}$

22. $\dfrac{5x^3-27x^2+40x}{8x^3-27}+\dfrac{3x^3-9x^2+14x-27}{8x^3-27}$

23. $\dfrac{4z^2-5z+8}{z^3+3z^2+3z+1}-\dfrac{3z^2-7z-9}{z^3+3z^2+3z+1}$

24. $\dfrac{w^2-16}{w^3+12w^2+48w+64}+\dfrac{w^2+8w+16}{w^3+12w^2+48w+64}$

25. $\dfrac{20a^2-15a+26}{64a^3-216}-\dfrac{4a^2+9a-10}{64a^3-216}$

En los ejercicios 26 a 32, resuelve las ecuaciones.

26. $\dfrac{3x^2+2x-11}{x^2+16x+64}-\dfrac{2x^2-4x+5}{x^2+16x+64}=-\dfrac{2}{3}$

27. $\dfrac{(3z+4)^2}{9z^2-16}+\dfrac{(3z-4)^2}{9z^2-16}=\dfrac{26}{5}$

28. $\dfrac{w(w+4)}{w^2+5w+4}+\dfrac{w(w+1)}{w^2+5w+4}=1$

29. $\dfrac{x^2-12x+35}{x^2-14x+49}-\dfrac{x^2-3x-28}{x^2-14x+49}=\dfrac{3}{2}$

30. $\dfrac{(z+1)(z-2)}{z^2-3z+2}+\dfrac{(z+2)(z-1)}{z^2-3z+2}=-2$

31. $\dfrac{3a^2+8a+4}{3a^2+5a+2}+\dfrac{3a^2+11a+6}{3a^2+5a+2}=\dfrac{5}{4}$

32. $\dfrac{a^3-7a^2+16a-12}{a^2-8a+15}-\dfrac{a^3-9a^2+27a-27}{a^2-8a+15}=\dfrac{11}{8}$.

33. La suma de dos números es 70. Si dividimos el mayor entre el menor, el cociente es 3 y el residuo es 10. Encuentra dichos números.

34. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 7 cm. Si se divide el cateto mayor entre el menor, el cociente es 1 obteniendo también 1 como residuo. ¿Cuánto vale la hipotenusa del triángulo?

35. Dos números enteros pares consecutivos satisfacen las siguientes condiciones: si al cociente del menor entre el mayor se le resta el recíproco del número obtenido al sumar dos unidades al numerador y al denominador de la fracción, se obtiene $-\frac{1}{2}$. Encuentra dichos números.

36. Cierto número de amigas deciden tejer manteles para vender. Para tener un ingreso en un plazo menor, deciden tejerlos de cuadros, uniendo cada semana los que tejen durante ese lapso. Todas tejen semanalmente el mismo número de cuadros. La primera semana reúnen 108 cuadros, la segunda semana 116, la tercera 76. Al finalizar la tercera semana, cada una ha tejido 75 cuadros. ¿Cuántas personas tejen?

37. La diferencia de dos números positivos es 121. Si dividimos el mayor entre el menor, el cociente es 5 y el residuo es 17. Encuentra los números.

8.6 Suma y resta de expresiones racionales con distinto denominador

¿Cuántos metros de tela se pueden comprar con \$20, si sabemos que con esa cantidad hubiéramos podido comprar 6 metros más de tela si cada metro hubiera costado \$3 menos?

Solución: Llamamos x al numero de metros de tela, entonces el precio de un metro de tela será $\dfrac{20}{x}$.

El precio por metro en el segundo caso será $\dfrac{20}{x+6}$.

La ecuación que tenemos que plantear es:

$$\frac{20}{x} - 3 = \frac{20}{x+6}. \tag{8.5}$$

Efectuamos la resta del lado izquierdo y resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{20}{x} - 3 &= \frac{20}{x+6} \\ \frac{20-3x}{x} - \frac{20}{x+6} &= 0 \\ (20-3x)(x+6) - 20x &= 0 \\ 20x + 120 - 3x^2 - 18x - 20x &= 0 \\ 0 &= 3x^2 + 18x - 120 \\ 0 &= 3\left(x^2 + 6x - 40\right). \end{aligned}$$

Para factorizar en el miembro derecho y encontrar así las soluciones de esta ecuación, debemos encontrar dos números cuyo producto sea -40 y cuya suma sea 6. Dichos números son 10 y -4. De donde,

$$\left(x^2 + 6x - 40\right) = (x+10)(x-4) = 0.$$

Por tanto,

$$x = -10 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Observa que como una de las soluciones es negativa la desechamos, pues no tiene sentido en este problema.

Se pueden comprar 4 metros de tela.

Comprobación: Si con \$20 se pueden comprar 4 metros de tela, entonces la tela cuesta \$5 el metro. Si el metro de tela costara \$3 menos, es decir, \$2, entonces se podrían comprar 10 metros; es decir, 6 metros más.

Cuando tenemos que sumar dos expresiones racionales con distinto denominador, lo que debemos hacer es reescribirlas de manera que tengan el mismo denominador. El nuevo denominador debe ser un múltiplo de los denominadores originales, pero lo más simple es encontrar el de menor grado posible; es decir, el mínimo común denominador, también llamado mínimo común múltiplo.

El primer ejemplo que vamos a ver es numérico, para recordar el procedimiento.

EJEMPLOS

1. Efectuar la operación $\frac{13}{20} + \frac{7}{18}$.

Solución:

$$20 = 2 \times 10 \;\text{ y }\; 18 = 2 \times 9,$$

así que el mínimo común múltiplo de 20 y 18 es $2 \times 10 \times 9 = 180$, entonces:

$$\frac{13}{20} + \frac{7}{18} = \frac{13 \times 9}{20 \times 9} + \frac{7 \times 10}{18 \times 10} = \frac{(13 \times 9) + (7 \times 10)}{180} = \frac{117 + 70}{180} = \frac{187}{180}.$$

En general, podemos eliminar el segundo paso y escribir simplemente:

$$\frac{13}{20}+\frac{7}{18}=\frac{(13\times 9)+(7\times 10)}{180}=\frac{117+70}{180}=\frac{187}{180}.$$

2. Efectuar la operación $\frac{w}{w-2}+\frac{5}{w+1}$.

Solución: El mínimo común múltiplo de $w-2$ y $w+1$ es $(w-2)(w+1)$, entonces,

$$\frac{w}{w-2}+\frac{5}{w+1}=\frac{w(w+1)+5(w-2)}{(w-2)(w+1)}$$
$$=\frac{w^2+6w-10}{w^2-w-2}.$$

3. Efectuar la operación $\frac{3t-8}{t^2-2t-3}-\frac{t-4}{t^2+6t+5}$.

Solución: Factorizamos los denominadores para encontrar el mínimo común múltiplo:

$$t^2-2t-3=(t+1)(t-3),\qquad t^2+6t+5=(t+1)(t+5).$$

Así que el mínimo común múltiplo de los denominadores es

$$(t+1)(t-3)(t+5).$$

Procedemos a efectuar la operación.

$$\frac{3t-8}{t^2-2t-3}-\frac{t-4}{t^2+6t+5}=\frac{3t-8}{(t+1)(t-3)}-\frac{t-4}{(t+1)(t+5)}$$
$$=\frac{(3t-8)(t+5)-(t-4)(t-3)}{(t+1)(t-3)(t+5)}$$
$$=\frac{3t^2+7t-40-\left(t^2-7t+12\right)}{(t+1)(t-3)(t+5)}=\frac{2t^2+14t-52}{(t+1)(t-3)(t+5)}.$$

4. Resolver la ecuación $\frac{6x+5}{12}+\frac{2x-3}{3x+6}=\frac{3x+7}{6}$.

Solución: Para efectuar la suma del lado izquierdo utilizamos el mínimo común múltiplo de 12 y $3x+6$; es decir, $12(x+2)$.

$$\frac{6x+5}{12}+\frac{2x-3}{3x+6}=\frac{3x+7}{6}$$
$$\frac{(6x+5)(x+2)+4(2x-3)}{12(x+2)}=\frac{3x+7}{6}$$
$$\frac{6x^2+25x-2}{12(x+2)}=\frac{3x+7}{6}.$$

Ahora multiplicamos por $12(x+2)$ ambos lados de la ecuación y simplificamos.

$$6x^2+25x-2=\frac{12(x+2)(3x+7)}{6}$$
$$=2\left(3x^2+13x+14\right)$$

y resolvemos la ecuación:

$$x = -30.$$

Comprobación: Sustituimos $x = -30$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\frac{6x+5}{12} + \frac{2x-3}{3x+6} = \frac{6(-30)+5}{12} + \frac{2(-30)-3}{3(-30)+6}$

$= \frac{-175}{12} + \frac{63}{84} = -\frac{175}{12} + \frac{9}{12} = -\frac{83}{6}.$

Lado derecho: $\frac{3x+7}{6} = \frac{3(-30)+7}{6} = -\frac{83}{6}.$

8.6.1 Ejercicios

Realiza la operación indicada.

1. $\frac{x^2+5}{x+2} - \frac{x^2-3x}{x-2}$
2. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$
3. $\frac{1}{r-3} + \frac{1}{r+3}$
4. $\frac{z}{z^2-9} - \frac{5}{z^2+6z+9}$
5. $\frac{x-2}{x+2} + 1$
6. $\frac{w^2}{w^2-4} - \frac{1}{w-2}$
7. $\frac{a^2-7a+4}{a^2+10a+25} + \frac{1}{a+5}$
8. $\frac{c}{c+7} - \frac{c-2}{c-11}$
9. $\frac{z-1}{z-8} + \frac{z+5}{z-6}$
10. $\frac{5r-5}{r+1} - \frac{5r+5}{r-1}$
11. $\frac{w+1}{w^2+3} + \frac{w-1}{w^2-3}$
12. $\frac{a}{a^2-4} - \frac{a+2}{a^2-4a+4}$
13. $\frac{1+6x}{1-6x} - \frac{1-6x}{1+6x}$
14. $\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x} - \frac{4x}{4-x^2}$
15. $\frac{7r}{49-r^2} - \frac{7-r}{r+7}$
16. $z + \frac{5z}{z-8} - \frac{6z}{z+8}$
17. $\frac{2a^2+5a-6}{2a^2+5a-6} + 5$
18. $1 - \frac{x+y}{x-y}$
19. $\frac{1}{w-z} - \frac{z}{w^2-z^2}$
20. $\frac{b^2-3b+11}{b^2-14b+49} - \frac{3}{b-7}$
21. $\frac{5c^2-20c}{c^2-81} - \frac{c-9}{c^2+18c+81}$
22. $\frac{3a}{a^2-2a-24} + \frac{2}{a^2+5a-14}$
23. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4ab}{a^2-b^2}$
24. $\frac{a}{a^2+a-20} + \frac{3-a}{a^2-6a+8} - \frac{1}{a^2+8a+15}$
25. $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{12x}{x^2-9}$
26. $\frac{z+3}{z^2+3z+2} - \frac{z-1}{z^2+z-2}$
27. $\frac{c+4}{c^2-11c+30} + \frac{c-4}{c^2+c-42}$
28. $\frac{8}{w+4} + \frac{3w}{4-w} + \frac{3w^2+16}{16-w^2}$
29. $\frac{x-10}{x^2+4x-32} - \frac{x-8}{x^2-x-72}$
30. $\frac{3x-1}{2x^2-9x-5} - \frac{2x-1}{3x^2-14x-5}$
31. $\frac{2z}{6z^2+7z+2} + \frac{3z-1}{3z^2-10z-8}$
32. $\frac{4z^2-9}{7z^2+22z+3} - \frac{2z^2-3}{14z^2+2z}$
33. $\frac{1}{2a^2+11a-6} - \frac{3}{4a^2+14a-30}$

En los ejercicios 34 a 47, resuelve las ecuaciones.

34. $\frac{1}{w+2} + \frac{1}{w-2} = \frac{8}{w^2-4}$
35. $\frac{3}{z-1} + \frac{z}{z+5} = 1$
36. $\frac{z}{z+8} + \frac{1}{z-6} = 1$
37. $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-3} = 1$
38. $\frac{x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-6}{x-7} - \frac{x-7}{x-8}$
39. $\frac{w}{w+8} = \frac{4}{w-8} + 1$

40. $1+\frac{5}{1+x}=-\frac{x}{1-x}$

41. $\frac{2c}{c+3}+\frac{4}{c-3}=2$

42. $\frac{a+3}{a+5}+\frac{3}{a-5}=\frac{a+1}{a-5}$

43. $\frac{3w}{w-3}=\frac{2w}{w+5}+1$

44. $\frac{z}{z+4}-\frac{1}{z-4}=1$

45. $\frac{r-2}{r+2}+\frac{r+2}{r-2}=\frac{10}{3}$

46. $\frac{4s-2}{9}-\frac{3s-6}{5s-4}=\frac{2s-1}{6}$

47. $\frac{x+3}{x-3}-1=\frac{2}{x+3}$

48. Un número es el triple de otro. La suma de sus recíprocos es $\frac{1}{6}$. ¿Cuáles son dichos números?

49. Si dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia total R_t obtenida se calcula como,

$$\frac{1}{R_t}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Si se tienen dos resistencias y el valor de una de ellas es 5 ohms menos que la otra, ¿qué capacidad debe tener cada una para obtener, al conectarlas en paralelo, una resistencia total de 6 ohms?

50. Un número es el cuádruple de otro. Si la suma de sus recíprocos es 5, ¿cuáles son dichos números?

51. Un número más su recíproco es igual a $\frac{25}{12}$. Encuentra dichos números.

52. Encuentra dos números positivos tales que su suma sea 9 y la suma de sus recíprocos sea $\frac{1}{2}$.

53. Una bomba grande puede vaciar un tanque de agua en 15 horas menos que una bomba chica. Entre las dos pueden vaciarlo en 10 horas. ¿En cuánto tiempo lo vaciaría la bomba grande?

54. Encuentra dos números enteros consecutivos impares tales que la suma de sus recíprocos es $\frac{8}{15}$.

55. La media armónica de dos números a y b se define como

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Encuentra dos números enteros consecutivos impares tales que su media armónica sea igual a $\frac{15}{4}$.

La regla de los signos también se sigue en la división

$(+)\div(+)=(+)$
$(+)\div(-)=(-)$
$(-)\div(+)=(-)$
$(-)\div(-)=(+)$

8.7 División de polinomios

Cuando dividimos un número entero entre otro, algunas veces obtenemos un residuo distinto de cero, éste es el caso cuando el dividendo no es múltiplo del divisor.

$$\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Lo anterior también puede expresarse como:

$$27 = (4\times 6) + 3$$

$$\text{dividendo} = (\text{divisor}\times\text{cociente}) + \text{residuo}.$$

Cuando dividimos polinomios se puede presentar el mismo tipo de situación.

Vamos a copiar el algoritmo de la división de números enteros al caso de la división de polinomios.

Paso 1

3	$3x$	⟵	Calcular $6x^2 \div 2x$
$14\overline{)456}$	$2x+5\overline{)6x^2+3x-8}$		
-42	$-6x^2-15x$	⟵	Restar $3x(2x+5)$
3	$-12x-8$		

Paso 2

32	$3x-6$	$\longleftarrow$	Calcular $(-12x)\div 2x$
$14\overline{)456}$	$2x+5\overline{)\,6x^2+3x-8}$		
-42	$-6x^2-15x$		
36	$-12x-8$	$\longleftarrow$	Primer residuo
-28	$+12x+30$	$\longleftarrow$	Restar $-6(2x+5)$
8	22	$\longleftarrow$	Residuo.

El cociente es $3x\quad 6$ y el residuo es 22.

Comprobación:

$$(3x-6)(2x+5)+22=\left(6x^2-12x+15x-30\right)+22=6x^2+3x-8.$$

Observación:

El residuo es un polinomio de grado menor que el grado del divisor.
En el ejemplo anterior aplicamos las siguientes reglas:

Reglas para dividir dos polinomios

1. Se ordenan ambos polinomios en orden descendente de los exponentes.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente.
3. Al dividendo se le resta el producto del divisor por el primer término del cociente y se obtiene un primer residuo.
4. Se divide el primer término de este residuo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el segundo término del cociente.
5. Se procede de manera similar hasta obtener un residuo cero o de grado menor que el del divisor.
6. Comprobar el resultado verificando que:

cociente × divisor + residuo = dividendo.

Es conveniente recordar que:

$$\boxed{\begin{array}{l}(+)\div(+)=(+)\\(+)\div(-)=(-)\\(-)\div(+)=(-)\\(-)\div(-)=(+)\end{array}}$$

EJEMPLOS

1. Dividir $4a^3-5a^2+3a-8$ entre $2a^2$.

Solución: Escribimos los polinomios en la caja de la división en orden descendente respecto al exponente de a.

Paso 1

$2a$	$\longleftarrow$	Calcular $4a^3\div 2a^2=2a$
$2a^2\overline{)\,4a^3-5a^2+3a-8}$		
$-4a^3$	$\longleftarrow$	Restar $2a\left(2a^2\right)$
$0\quad -5a^2+3a-8$	$\longleftarrow$	Primer residuo

Paso 2

$$\begin{array}{rl} & 2a-\tfrac{5}{2} \\ 2a^2 \,\big)\!\! & \overline{4a^3-5a^2+3a-8} \\ & -4a^3 \\ \hline & 0\ -5a^2+3a-8 \\ & \quad +5a^2 \\ \hline & \quad 0\ +3a-8 \end{array}$$

⟵ Calcular $-5a^2 \div 2a^2 = -\frac{5}{2}$

⟵ Restar $-\frac{5}{2}(2a^2)$

⟵ El residuo $3a-8$ es de menor grado que el divisor $2a^2$: el proceso termina.

Comprobación:

$$2a^2\left(2a-\frac{5}{2}\right)+3a-8=4a^3-5a^2+3a-8.$$

2. Dividir $5x-7x^2+12x^3-9$ entre $3x^2-4+5x$.

Solución: Escribimos los polinomios en la caja de la división en orden descendente respecto al exponente de x.

Paso 1

$$\begin{array}{rl} & 4x \\ 3x^2+5x-4\,\big)\!\! & \overline{12x^3-\ 7x^2+\ 5x-\ 9} \\ & -12x^3-20x^2+16x \\ \hline & \quad -27x^2+21x-\ 9 \end{array}$$

⟵ Calcular $12x^3 \div 3x^2 = 4x$

⟵ Restar $4x(3x^2+5x-4)$

⟵ Primer residuo.

Paso 2

$$\begin{array}{rl} & 4x-\ 9 \\ 3x^2+5x-4\,\big)\!\! & \overline{12x^3-\ 7x^2+\ 5x-\ 9} \\ & -12x^3-20x^2+16x \\ \hline & \quad -27x^2+21x-\ 9 \\ & \quad +27x^2+45x-36 \\ \hline & \qquad\quad 66x-45 \end{array}$$

⟵ Calcular $-27x^2 \div 3x^2 = -9$

⟵ Restar $-9(3x^2+5x-4)$

⟵ El residuo $66x-45$ es de menor grado que el divisor $3x^2+5x-4$: el proceso termina.

Comprobación:

$$\begin{aligned}(4x-9)(3x^2+5x-4)+(66x-45)&=(12x^3-7x^2-61x+36)+(66x-45)\\&=12x^3-7x^2+5x-9.\end{aligned}$$

3. Calcular $(4x^3-1)\div(2x+1)$.

Solución: Escribimos los polinomios en la caja de división, incluyendo *ceros* para las potencias de x menores que x^3 que no aparecen en el dividendo.

Paso 1

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \\ \hline 2x+1 & 4x^3+0x^2+0x-1 \\ & -4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -2x^2+0x-1 \end{array}$$

⟵ Calcular $4x^3 \div 2x = 2x^2$

⟵ Restar $2x^2(2x+1)$

Paso 2

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-x \\ \hline 2x+1 & 4x^3+0x^2+0x-1 \\ & -4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -2x^2+0x-1 \\ & \quad +2x^2+\ x \\ \hline & \qquad\quad x-1 \end{array}$$

⟵ Calcular $-2x^2 \div 2x$

⟵ Restar $-x(2x+1)$.

Paso 3

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-x+\frac{1}{2} \\ \hline 2x+1 & 4x^3+0x^2+0x-1 \\ & -4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad -2x^2+0x-1 \\ & \quad +2x^2+\ x \\ \hline & \qquad\quad x-1 \\ & \qquad -x-\frac{1}{2} \\ \hline & \qquad\quad -\frac{3}{2} \end{array}$$

⟵ Calcular $x \div 2x = \frac{1}{2}$

⟵ Restar $\frac{1}{2}(2x+1)$

⟵ El residuo $-\frac{3}{2}$ es de menor grado que el divisor $2x+1$: el proceso termina.

Comprobación:

$$\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)(2x+1)-\frac{3}{2}=\left(4x^3+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}=4x^3-1.$$

Observa que el residuo no puede ser $x-1$, como quedaría al final del segundo paso, pues el grado del residuo debe ser menor que el grado del divisor.

8.7.1 Ejercicios

En cada ejercicio haz la división que se indica.

1. $(6a^2-5a-6)\div(3a+2)$
2. $5c^4\div(c^2+c-1)$
3. $(y^3-8y-10)\div(3-y)$
4. $(18x+65+x^2)\div(x+7)$
5. $18x^6\div(6x^3-3x)$
6. $(z^6-64)\div(z+2)$
7. $(27w^5-2)\div(3w-1)$
8. $(x^4-2x^3)\div(x+1)$
9. $(a^4-625)\div(a+5)$
10. $(12z+4z^2+14)\div(2z+3)$
11. $(10y^2-17y+8)\div(5y-1)$
12. $(3w^2-4w-4)\div(2-w)$
13. $7z^5\div(z^3-z^2+2)$
14. $(a^2+12)\div(a+4)$
15. $(y^5+1024)\div(y+4)$

16. $(3y^3+7y^2-4)\div(-3y^2-4y+4)$
17. $(5a^3-3a^4+1-a)\div(1-2a+3a^2)$
18. $(w^7-5w^3+7w^4-35)\div(w^3+7)$
19. $(2x^3-8x^2+4x-10)\div(x-1)$
20. $(1-w^5)\div(1-w)$
21. $(3y^3-10y^2+17y-12)\div(y^2-2y+3)$
22. $(24b^6+5b-26b^5+8b^2+38b^4-13b^3)\div(6b^3+5b-2b^2)$
23. $(6x^5+19x^4+5x^3-4x^2+24x-8)\div(3x^2+5x-2)$
24. $(24b^5-26b^4+5b^3+12b^2-3b)\div(-6b^3+5b-3)$
25. $(12x^4+2x^3-3x^2+12x-9)\div(3x^2-x+2)$
26. $(2z^4-13z^3+31z^2-38z+24)\div(2z^2-3z+4)$
27. $(2z^5+z^4-z^3+8z^2+4z-4)\div(2z^2+z-1)$
28. $(8w^4+4w^3-9w^2+3w-2)\div(4w^3-3w^2+w-1)$
29. $(32x^6-8x^5+24x^4+4x^3-21x^2+8x-15)\div(8x^4+x-5)$
30. $(4y^4+6y^3-16y^2+42y-20)\div(2y^2+6y-4)$
31. $(4z^4+12z^3+13z^2+6z+1)\div(2z^2+3z+1)$
32. $(14b^5-54b^4+84b^3-24b^2-32b)\div(7b^3-6b^2-4b)$
33. $(12w^8-4w^7-23w^6+19w^5-60w^4-42w^3+6w^2-48w)\div(6w^4+7w^3-w^2+8w)$
34. $(7y^{11}+5y^9-4y^7-59y^6+14y^5-40y^4+10y^3+32y^2+16y-63)\div(7y^5+5y^3-4y-3)$
35. $(10x^9-16x^8+15x^7-55x^6+49x^5+14x^4-17x^3+5x^2+6x-7)\div(5x^4-8x^3+2x-1)$
36. $\dfrac{60w^{10}-22w^8-80w^7+42w^6+48w^5+29w^4-101w^3+13w^2+14w-3}{6w^5+2w^3-8w^2-w+1}$
37. $(24a^9-22a^7+7a^6-30a^5+83a^4-8a^3+45a^2-23a)\div(8a^3+6a-3)$
38. $\dfrac{42b^{12}-15b^{10}-24b^9-58b^8-12b^7+16b^6-53b^5+24b^4+7b^3+6b^2-2b+6}{6b^5-9b^3+2b-6}$
39. $\dfrac{120z^{15}-114z^{12}-60z^{10}-84z^9+24z^7+93z^6+57z^4-33z^3-6z^2+3z}{12z^7-9z^4-6z^2+3z}$
40. $\dfrac{45x^{13}+107x^{11}-108x^{10}+6x^9-24x^8-130x^7+216x^6-224x^5+120x^4}{9x^6+7x^4-10x^2+12x-10}$

8.8 División de polinomios de varias variables

Podemos dividir polinomios en varias variables; para ello, escribimos ambos polinomios en orden descendente con respecto al exponente de una de las variables, y se procede como en el caso anterior.

Ejemplos

1. Dividir $8a^3-b^3$ entre $2a-b$.

Solución: Ordenamos los polinomios respecto a la variable a. Escribimos ceros para dejar los espacios de las potencias de a que faltan.

$$\begin{array}{r|l} & 4a^2+2ab+b^2 \\ \hline 2a-b & 8a^3+0+0-b^3 \\ & -8a^3+4a^2b \\ \hline & +4a^2b+0-b^3 \\ & -4a^2b+2ab^2 \\ \hline & +2ab^2-b^3 \\ & -2ab^2+b^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Comprobación: Para comprobar el resultado realizamos la multiplicación,

$$\begin{aligned}\left(4a^2+2ab+b^2\right)(2a-b) &= 8a^3+4a^2b+2ab^2-4a^2b-2ab^2-b^3\\ &= 8a^3-b^3.\end{aligned}$$

2. Dividir $x^3-4x^2a+2xa^2-a^3$ entre $x-a$.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} & x^2-3xa-a^2 \\ \hline x-a & x^3-4x^2a+2xa^2-a^3 \\ & -x^3+\ x^2a \\ \cline{2-2} & \quad -3x^2a+2xa^2-a^3 \\ & \quad +3x^2a-3xa^2 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad -\ xa^2-a^3 \\ & \qquad\quad +\ xa^2-a^3 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\quad -2a^3 \end{array}$$

Comprobación: En este caso, como la división no es exacta, es decir, el residuo no fue 0, hay que hacer el producto $\left(x^2-3xa-a^2\right)(x-a)$ y sumar el término $-2a^3$; es decir,

$$\begin{aligned}\left(x^2-3xa-a^2\right)(x-a)-2a^3 &= \left(x^3-3x^2a-xa^2-x^2a+3xa^2+a^3\right)-2a^3\\ &= x^3-4x^2a+2xa^2-a^3.\end{aligned}$$

3. Dividir $15w^3z^3-6wz^5+24w^5z-w^2z^4-50w^4z^2\div 6w^2z+8z^3-5wz^2$.

Solución: Escribimos ambos polinomios en orden descendente con respecto al exponente de la variable w; es decir,

$$24w^5z-50w^4z^2+15w^3z^3-w^2z^4-6wz^5\div 6w^2z-5wz^2+8z^3.$$

Ahora efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} & 4w^3-5w^2z-7wz^2+\tfrac{2}{3}z^3 \\ \hline 6w^2z-5wz^2+8z^3 & 24w^5z-50w^4z^2+15w^3z^3-\ w^2z^4-\ 6wz^5 \\ & -24w^5z+20w^4z^2-32w^3z^3 \\ \cline{2-2} & \quad -30w^4z^2-17w^3z^3-\ w^2z^4-\ 6wz^5 \\ & \quad +30w^4z^2-25w^3z^3+40w^2z^4 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad -42w^3z^3+39w^2z^4-\ 6wz^5 \\ & \qquad\quad +42w^3z^3-35w^2z^4+56wz^5 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 4w^2z^4+50wz^5-\ 6wz^5 \\ & \qquad\qquad\quad -4w^2z^4+\tfrac{10}{3}wz^5-\tfrac{16}{3}z^6 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad\quad +\tfrac{160}{3}wz^5-\tfrac{16}{3}z^6 \end{array}$$

Como $\frac{160}{3}wz^5$ tiene grado 1 en w es menor que el grado de $6w^2z$ en w, así que ya no seguimos dividiendo. Por tanto, el residuo de la división es $\frac{160}{3}wz^5-\frac{16}{3}z^6$.

Comprobación: Hacemos primero el producto:
$\left(4w^3-5w^2z-7wz^2+\frac{2}{3}z^3\right)\left(6w^2z-5wz^2+8z^3\right)$:

$$
\begin{array}{rl}
 & 4w^3 - 5w^2z - 7wz^2 + \tfrac{2}{3}z^3 \\
\times & 6w^2z - 5wz^2 + 8z^3 \\
\hline
 & 24w^5z - 30w^4z^2 - 42w^3z^3 + 4w^2z^4 \\
 & \quad - 20w^4z^2 + 25w^3z^3 + 35w^2z^4 - \tfrac{10}{3}wz^5 \\
 & \qquad + 32w^3z^3 - 40w^2z^4 - 56wz^5 + \tfrac{16}{3}z^6 \\
\hline
 & 24w^5z - 50w^4z^2 + 15w^3z^3 - w^2z^4 - \tfrac{178}{3}wz^5 + \tfrac{16}{3}z^6
\end{array}
$$

De donde:

$$
\begin{aligned}
\left(4w^3 - 5w^2z - 7wz^2 + \tfrac{2}{3}z^3\right)\left(6w^2z - 5wz^2 + 8z^3\right) + \tfrac{160}{3}wz^5 - \tfrac{16}{3}z^6 &= \\
24w^5z - 50w^4z^2 + 15w^3z^3 - w^2z^4 - \tfrac{178}{3}wz^5 + \tfrac{16}{3}z^6 + \tfrac{160}{3}wz^5 - \tfrac{16}{3}z^6 &= \\
24w^5z - 50w^4z^2 + 15w^3z^3 - w^2z^4 - 6wz^5.
\end{aligned}
$$

8.8.1 Ejercicios

Efectúa las siguientes divisiones.

1. $\left(x^5 - a^5\right) \div (x + a)$
2. $\left(y^2 - 4yz + 4z^2\right) \div (y - 2z)$
3. $\left(1 - \dfrac{b^4}{z^4}\right) \div \left(\dfrac{1}{z^3} + \dfrac{b}{z^4}\right)$
4. $\left(\dfrac{a^5}{b^5} + 1\right) \div \left(\dfrac{a}{b^5} + \dfrac{1}{b^4}\right)$
5. $\left(a^6 - b^6\right) \div (a + b)$
6. $\left(c^2 + 6cd + 5d^2\right) \div (c + d)$
7. $\left(r^4 - s^4\right) \div (r - s)$
8. $\left(x^7 + y^7\right) \div (x + y)$
9. $\left(16w^8 - 25z^8\right) \div \left(4w^2 - 5z^2\right)$
10. $\left(36a^3b - 73a^2b^2 - 35ab^3\right) \div \left(9a^2 - 7ab\right)$
11. $\left(8x^3 + 2x^2b - 5xb^2 + b^3\right) \div \left(4x^2 + 3xb - b^2\right)$
12. $\left(14w^5 - 11w^2z - 18w^2z^4 - 15wz^2 + 27z^5\right) \div \left(2w^2 - 3z\right)$
13. $\left(20a^2b^7 - 3a^3b^6 + 28a^4b^5 + 6a^6b^3 - 13a^5b^2\right) \div \left(4b^4 - 3ab^3 + 2a^2b^2\right)$
14. $\left(125a^3 + 25a^2b + 25a^2c - 5abc - b^2c - bc^2\right) \div \left(25a^2 - bc\right)$
15. $\left(3x^4 + 4x^3y + 9x^2y^2 - 6xy^3 + 4y^4\right) \div \left(3x^2 - 2xy + y^2\right)$
16. $\left(15c^4 - 7c^3d - 6c^2d^2 + 9cd^3 - 5d^4\right) \div \left(5c^2 + cd - 3d^2\right)$
17. $\left(20a^5b^2 - 3a^3b^4 + 30a^4b^3 + 3ab^6 + 4a^2b^5\right) \div \left(4a^2b^2 + b^4 - 2ab^3\right)$
18. $\left(x^3 - y^3 - z^3 - xyz - 2y^2z - 2yz^2\right) \div (x - y - z)$
19. $\left(216a^3 - 72abc + 64b^3 + c^3\right) \div (6a + 4b + c)$ -
20. $\left(15x^4y^3 - 21x^3y^6 - 24x^2y^7 + 24xy^8 - 15y^9\right) \div \left(3x^2y^2 - 6xy^3\right)$
21. $\left(90r^4 + 147r^3s + 40r^2s^2 - 36rs^3 - 18s^4\right) \div \left(6r^2 + rs - 2s^2\right)$
22. $\dfrac{m^6 - 3m^5n - m^4n^2 - 24m^3n^3 + 81m^2n^4 + 27mn^5 - 81n^6}{m^4 - 6m^3n + 8m^2n^2 + 6mn^3 - 9n^4}$
23. $\left(18r^2s^3t^2 - 18r^2s^5t^2 - 18r^2s^2t^2 + 18r^2s^9t^2\right) \div \left(1 - s^4\right)$
24. $\left(125x^6 - 76x^5y + 15x^4y^2 - 126x^3y^3 + 75x^2y^4 - 20xy^5 + 3y^6\right) \div \left(x^3 - y^3\right)$
25. $\dfrac{-48m^3 - 3n - 24m^2n^2 - 128m^7n^3 - 8m^4n^4 + 48m^8n^4 + 3m^5n^5 - 64m^6n^5 + 24m^7n^6}{3m^5n^4 - 8m^4n^3 - 3}$
26. $\dfrac{2a^6b^6 - 6a^8b^7 - 3a^4b^8 + 9a^6b^9 + 12a^7b^9 - 5a^2b^{10} + 15a^4b^{11} - 18a^5b^{11} - 30a^3b^{13}}{6a^2b^8 - 3a^3b^6 + ab^5}$

8.9 División sintética

Hagamos la división $(2x^2-9x-1)\div(x-3)$.

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3 \\ \hline x-3 & 2x^2-9x-1 \\ & -2x^2+6x \\ \hline & \quad -3x-1 \\ & \quad +3x-9 \\ \hline & \qquad -10 \end{array}$$

Veamos ahora una manera más compacta de hacer esta división. Dejamos de escribir las potencias de x y únicamente escribimos los coeficientes.

Observa que, en el ejemplo, el divisor es $x-a=x-3$.
Escribimos a 3 y los coeficientes del dividendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & & \\ \hline & & & \end{array}$$

1. Bajamos el primer coeficiente: 2.
2. Multiplicamos 2 por 3 y el resultado (6) lo ponemos debajo del -9.
3. Sumamos $-9+6=-3$.
4. Multiplicamos -3 por 3 y el resultado (-9) lo ponemos debajo del -1.
5. Sumamos $-1-9=-10$.

En el siguiente esquema, puede observarse la ejecución de los pasos anteriores:

1) $\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & & \\ \hline & 2 & & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & 6 & \\ \hline & 2 & & \end{array}$ 3) $\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \end{array}$

4) $\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & 6 & -9 \\ \hline & 2 & -3 & \end{array}$ 5) $\begin{array}{r|rrr} & 2 & -9 & -1 \\ 3 & \downarrow & 6 & -9 \\ \hline & 2 & -3 & -10 \end{array}$

A este tipo de división se le llama *división sintética.*

De los números debajo de la raya horizontal $(2,-3,-10)$: el último (-10) es el residuo de la división $(2x^2-9x-1)\div(x-3)$ y los demás $(2,-3)$ son los coeficientes del cociente, que tendrá un grado uno menor que el dividendo.

Por tanto:

$$\frac{(2x^2-9x-1)}{(x-3)}=2x-3-\frac{10}{x-3}.$$

Comprobemos el resultado obtenido; es decir, debemos multiplicar el divisor por el cociente y sumarle el residuo; esto nos debe dar el dividendo.

$$(x-3)(2x-3)-10=(2x^2-9x+9)-10=2x^2-9x-1.$$

Ejemplos

1. Calcular $(3x^3+17x^2-8x-12)\div(x+6)$.

Solución: Ahora $a=-6$ y $x-a=x-(-6)$.
El ciclo que tenemos que efectuar ahora es “multiplicar por -6 y sumar”.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 17 & -8 & -12 \\ \underline{-6} & \downarrow & -18 & +6 & +12 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El cociente es $3x^2 - x - 2$ y el residuo es 0; es decir,

$$\left(3x^3 + 17x^2 - 8x - 12\right) = (x+6)\left(3x^2 - x - 2\right).$$

Comprobación:

$$(x+6)\left(3x^2 - x - 2\right) = 3x^3 + 17x^2 - 8x - 12.$$

2. Calcular $\left(x^4 + 7x + 5\right) \div (x+2)$.

Solución: Como el dividendo $x^4 + 7x + 5$ no tiene términos en x^3 ni en x^2, escribimos 0 en los lugares que ocupan los coeficientes de estos dos términos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ \underline{-2} & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -1 & 7 \end{array}$$

Así, el cociente obtenido es $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y el residuo es 7.

Comprobación:

$$\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 1\right)(x+2) + 7 = \left(x^4 + 7x - 2\right) + 7 = x^4 + 7x + 5.$$

8.9.1 Raíces enteras de polinomios enteros

Encontrar tres números enteros consecutivos pares tales que el cubo del primero más el cubo del segundo, más 8 es igual al cubo del tercero menos el cuadrado del primero menos el cuadrado del tercero.

Solución: Llamamos $2n$, $2n+2$ y $2n+4$ a los tres enteros consecutivos pares.

Planteamos la ecuación:

$$(2n)^3 + (2n+2)^3 + 8 = (2n+4)^3 - (2n)^2 - (2n+4)^2. \qquad (8.6)$$

Efectuamos los productos indicados y simplificamos:

$$\begin{aligned} (2n)^3 + (2n+2)^3 + 8 &= (2n+4)^3 - (2n)^2 - (2n+4)^2 \\ 8n^3 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 + 8 &= 8n^3 + 48n^2 + 96n + 64 - 4n^2 \\ &\quad - \left(4n^2 + 16n + 16\right) \\ 8n^3 + 24n^2 + 24n + 16 &= 40n^2 + 80n + 48 \\ 8n^3 - 16n^2 - 56n - 32 &= 0 \\ n^3 - 2n^2 - 7n - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Los divisores de -4 son: $1, -1, 2, -2, 4$ y -4, que son las únicas posibles raíces enteras, como veremos más adelante.

Ahora utilizamos el método de división sintética para dividir $n^3 - 2n^2 - 7n - 4$ entre $n+1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -7 & -4 \\ \underline{-1} & \downarrow & -1 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

Así,

$$n^3 - 2n^2 - 7n - 4 = (n+1)\left(n^2 - 3n - 4\right).$$

Para factorizar $n^2 - 3n - 4$ buscamos dos números que sumados den -3 y multiplicados den -4. Dichos números son 1 y -4.

$$n^2 - 3n - 4 = (n+1)(n-4).$$

Por tanto,

$$n^3 - 2n^2 - 7n - 4 = (n+1)^2 (n-4).$$

De donde las dos soluciones de $n^3 - 2n^2 - 7n - 4 = 0$, son:

$$n = -1 \quad \text{o} \quad n = 4.$$

Entonces, hay dos soluciones al problema: $-2, 0, 2$ y $8, 10, 12$.

Comprobación: Sustituimos $2n = -2$ en la ecuación (8.6):

Lado izquierdo: $(2n)^3 + (2n+2)^3 + 8 = (-2)^3 + (0)^3 + 8 = 0.$

Lado derecho: $(2n+4)^3 - (2n)^2 - (2n+4)^2 = 2^3 - (-2)^2 - 2^2 = 0.$

Sustituimos $2n = 8$ en la ecuación (8.6):

Lado izquierdo: $(2n)^3 + (2n+2)^3 + 8 = (8)^3 + (10)^3 + 8 = 1520.$

Lado derecho: $(2n+4)^3 - (2n)^2 - (2n+4)^2 = 12^3 - (8)^2 - 12^2 = 1520.$

Hemos visto que una de las razones, quizá la principal, para querer factorizar un polinomio es encontrar sus raíces; es decir, los valores de la variable para los cuales el polinomio vale cero. Encontrar raíces y factorizar un polinomio es un problema equivalente.

Por ejemplo, sabiendo que:

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)\left(x^2 + x + 1\right),$$

Concluimos que 2 es raíz de $x^3 - x^2 - x + 2$, ya que el lado derecho de la ecuación, evaluado en 2, vale:

$$(0)\left(2^2 + 2 + 1\right) = 0.$$

Podemos comprobar evaluando el lado izquierdo:

$$2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

Enunciamos esta propiedad de la siguiente manera:

> Dados un polinomio $P(x)$ y un número real a, si $x - a$ es un factor de $P(x)$, entonces a es una raíz de $P(x)$ y recíprocamente si un número a es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $x - a$ es un factor de $P(x)$.

Más adelante veremos esta propiedad, llamada el teorema del factor

EJEMPLOS

1. Encuentra las raíces del polinomio $(x+2)(x-5)\left(x-\frac{3}{7}\right)$.

Solución: Como $x+2$ es factor del polinomio, entonces -2 es una raíz del polinomio.

Como $x-5$ es otro factor, entonces 5 es otra raíz.

Similarmente, $\frac{3}{7}$ es otra raíz del polinomio.

2. Factorizar $5x^3+x^2-5x-1$, sabiendo que -1 es una raíz.

Solución: Como -1 es una raíz, entonces $x-(-1)=x+1$ es un factor de $5x^3+x^2-5x-1$. Dividiendo el polinomio entre $x+1$ obtenemos:

$$5x^3+x^2-5x-1=(x+1)(5x^2-4x-1).$$

Factorizamos ahora $5x^2-4x-1$ usando alguno de los métodos que hemos visto. Buscamos dos números que multiplicados den -5 y que sumados den -4; estos números son -5 y 1,

$$\begin{aligned}5x^2-4x-1&=5x^2-5x+x-1\\&=5x(x-1)+(x-1)\\&=(5x+1)(x-1).\end{aligned}$$

Así que,

$$5x^3+x^2-5x-1=(x+1)(5x+1)(x-1).$$

Observa la siguiente multiplicación:

$$(x-3)(x+2)(x-1)=x^3-7x-6.$$

El término independiente del polinomio x^3-7x-6 es -6, que se obtiene al multiplicar $(-3)(+2)(-1)$, como podemos verificar al efectuar la multiplicación $(x-3)(x+2)(x-1)$.

Lo anterior nos lleva a pensar que si un binomio $x-a$ divide a x^3-7x-6, el número a debe ser un divisor de -6. Los únicos divisores de -6 son: $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3, $+6$, -6, así que los únicos polinomios de primer grado que podrían dividir a x^3-7x-6 son

$$(x+1),\ (x-1),\dots(x-6),$$

y, por tanto, las únicas raíces enteras que podría tener dicho polinomio son -1, $+1$, -2, $+2$, -3, $+3$, -6, $+6$. Efectivamente, las raíces del polinomio son 3, -2 y 1.

■

Cuando queremos encontrar las *raíces enteras* de un polinomio con coeficientes enteros, debemos tener presente lo siguiente:

> Dados un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros y un número entero a, si a es raíz de $P(x)$, entonces a divide al término independiente.

Es decir, si se buscan las *raíces enteras* de un polinomio con coeficientes enteros, los únicos candidatos son los divisores del término independiente.

Observación

Este método sólo sirve para obtener las raíces enteras; las demás raíces deben buscarse por otros métodos.

EJEMPLOS

1. Factorizar $x^3+5x^2-4x-20$.

Solución: Evaluamos el polinomio en los divisores enteros de -20 hasta encontrar, en su caso, uno que sea raíz del polinomio.

$$\begin{array}{rrcl} 1: & 1^3+5\times 1^2-4\times 1-20 & = & -18 \\ -1: & (-1)^3+5\times(-1)^2-4\times(-1)-20 & = & -12 \\ 2: & 2^3+5\times 2^2-4\times(2)-20 & = & 0, \end{array}$$

Así, 2 es una raíz y entonces $x-2$ divide al polinomio. Efectuamos la división y obtenemos:

$$x^3+5x^2-4x-20=(x-2)(x^2+7x+10).$$

Ahora podemos usar los métodos que hemos visto anteriormente para factorizar $x^2+7x+10$ o podemos evaluarlo en los divisores de 10, que es su término independiente; ya no intentamos con -1 y 1, pues ya sabemos que no son raíces del polinomio original y, por tanto, tampoco lo son de ninguno de sus factores.

$$\begin{array}{rrcl} 2: & 2^2+7\times 2+10 & = & 28 \\ -2: & (-2)^2+7\times(-2)+10 & = & 0. \end{array}$$

Así, -2 es una raíz de $x^2+7x+10$ y entonces $x-(-2)=x+2$ divide a ese polinomio:

$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5).$$

Por tanto,

$$x^3+5x^2-4x-20=(x-2)(x+2)(x+5).$$

2. Encontrar las raíces enteras de x^3+6x^2+6x+5.

Solución: Los divisores de 5 son: $1, -1, 5$ y -5. Éstos son los únicos candidatos para ser raíces enteras del polinomio dado. Evaluamos el polinomio en estos números,

$$\begin{array}{rrcl} 1: & 1^3+6\times 1^2+6\times 1+5 & = & 18 \\ -1: & (-1)^3+6\times(-1)^2+6\times(-1)+5 & = & 4 \\ 5: & 5^3+6\times 5^2+6\times 5+5 & = & 310 \\ -5: & (-5)^3+6\times(-5)^2+6\times(-5)+5 & = & 0, \end{array}$$

Así, -5 es la única raíz entera de x^3+6x^2+6x+5.

3. Encontrar las raíces enteras de $2x^2-x-6$.

Solución: Los divisores de -6 son: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6. Evaluamos el polinomio en estos números hasta que encontremos una raíz, si la hay:

$$\begin{array}{rrcl} 1: & 2\times 1^2-1-6 & = & -5 \\ -1: & 2\times(-1)^2-(-1)-6 & = & -3 \\ 2: & 2\times 2^2-2-6 & = & 0. \end{array}$$

Así, 2 es una raíz y

$$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3).$$

Aquí nos damos cuenta de que la raíz de $2x+3$ es $-\frac{3}{2}$, que no es entera, así que la única raíz entera de $2x^2 - x - 6$ es 2.

■

Al resolver ecuaciones polinomiales y factorizar polinomios es muy común tener que dividir un polinomio entre un monomio de la forma $x - a$, donde a es un número real cualquiera.

Ejemplo

• Factorizar $y^5 + y^4 - 6y^3 - 13y^2 - 13y - 6$.

Solución: Los divisores de 6 son: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6 y −6. Sustituyendo cada uno de los valores en la ecuación obtenemos que −1, −2 y 3 son raíces enteras del polinomio.

Para factorizar dividimos el polinomio entre $y+1$; para esto utilizamos la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -6 & -13 & -13 & -6 \\ -1 & \downarrow & -1 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -6 & -7 & -6 & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$y^5 + y^4 - 6y^3 - 13y^2 - 13y - 6 = (y+1)(y^4 - 6y^2 - 7y - 6).$$

Como −2 también es raíz, dividimos $y^4 - 6y^2 - 7y - 6$ entre $y+2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & -7 & -6 \\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Hemos obtenido

$$y^5 + y^4 - 6y^3 - 13y^2 - 13y - 6 = (y+1)(y+2)(y^3 - 2y^2 - 2y - 3).$$

Puesto que también 3 es raíz, dividimos ahora $y^3 - 2y^2 - 2y - 3$ entre $y - 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & \downarrow & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

De donde:

$$y^5 + y^4 - 6y^3 - 13y^2 - 13y - 6 = (y+1)(y+2)(y-3)(y^2 + y + 1).$$

El polinomio $y^2 + y + 1$ sólo puede tener como raíces enteras a 1 y −1.

Sustituyendo directamente se observa que eso no sucede. Entonces no tiene raíces enteras. En realidad, $y^2 + y + 1$ no puede factorizarse. En el capítulo 7 vimos un criterio para probarlo.

■

Teorema del residuo

Llamaremos $P(x)$ a un polinomio cualquiera y a seráun número real; si dividimos $P(x)$ entre $x-a$ obtenemos la descomposición:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R,$$

donde $Q(x)$ es el cociente y R es el residuo. Observa que como el divisor $x-a$ es de grado 1, entonces el residuo es una constante.

Si ahora evaluamos en $x=a$ obtenemos:

$$\begin{aligned}P(a)&=Q(a)(a-a)+R\\&=0+R\\&=R,\end{aligned}$$

es decir, hemos probado que:

El valor de $P(a)$ es el residuo obtenido al dividir $P(x)$ entre $x-a$.

Como corolario del teorema anterior obtenemos el:

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera y a un número real, entonces $(x-a)$ *es factor de* $P(x)$ *si, y sólo si,* $P(a)=0$.

EJEMPLOS

1. Sin efectuar la división, calcular el valor del residuo de la división $(5x^3-2x+6)\div(x-4)$.

Solución: De acuerdo con el teorema del residuo, el residuo de la división $(5x^3-2x+6)\div(x-4)$ es el valor del polinomio $P(x)=5x^3-2x+6$ cuando $x=4$.

$$P(4)=5(4^3)-2(4)+6=320-8+6=318.$$

2. Determinar si $x+2$ es un factor de $P(x)=x^5-4x^3+5x^2+4x-12$.

Solución: De acuerdo con el teorema del factor, $x+2=x-(-2)$ es un factor de $P(x)$ si, y sólo si, $P(-2)=0$.

$$\begin{aligned}P(-2)&=(-2)^5-4(-2)^3+5(-2)^2+4(-2)-12\\&=-32+32+20-8-12\\&=0,\end{aligned}$$

así que $x+2$ sí es un factor de $x^5-4x^3+5x^2+4x-12$.

3. Determinar si $y-8$ es factor de $P(y)=2y^4-30y^3-20y^2+5y+24$.

Solución: Evaluamos el polinomio en 8:

$$P(8) = 2(8)^4 - 30(8)^3 - 20(8)^2 + 5(8) + 24$$
$$= 8192 - 15360 - 1280 + 40 + 24 = -8384,$$

por tanto, $y - 8$ no es factor de $P(y) = 2y^4 - 30y^3 - 20y^2 + 5y + 24$.

8.9.2 Ejercicios

En cada una de las siguientes divisiones sintéticas, expresa como polinomios: el divisor, el dividendo, el cociente y el residuo.

1.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -1 & -10 \\ -3 & \downarrow & -3 & -6 & 21 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & 11 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -8 & -2 \\ 2 & \downarrow & 6 & -4 \\ \hline & 3 & -2 & -6 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -18 & -11 & 12 \\ 4 & \downarrow & 20 & 8 & -12 \\ \hline & 5 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 0 & 10 & 0 & 7 \\ -1 & \downarrow & -6 & 6 & -16 & 16 \\ \hline & 6 & -6 & 16 & -16 & 23 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -8 & 0 & -6 & 56 & -64 \\ 8 & \downarrow & 8 & 0 & 0 & -48 & 64 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 15 & 23 & -4 & 30 \\ -5 & \downarrow & -10 & -25 & 10 & -30 \\ \hline & 2 & 5 & -2 & 6 & 0 \end{array}$$

Efectúa las siguientes divisiones utilizando la división sintética.

7. $(y^4 - 16) \div (y - 2)$

8. $(z^3 + 27) \div (z + 3)$

9. $(x^2 - 8x + 15) \div (x - 5)$

10. $(y^2 + 18y + 77) \div (y + 7)$

11. $(w^4 - 6w^3 - 19w^2 + 22w + 12) \div (w - 8)$

12. $(x^4 - 7x + 6) \div (x - 1)$

13. $(-z^6 + 10z^4 + 14z^3 + 38z^2) \div (z - 4)$

14. $(w^3 + 8) \div (w - 2)$

15. $(4y^5 + 8y^4 - 3y + 7) \div (y + 2)$

16. $(a^4 - 1) \div (a + 1)$

17. $(2x^4 - 17x^3 + 20x^2 - 3x + 68) \div (x - 7)$

18. $(y^4 - 2y^3 + 13y - 6) \div (y + 2)$

19. $(6z^5 - 32z^4 + 5z^3 + 21z^2 + 19z - 7) \div (z - 5)$

20. $(z^3 + 64) \div (z + 4)$

Sin efectuar la división, calcula el valor del residuo de las siguientes divisiones.

21. $3z^3 - 22z^2 + 12z - 30 \div z - 6$

22. $w^3 + 12w^2 + 34w + 8 \div w + 4$

23. $3x^4 + 21x^3 + 9x^2 - 9x - 35 \div x + 7$

24. $2y^5 - 10y^4 + 6y^3 - 15y + 5 \div y - 2$

25. $5y^6 + 11y^5 - 14y^4 - 8y^3 - 6 \div y - 1$

26. $4x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x - 15 \div x - 5$

27. $w^5 + 2w^4 + 5w^3 - 3w - 8 \div w + 2$

28. $z^7 + 8z^5 - 12z^4 + 20z^3 - 25 \div z + 1$

Determina si $x - a$ es factor de los siguientes polinomios. En cada caso se da el valor de a.

29. $P(x) = 2x^3 + 8x^2 + 15x + 9,\ a = -1$

30. $P(x) = 3x^4 + 12x^3 + 5x^2 + 13x - 28,\ a = -4$

31. $P(x) = 6x^4 + 18x^2 + 25x - 9,\ a = -2$

32. $P(x) = 5x^3 - 46x^2 + 7x - 18,\ a = 9$

33. $P(x) = x^6 - x^5 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 2,\ a = 1$

34. $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 3x + 3,\ a = 3$

35. $P(x) = 7x^5 - 38x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 10x,\ a = 5$

36. $P(x) = 8x^2 + 25x - 21,\ a = -7$

En los ejercicios 37 a 46, factoriza los polinomios.

37. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

38. $y^4 - 16y^3 + 60y^2 + 64y - 256$

39. $z^4 - 18z + 81$

40. $a^3 + 8a^2 - 36a - 288$

41. $w^4 - 14w^3 + 40w^2 + 126w - 441$

42. $x^5 + 7x^4 - 10x^3 - 70x^2 + 9x + 63$

43. $y^5 - 7y^4 - 2y^3 + 46y^2 + 65y + 25$

44. $z^6 - z^4 - 16z^2 + 16$

45. $a^4 - 5a^3 - 12a^2 - 13a - 7$

46. $w^5 - 6w^4 + 9w^3 - 8w^2 + 48w - 72$

47. Cuatro enteros consecutivos satisfacen lo siguiente: la suma del cubo del primero más el cubo del tercero es igual a la suma del producto del segundo por el tercero más el cubo del cuarto. Encuentra dichos enteros.

48. Un papá dice a su hijo adolescente: "La cantidad de dinero en pesos que te daré cada semana para tus gastos es igual al producto de las raíces enteras del polinomio $x^4 - 14x^3 + 43x^2 + 70x - 240$". ¿Cuánto recibirá el hijo cada semana?

49. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 126 en dicho sistema sea 1332?

50. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que 5 veces su suma es igual a su producto.

51. ¿Es posible encontrar dos números enteros consecutivos tales que su media armónica sea igual a 2? (Véase el ejercicio 55 de la página 250.)

52. Las edades de mis hijos coinciden con las raíces enteras del polinomio $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$. ¿Cuántos hijos tengo? ¿Cuáles son sus edades?

53. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que la suma del cubo del segundo más el cubo del tercero sea igual a menos el cuadrado del segundo.

54. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 4380 en dicho sistema sea 10434?

55. Las raíces de un polinomio de grado 3 son números enteros consecutivos. Si el coeficiente del término de grado 2 es -6, ¿cuáles son las raíces del polinomio?, ¿cuál es el polinomio?

8.10 Expresiones algebraicas complicadas

En las primeras secciones de este capítulo hemos visto cómo simplificar expresiones racionales. Sin embargo, para profundizar más en este tema veremos algunos ejemplos un poco más complicados.

Ejemplos

1. Simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{w}{w-3} - \dfrac{3}{w+3}}{\dfrac{1}{w-3} - \dfrac{1}{w+3}}$.

Solución: Para simplificar este tipo de expresiones se realizan las operaciones indicadas en el numerador, las indicadas en el denominador y después se simplifica:

$$\frac{\dfrac{w}{w-3} - \dfrac{3}{w+3}}{\dfrac{1}{w-3} - \dfrac{1}{w+3}} = \frac{\dfrac{w(w+3) - 3(w-3)}{(w-3)(w+3)}}{\dfrac{w+3-(w-3)}{(w-3)(w+3)}}$$

$$= \frac{\dfrac{w^2 + 3w - 3w + 9}{(w-3)(w+3)}}{\dfrac{w+3-w+3}{(w-3)(w+3)}}$$

$$= \frac{w^2 + 9}{6}.$$

2. Simplificar la expresión $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}}$.

Solución: Para simplificar esta expresión efectuamos las operaciones indicadas empezando de abajo hacia arriba.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1+1}{x+1}}}\\ &= \frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x+2}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{x+2+x+1}{x+2}}\\ &= \frac{x+2}{2x+3}.\end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación $\dfrac{\dfrac{z+2}{z-2}-\dfrac{z-2}{z+2}}{1+\dfrac{z+2}{z-2}}=\dfrac{2}{3}$.

Solución: Para resolver esta ecuación primero simplificamos el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{z+2}{z-2}-\dfrac{z-2}{z+2}}{1+\dfrac{z+2}{z-2}} &= \frac{\dfrac{(z+2)(z+2)-(z-2)(z-2)}{(z-2)(z+2)}}{\dfrac{z-2+z+2}{z-2}} = \frac{\dfrac{z^2+4z+4-z^2+4z-4}{(z-2)(z+2)}}{\dfrac{2z}{z-2}}\\ &= \frac{8z(z-2)}{2z(z-2)(z+2)} = \frac{4}{z+2}.\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{4}{z+2} &= \frac{2}{3}\\ 12 &= 2z+4\\ 4 &= z.\end{aligned}$$

Comprobación: Sustituimos $z=4$ en la ecuación original:

$$\frac{\dfrac{z+2}{z-2}-\dfrac{z-2}{z+2}}{1+\dfrac{z+2}{z-2}} = \frac{\dfrac{4+2}{4-2}-\dfrac{4-2}{4+2}}{1+\dfrac{4+2}{4-2}} = \frac{\dfrac{6}{2}-\dfrac{2}{6}}{1+\dfrac{6}{2}} = \frac{3-\dfrac{1}{3}}{1+3} = \frac{\dfrac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}.$$

■

8.10.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{1+\dfrac{z}{z-1}}{1-\dfrac{z}{z+1}}$

2. $\dfrac{\dfrac{2w}{w^2-1}-\dfrac{1}{w+1}}{\dfrac{w}{w-1}}$

3. $\dfrac{x+\dfrac{2-x}{1+2x}}{1-\dfrac{2x-x^2}{1+2x}}$

4. $\dfrac{\dfrac{b}{4+b}+\dfrac{4-b}{b}}{\dfrac{4+b}{b}-\dfrac{b}{4+b}}$

5. $\dfrac{\dfrac{y-3}{3y+1}+3}{1-\dfrac{3y-9}{1+3y}}$

6. $\dfrac{\dfrac{s+5}{s-5}+\dfrac{s-5}{s+5}}{\dfrac{s^2+25}{s^2-25}}$

7. $\dfrac{\dfrac{a+3}{a-5}+\dfrac{a+5}{a-3}}{\dfrac{a+4}{a-5}+\dfrac{a-5}{a+4}}$

8. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{1+\dfrac{x-2}{x+2}}$

9. $\dfrac{\dfrac{8}{b-3}+\dfrac{8}{b+3}}{\dfrac{6}{b+3}-\dfrac{6}{b-3}}$

10. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}$

11. $\dfrac{z+3}{z-\dfrac{z-3}{z+\dfrac{z+3}{z-\dfrac{z+3}{z}}}}$

12. $6-\dfrac{6}{6-\dfrac{6}{1-\dfrac{6}{6-\dfrac{6}{w^2}}}}$

13. $1-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{x-1}{x+1}}}$

14. $4-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2-\dfrac{z+1}{z-1}}}$

15. $\dfrac{8}{3-\dfrac{2}{6-\dfrac{8}{a}}}$

16. $\dfrac{c-1}{c-1-\dfrac{c}{c-\dfrac{c+7}{c-1}}}$

17. $\dfrac{w^2-9}{w-3+\dfrac{8w}{w+\dfrac{w+9}{w-3}}}$

18. $\dfrac{a^2}{a^2+a-\dfrac{2a^2}{a+2-\dfrac{a^2+4}{a+2}}}$

19. $\dfrac{\dfrac{w-4+\dfrac{7w+28}{w+4}}{w+3}}{\dfrac{w+6-\dfrac{10w+70}{w+7}}{w+5}}$

20. $\dfrac{\dfrac{2+\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}}{x-4}}{\dfrac{\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}+8}{x^2-16}}$

21. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{z^2-25}{z-5}+3}{z+8}}{\dfrac{9+\dfrac{z^2-36}{z+6}}{z-11}}$

22. $\dfrac{c+7}{c-4+\dfrac{5c+13}{c+\dfrac{25-5c}{c-5}}}$

23. $\dfrac{b+11}{5b+6+\dfrac{6b-18}{3-\dfrac{3b}{b+4}}}$

24. $\dfrac{4a^2}{1+\dfrac{a-1}{a-1+\dfrac{1}{a^2+a+1}}}$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

25. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=-\dfrac{2}{5}$

26. $\dfrac{\dfrac{c}{6-c}+\dfrac{6-c}{c}}{\dfrac{6-c}{c}-\dfrac{c}{6-c}}=-\dfrac{5}{3}$

27. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+w}}}=\dfrac{1}{3}$

28. $\dfrac{z-3}{z-3-\dfrac{z}{z-\dfrac{z-1}{z-3}}}=1$

29. $\dfrac{\dfrac{5}{b-2}+\dfrac{5}{b+2}}{\dfrac{4}{b+2}-\dfrac{4}{b-2}}=-\dfrac{1}{8}$

30. $\dfrac{a+\dfrac{7a}{a-7}}{1+\dfrac{49}{a^2-49}}=\dfrac{7}{2}$

31. $\dfrac{w^3-27}{4w+9-\dfrac{w}{1-\dfrac{w}{w-1}}}=2$

32. $\dfrac{x}{x-8+\dfrac{x+8}{\dfrac{x}{8}-\dfrac{8}{x}}}=-\dfrac{3}{13}$

33. $\dfrac{y-4}{y+\dfrac{5y}{y-5}}-\dfrac{y+10}{y-\dfrac{2y}{y+2}}=12$

34. $\dfrac{z-1}{z+\dfrac{z}{z-1}}+\dfrac{z-1}{z-\dfrac{z}{z+1}}=\dfrac{16}{9}$

35. $\dfrac{\dfrac{3c-2}{3c+2}-\dfrac{3c+2}{3c-2}}{\dfrac{3c}{9c^2-4}-\dfrac{1}{3c-2}}=4$

36. $\dfrac{\dfrac{s}{s^2-81}+\dfrac{s-9}{s}}{\dfrac{s^2-81}{s}+\dfrac{s}{s-9}}=\dfrac{1}{6}$

8.11 Desigualdades y expresiones racionales

El cociente del mayor entre el menor de dos enteros impares consecutivos es mayor o igual a 2. Encontrar los números.

Solución: Llamamos a los enteros impares consecutivos $2n+1$ y $2n+3$. Formamos el cociente del mayor entre el menor:

$$\frac{2n+3}{2n+1}$$

y éste debe ser mayor o igual a 2, es decir,

$$\frac{2n+3}{2n+1}\geq 2.$$

Para resolver esta desigualdad debemos considerar dos casos:

- Si $2n+1>0$, entonces $n>-\frac{1}{2}$, es decir, $n\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ y

$$\begin{aligned}2n+3&\geq 2(2n+1)\\2n+3&\geq 4n+2\\3-2&\geq 4n-2n\\1&\geq 2n\\\frac{1}{2}&\geq n\end{aligned}$$

de donde $n\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, es decir,

$$n\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

- Si $2n+1<0$, entonces $n<-\frac{1}{2}$, es decir, $n\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ y

$$\begin{aligned}2n+3&\leq 2(2n+1)\\2n+3&\leq 4n+2\\3-2&\leq 4n-2n\\1&\leq 2n\\\frac{1}{2}&\leq n\end{aligned}$$

de donde $n \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$; es decir,

$$n \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cap \left[\frac{1}{2}, \infty\right) = \varnothing.$$

De donde,

$$n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \varnothing = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

pero como n es un entero entonces $n = 0$. Así que los números son 1 y 3.

Calculamos el cociente:

$$\frac{2(0)+3}{2(0)+1} = 3 > 2.$$

EJEMPLOS

1. Resolver $\dfrac{5z+2}{z-2} < \dfrac{5}{3}$.

Solución: Para resolver esta desigualdad debemos quitar los denominadores. Sabemos que 3 es positivo, por lo que no hay problema ahí, pero no sabemos si $z-2$ es positivo o negativo, entonces debemos de considerar los dos casos.

- Supongamos $z-2 > 0$ o sea $z > 2$, entonces al pasar la expresión $z-2$ multiplicando al otro lado de la desigualdad, ésta no cambia de sentido.

$$\frac{5z+2}{z-2} < \frac{5}{3}$$

$$3(5z+2) < 5(z-2)$$

$$15z + 6 < 5z - 10$$

$$15z - 5z < -10 - 6$$

$$10z < -16$$

$$z < -\frac{16}{10}$$

$$z < -\frac{8}{5}.$$

Por tanto, debemos tener:

$$z > 2 \text{ y } z < -\frac{8}{5},$$

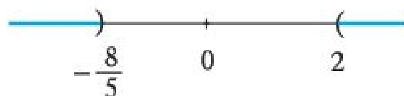


Figura 8.1

Pero no hay ningún número real que cumpla con estas dos condiciones.

Esto significa que ningún número $z > 2$ es solución de la desigualdad original.

- Supongamos $z-2 < 0$; es decir, $z < 2$, entonces al pasar multiplicando esa expresión al otro lado de la desigualdad, ésta cambia de sentido.

$$\frac{5z+2}{z-2} < \frac{5}{3}$$
$$3(5z+2) > 5(z-2)$$
$$15z+6 > 5z-10$$
$$15z-5z > -10-6$$
$$10z > -16$$
$$z > -\frac{16}{10}$$
$$z > -\frac{8}{5}.$$

De donde,

$$z < 2 \quad \text{y} \quad z > -\frac{8}{5}.$$

Podemos escribir esto como:

$$-\frac{8}{5} < z < 2.$$

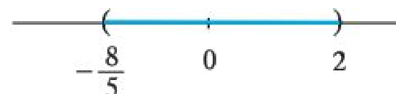


Figura 8.2

Por tanto,

$$\frac{5z+2}{z-2} < \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad -\frac{8}{5} < z < 2.$$

2. Resolver $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Solución:

- Primer método:

Para resolver esta desigualdad debemos quitar denominadores. Sabemos que 3 es positivo, por lo que no hay problema ahí, pero no sabemos si $x+2$ es positivo o negativo, por esto es necesario considerar dos casos.

♦ Si $x+2>0$, entonces al pasar multiplicando $x+2$ al otro lado de la desigualdad, ésta no cambia de sentido:

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$$
$$3(2x-3) < x+2$$
$$6x-9 < x+2$$
$$6x-x < 2+9$$
$$5x < 11$$
$$x < \frac{11}{5},$$

y como estamos suponiendo que:

$$x+2 > 0$$
$$x > -2,$$

entonces:

$$x > -2 \text{ y } x < \frac{11}{5}.$$

Podemos escribir esto como:

$$-2 < x < \frac{11}{5}.$$

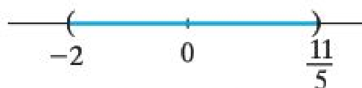


Figura 8.3

♦ Si $x+2<0$, entonces, al pasar multiplicando $x+2$ al otro lado de la desigualdad, ésta cambia de sentido.

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{x+2} &< \frac{1}{3}\\ 3(2x-3) &> x+2\\ 6x-9 &> x+2\\ 5x &> 11\\ x &> \frac{11}{5}.\end{aligned}$$

Entonces, como:

$$\begin{aligned}x+2 &< 0\\ x &< -2,\end{aligned}$$

debemos tener:

$$x < -2 \quad \text{y} \quad x > \frac{11}{5},$$

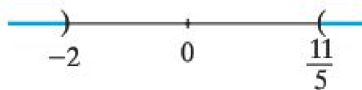


Figura 8.4

Pero no hay ningún número real que cumpla con estas dos condiciones.
Por tanto,

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \quad \text{si} \quad -2 < x < \frac{11}{5}.$$

• Segundo método:

Resolvemos primero la ecuación:

$$\frac{2x-3}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

En primer lugar, nos damos cuenta de que la expresión de la izquierda no está definida para $x=-2$. La solución de la ecuación es:

$$\frac{2x-3}{x+2}=\frac{1}{3}$$
$$3(2x-3)=x+2$$
$$x=\frac{11}{5}.$$

Los puntos donde no está definida la ecuación y donde se satisface la igualdad dividen a la recta en tres intervalos, como lo muestra la figura 8.5.



Figura 8.5

En cada uno de estos intervalos todos los puntos satisfacen la desigualdad original o ninguno la satisface. La razón de esto es que si en alguno de estos intervalos un punto x_1 satisface la desigualdad y otro x_2 la desigualdad contraria, habría un punto x_3 intermedio y, por tanto, dentro del mismo intervalo en donde se satisface la igualdad, lo cual no es cierto, ya que el único punto donde se satisface la igualdad es $\frac{11}{5}$.

La justificación formal de este argumento, conocida como el *teorema del valor intermedio,* está fuera del alcance de este libro, pues requiere del concepto de continuidad, que es un tema que se ve en el curso de cálculo diferencial e integral. Sin embargo, creemos que intuitivamente es bastante claro para poder utilizarlo aquí.

Elegimos un punto en cada intervalo, por ejemplo,

$$-3\in(-\infty,-2),\ 0\in\left(-2,\frac{11}{5}\right),\ 3\in\left(\frac{11}{5},\infty\right)$$

y evaluamos la expresión en ellos:

- En $x=-3$ tenemos:

$$\frac{2(-3)-3}{(-3)+2}=9,$$

que no satisface la desigualdad, así que en ningún punto de $(-\infty,-2)$ se satisface.

- En $x=0$ tenemos:

$$\frac{2(0)-3}{(0)+2}=-\frac{3}{2},$$

que sí es menor que $\frac{1}{3}$, así que en todo el intervalo $\left(-2,\frac{11}{5}\right)$ se satisface la desigualdad.

- En $x=3$ tenemos:

$$\frac{2(3)-3}{(3)+2}=\frac{3}{5},$$

que no es menor que $\frac{1}{3}$, así que en ningún punto del intervalo $\left(\frac{11}{5},\infty\right)$ se satisface la desigualdad.

Por tanto, la solución a la desigualdad es el intervalo $\left(-2,\frac{11}{5}\right)$; es decir, $-2<x<\frac{11}{5}$.

■

8.11.1 Ejercicios

Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $\frac{a+7}{a}<6$
2. $\frac{b}{b-1}>10$
3. $\frac{8}{c+3}<-1$
4. $\frac{2}{2-x}>-4$
5. $\frac{z-1}{z-8}\le 3$
6. $\frac{w+5}{w-6}\ge -9$
7. $\frac{a-1}{a+1}>1$
8. $\frac{t+9}{t-3}<-\frac{1}{2}$
9. $\frac{5b+2}{b-2}>-1$
10. $\frac{3x+4}{x-1}>7$
11. $\frac{5z+2}{z+3}>\frac{5}{2}$
12. $\frac{7w-1}{w-9}\le -3$
13. $\frac{10a-6}{2-5a}>4$
14. $\frac{b-12}{7b+3}<-2$
15. $\frac{6-4c}{8-3c}>-\frac{4}{3}$
16. $\frac{17+z}{5-11z}\le -\frac{1}{2}$
17. $\frac{2x+15}{2x-6}\ge -10$
18. $\frac{10-7w}{-3w-4}\le 2$
19. $\frac{1}{3c-7}\ge \frac{4}{3-2c}$
20. $-2<\frac{2z+6}{z-5}<3$
21. $1<\frac{6w-2}{2w+1}<8$

Resumen

- Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son expresiones racionales, donde $B\neq 0$ y $D\neq 0$, entonces $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$.
- Si A y B son expresiones algebraicas, entonces:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m=\overbrace{\left(\frac{A}{B}\right)\cdots\left(\frac{A}{B}\right)}^{m\text{ veces}}=\frac{\overbrace{AA\cdots A}^{m\text{ veces}}}{BB\cdots B}=\frac{A^m}{B^m}$$

- Si P, Q, R y S son polinomios, $Q\neq 0, R\neq 0$ y $S\neq 0$, entonces $\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}=\frac{PS}{QR}$.
- Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son expresiones racionales, donde $B\neq 0$, entonces $\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$.
- Si A, B, C y D son polinomios, donde $B\neq 0, C\neq 0$ y $D\neq 0$, entonces $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$.
- Dados un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros y un número entero a, si a es raíz de $P(x)$, entonces a divide al término independiente.
- Teorema del residuo. Si $P(x)$ es un polinomio y a es un número real, entonces:

  El valor de $P(a)$ es el residuo obtenido al dividir $P(x)$ entre $x-a$.
- Teorema del factor. Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera y a un número real, entonces $(x-a)$ es factor de $P(x)$ si, y sólo si, $P(a)=0$.

8.12 EJERCICIOS DE REPASO

Determina para qué valores de la variable no está definida cada expresión racional.

1. $\frac{a^3+4a^2-7a-15}{3a^2+11a-20}$
2. $\frac{6b^2-17b+21}{4b^3-9b^2+5b}$
3. $\frac{3z^3+10z-62}{16z^4-72z^2+81}$
4. $\frac{36x^3-16x^2+2x}{36x^2+24x+4}$
5. $\frac{z^2}{3z^4-z^3-14z^2}$
6. $\frac{(c^2-25)(c^3+2c)}{4c^5-36c^3}$

Simplifica las siguientes expresiones racionales.

7. $\frac{s^2-2s-120}{s^4-24s^3+144s^2}$
8. $\frac{49a^4b^4-25c^8}{7a^2b^2+5c^4}$
9. $\frac{16x^6-81y^6}{4x^3-9y^3}$

10. $\left(z^5+w^5\right)\div(z+w)$

11. $\left(a^8-1\right)\div(a+1)$

12. $\left(b^5-1\right)\div(b-1)$

13. $\left(\dfrac{64x^2-9y^2}{(2x+5y)^2}\right)\left(\dfrac{4x^2-25y^2}{(8x-3y)^2}\right)$

14. $\left(\dfrac{z^2+3z-70}{z^2-9z+20}\right)\left(\dfrac{z^2-8z+15}{z^2-10z+21}\right)$

15. $\dfrac{3w^2+11w+3}{w^2+4w-12}-\dfrac{2w^2+4w-3}{w^2+4w-12}$

16. $\dfrac{r+2}{r^2+4r-5}+\dfrac{r-6}{r^2-1}$

17. $\dfrac{t^2-3t-4}{2t+4}\times\dfrac{t^2+5t+6}{2t^2+3t+1}$

18. $\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x-8}{x^2-x-2}$

19. $\dfrac{r^2+9r+45}{r^2+r-30}+\dfrac{7r+15}{(r-5)(r+6)}$

20. $\dfrac{s^2+3s-18}{s^2-9s+8}\div\dfrac{s^2+13s+42}{s^2-12s+32}$

En los ejercicios 21 a 24, resuelve las ecuaciones.

21. $5+\dfrac{z}{z+2}=1$

22. $\dfrac{w^2-8w+3}{(w+1)(w-3)}-\dfrac{3-5w}{w^2-2w-3}=\dfrac{5}{6}$

23. $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x-5}{x+2}=\dfrac{17}{4}$

24. $\dfrac{z-8}{z-4}+\dfrac{z+6}{z+9}=\dfrac{-z}{(z-4)(z+9)}$

25. La suma de dos números es 14 y la suma de sus recíprocos es $\frac{7}{24}$. Encuentra dichos números.

26. Encuentra tres números enteros consecutivos tales que la suma de los cubos de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero.

27. La suma de un número y su recíproco es $\frac{50}{7}$. Encuentra dichos números.

28. La suma de dos números es 106. Si dividimos el mayor entre el menor, el cociente es 5 y el residuo es 16. Encuentra dichos números.

29. Un río tiene una corriente de 15 km/h. Si una lancha de motor tarda el mismo tiempo en recorrer 25 km a favor de la corriente que 15 km en contra de ésta, ¿cuál es la velocidad de la lancha en aguas tranquilas?

30. La suma de dos números es 10. La suma de sus recíprocos es igual a $\frac{5}{12}$. Encuentra dichos números.

31. Un obrero puede realizar cierto trabajo en 7 horas menos que otro que tiene menos experiencia. Juntos pueden realizarlo en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en hacer el trabajo cada uno?

32. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 441 en dicho sistema sea 12321?

33. ¿Cuántas cajas de mosaico pueden comprarse con $1,092 si se sabe que dos semanas antes estuvo en oferta con un precio de $16 menos y en ese momento hubiera sido posible comprar 16 cajas más? ¿Cuál es el costo por caja?

34. José pregunta a su abuelo: "¿Cuántos años tienes?", a lo cual el abuelo responde: "Varios, pero si quieres saber la cantidad exacta es necesario considerar el doble del producto de las raíces enteras del polinomio $x^5-13x^4+45x^3-9x^2-94x+70$". ¿Qué edad tiene el abuelo de José?

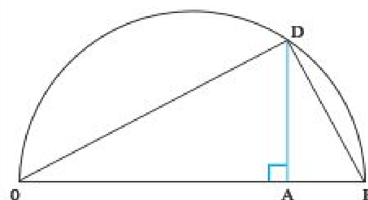
35. Dos resistencias son tales que una de ellas tiene valor de 6 ohms más que la otra. ¿Qué capacidad tienen si al conectarlas en paralelo la resistencia total es de 4 ohms? (Véase ejercicio 49 de la página 250)

36. Si se conectan en paralelo 6 resistencias del mismo valor y la resistencia total obtenida es de 20 ohms, ¿qué capacidad tienen las resistencias?

capítulo

9

Radicales



9.1 La raíz cuadrada
9.2 Raíces de orden superior
9.3 Racionalización (de denominadores) de expresiones con radicales
9.4 Reducción de expresiones radicales
9.5 Exponentes negativos y fraccionarios
9.6 Ecuaciones con radicales
9.7 Los números complejos
9.8 Operaciones con números complejos
9.9 Raíces cuadradas de números reales negativos
9.10 Ejercicios de repaso

Para obtener el cuadrado de un número lo elevamos a la segunda potencia. Algunas veces es necesario realizar el proceso inverso: propuesto un número, encontrar otro cuyo cuadrado coincida con el primero. En este capítulo se generaliza lo anterior y trabajamos con exponentes enteros y fraccionarios. También se da una introducción muy breve a los números complejos.

9.1 La raíz cuadrada

El teorema de Pitágoras establece que: en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En el triángulo de la figura 9.1 tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

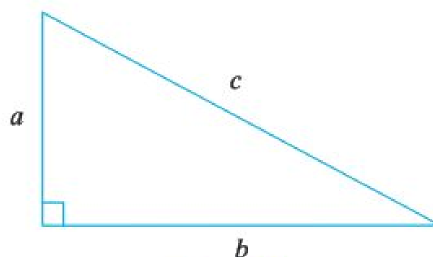


Figura 9.1

El símbolo que usamos para la raíz cuadrada fue usado por primera vez en Alemania, en el año 1525.

Recíprocamente, la siguiente afirmación también es cierta:

Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, entonces el triángulo es rectángulo y el ángulo recto es el opuesto al mayor de los lados.

El teorema de Pitágoras nos sirve para calcular la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros dos.

Por ejemplo: deseamos colocar un tirante en la punta de un poste de luz que mide 12 metros de altura y debemos anclarlo a una distancia de 5 metros. ¿Qué longitud debe tener el tirante?

Solución:

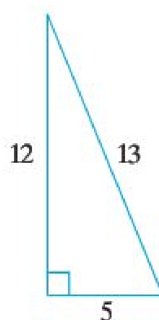


Figura 9.2

El tirante es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son el poste y el segmento entre las bases del poste y el ancla.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \qquad (9.1)$$

Es decir, c es un número que al elevarlo al cuadrado da 169. Observamos que $(13)^2 = 169$ y también $(-13)^2 = 169$. Los números 13 y -13 están en la recta numérica a uno y otro lados del cero y su distancia al cero es 13. Recordemos que esto lo expresamos diciendo que su valor absoluto es 13, y escribimos:

$$|13| = 13 = |-13|.$$

Así que expresamos la solución de (9.1) como:

$$|c| = 13,$$

es decir,

$$c = 13 \quad \text{o} \quad c = -13.$$

Lo anterior se puede escribir brevemente como

$$c = \pm 13.$$

Como el número c es una longitud, es positivo, así que la longitud del tirante debe ser de 13 metros (véase la figura 9.2).

Una *raíz cuadrada r* de un número x es un número que al elevarlo al cuadrado da x. Es decir,

> Si $r^2 = x$, entonces decimos que r es una raíz cuadrada de x.

Como $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$, entonces 3 y -3 son raíces cuadradas de 9. Más aún, son las únicas raíces cuadradas de 9.

En general, si r es una raíz cuadrada de x, entonces $-r$ también lo es, ya que:

$$(-r)^2 = (-r)(-r) = r^2 = x.$$

Utilizamos el símbolo $\sqrt{x}$ para denotar a la raíz cuadrada no negativa de x; por ejemplo, $\sqrt{9}=3$, luego, las dos raíces cuadradas de 9 son:

$$\sqrt{9}=3 \text{ y } -\sqrt{9}=-3.$$

Un número negativo y no tiene raíz cuadrada en los números reales ya que si r es un número real, entonces $r^2 \geq 0$ y, por tanto, $r^2 \neq y$.

En resumen:

- Un número positivo x tiene dos raíces cuadradas distintas: $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$.
- El cero tiene una sola raíz cuadrada, ya que: $\sqrt{0}=0=-\sqrt{0}$.
- Los números negativos no tienen raíz cuadrada en los números reales.

Ejemplo

- Dos números están en la razón $\frac{2}{5}$ y su producto es 90. ¿Cuáles son dichos números?

Solución: Llamamos a y b a los números buscados.

Escribimos la proporción:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{5}. \tag{9.2}$$

El otro dato del problema es que su producto es 90; es decir,

$$ab=90. \tag{9.3}$$

Despejamos a de (9.3) y obtenemos:

$$a=\frac{90}{b}. \tag{9.4}$$

Sustituimos en (9.2):

$$\frac{\frac{90}{b}}{b}=\frac{2}{5}.$$

Al resolver esta última ecuación para b obtenemos:

$$\frac{\frac{90}{b}}{b}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{90}{b^2}=\frac{2}{5}$$

$$b^2=\frac{5(90)}{2}=225. \tag{9.5}$$

La solución de (9.5) es:

$$|b|=15,$$

es decir,

$$b = \pm 15.$$

Sustituimos el valor de b en (9.4):

Para $b = 15$ obtenemos $a = \frac{90}{15} = 6$.

Para $b = -15$ obtenemos $a = \frac{90}{-15} = -6$.

Las soluciones son $b = 15$ y $a = 6$, o bien, $b = -15$ y $a = -6$.

Comprobación: Para $b = 15$ y $a = 6$:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad ab = 6(15) = 90.$$

Para $b = -15$ y $a = -6$:

$$\frac{a}{b} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad ab = -6(-15) = 90.$$

9.1.1 Interpretación geométrica de $\sqrt{x}$

Ejemplo

- Hallar geométricamente $\sqrt{5}$.

Solución: Dibujamos una recta numérica, llamamos O al punto correspondiente al cero. Localizamos el 5 en la recta y llamamos A a este punto, nos movemos una unidad más a la derecha, es decir, marcamos el 6, y llamamos B a este punto.

Trazamos un semicírculo que tenga como diámetro al segmento OB; en este caso, el círculo tiene centro en el punto correspondiente al 3 y su radio es 3.

Levantamos una perpendicular a OB en el punto A y llamamos D al punto en el que corta al semicírculo.

La longitud AD es la raíz buscada.

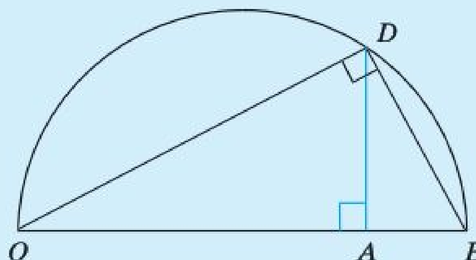


Figura 9.3

Probamos nuestra afirmación: los triángulos OAD y ADB son semejantes, por lo que cumplen:

$$\frac{OA}{AD} = \frac{AD}{AB},$$

es decir,

$$\frac{5}{AD} = \frac{AD}{1}.$$

Entonces,

$$5 = (AD)^2.$$

Como AD es positivo, entonces,

$$AD = \sqrt{5}.$$

9.1.2 El algoritmo de la raíz cuadrada

A través de un ejemplo explicaremos por qué funciona el algoritmo que aprendimos en la primaria para extraer la raíz cuadrada de un número.

Recordamos el algoritmo en el caso de $\sqrt{1369}$.

1. Supongamos que n es un entero.

   - Si n^2 tiene una o dos cifras $(n^2 = 1, 4, 16, 25, \ldots 81)$, entonces n tiene 1 cifra $(1, 2, 4, 5, \ldots 9)$.
   - Si n^2 tiene tres o cuatro cifras $(n^2 = 100, 121, 144, \ldots 9801)$, entonces n tiene 2 cifras $(10, 11, 12, \ldots 99)$, etcétera.

   Es decir, para saber cuántas cifras tiene $\sqrt{n^2}$ hay que agrupar de 2 en 2 los dígitos de n^2; si sobra un dígito al hacer este agrupamiento formamos un nuevo grupo con sólo ese dígito. El número total de grupos obtenidos es el número de dígitos de $\sqrt{n^2}$. Por eso es que el algoritmo comienza con esa formación de grupos de derecha a izquierda:

   $$\sqrt{13\ 69}.$$

   Así, la raíz $r = \sqrt{1369}$ tiene 2 cifras; es decir, r puede escribirse como

   $$r = d \cdot 10 + u,$$

   donde $1 \leq d \leq 9$ y $0 \leq u \leq 9$. El problema es entonces determinar d y u.

2. El número r satisface la ecuación $r^2 = (d \cdot 10 + u)^2 = 1369$, o sea:

   $$d^2 \cdot 10^2 + 2d \cdot 10 \cdot u + u^2 = 1369 \qquad (9.6)$$

   que equivale a:

   $$d^2 \cdot 10^2 + 2d \cdot 10 \cdot u + u^2 = 13 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 9.$$

   Así, buscamos un dígito d tal que $d^2 \cdot 10^2$ sea lo más próximo posible a $13 \cdot 10^2$, sin excederlo, o lo que es lo mismo que d^2 se aproxime lo más posible a 13, sin excederlo; por lo que tomamos $d = 3$ puesto que: $3^2 < 13 < 4^2$.

   El cuadrado $d^2 = 9$ se resta a 13, y junto al resto de esa diferencia se baja 69, lo que equivale a restar 900 $(= d^2 \cdot 10^2)$ a 1369:

	$\sqrt{13\ 69}$	3
se resta 3^2 a 13 →	-9	
se baja el 69 →	469	$469 = 1369 - d^2 \cdot 10^2$

3. De acuerdo con (9.6), tenemos:

   $$2d \cdot 10 \cdot u + u^2 = 1369 - d^2 \cdot 10^2 = 469$$

o sea,

$$\overbrace{(2d\cdot\ 10+u)}^{n}\cdot\ \ u=469.$$

Observamos que n es el número cuyas decenas son $2d$ (= 6) y cuyas unidades son u. O sea, la expresión decimal de n es $6u$.

Por tanto, duplicamos d y buscamos un dígito u tal que se cumpla la igualdad anterior para $d = 3$:

$$(6\cdot 10+u)\cdot u=469.$$

Por tanteo tomamos $u = 7$ y lo colocamos al lado del 3 y del 6.

$\sqrt{13\,69}$	37	
-900	67	se duplica el 3 y se baja el 7
469		$469=1369-d^2\cdot\ 10^2$
-469		se resta $67\cdot\ 7=(2d\cdot\ 10+u)u$ a $469=1369-d^2\cdot\ 10^2$
0		$0=1369-d^2\cdot\ 10^2-2du\cdot\ 10-u^2$

De acuerdo con el último renglón, $1369 = d^2\cdot 10^2+2du\cdot 10+u^2$. Por tanto, con $d = 3$ y $u = 7$ obtenemos el número $37 = d\cdot 10+u$, que tiene la propiedad:

$$37^2=\left(d^2\cdot 10^2+2du\cdot 10+u^2\right)=1369,$$

por lo que $\sqrt{1369}=37$.

9.1.3 Operaciones con raíces cuadradas

Un número entero se llama *cuadrado perfecto* si es el cuadrado de otro entero, o lo que es lo mismo, si sus raíces cuadradas son números enteros; así, 1, 4, 9, 16,... son cuadrados perfectos, ya que $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$,... pero 2 no es cuadrado perfecto ya que $\pm\sqrt{2}=\pm 1.4142...$

Cuando trabajamos con raíces cuadradas, lo cual es común al resolver ecuaciones de segundo grado, a veces no es conveniente calcular de inmediato las raíces cuadradas, sino que es mejor simplificar primero las expresiones; por ejemplo, podemos calcular la siguiente expresión hasta su cuarto decimal:

Se calcularon las raíces aproximadas y se multiplicaron.

$$\sqrt{50}\sqrt{18}=(7.0710)(4.2426)=29.9994,$$

o bien, podemos manipular la expresión y obtener:

$$\sqrt{50}\sqrt{18}=\sqrt{(50)(18)}=\sqrt{900}=30$$

o hacer el siguiente manejo de esas expresiones:

$$\sqrt{50}\sqrt{18}=\sqrt{(50)(18)}=\sqrt{(2)(5^2)(2)(3^2)}=\sqrt{(2^2)(3^2)(5^2)}=(2)(3)(5)=30.$$

En el primer cálculo no obtuvimos el resultado exacto debido a los errores de truncamiento.

En las simplificaciones anteriores utilizamos la propiedad relativa a la:

Raíz cuadrada de un producto

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \text{si} \qquad a\geq 0,\ b\geq 0.$$

Esto se generaliza, por ejemplo, a:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c} \quad \text{si} \quad a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt{200}$.

Solución: Factorizamos 200:

$$\sqrt{200} = \sqrt{(25)(4)(2)}.$$

Aplicamos la regla de la raíz cuadrada del producto:

$$\sqrt{(25)(4)(2)} = \sqrt{25}\,\sqrt{4}\,\sqrt{2}.$$

Extraemos la raíz cuadrada de los factores que son cuadrados perfectos:

$$\sqrt{25}\,\sqrt{4}\,\sqrt{2} = (5)(2)\sqrt{2}.$$

Entonces,

$$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

2. Simplificar $\sqrt{108}$.

Solución: Factorizamos 108:

$$\sqrt{108} = \sqrt{(4)(27)} = \sqrt{(4)(9)(3)}.$$

Aplicamos la regla de la raíz cuadrada del producto y simplificamos:

$$\sqrt{(4)(9)(3)} = \sqrt{4}\,\sqrt{9}\,\sqrt{3} = (2)(3)\sqrt{3} = 6\sqrt{3},$$

así,

$$\sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

3. Resolver la ecuación $5x^2 - 10 = 0$.

Solución: Para resolver esta ecuación despejamos x:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 10 &= 0 \\ 5x^2 &= 10 \\ x^2 &= 2 \\ |x| &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

es decir, las soluciones son:

$$x = \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{2}.$$

Comprobación: Sustituimos $x = \sqrt{2}$ en la ecuación original:

$$5x^2 - 10 = 5\left(\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 10 - 10 = 0.$$

Sustituimos $x = -\sqrt{2}$ en la ecuación original:

$$5x^2 - 10 = 5\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 10 - 10 = 0.$$

Observa ahora la siguiente raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{8^2}{5^2}}.$$

Recuerda que para elevar una fracción a una potencia se elevan su numerador y denominador a dicha potencia; es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Entonces,

$$\sqrt{\frac{8^2}{5^2}} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8}{5},$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}.$$

Esto sugiere la siguiente regla:

Raíz cuadrada de un cociente

Si a es un número real mayor o igual a cero y b es un número real positivo, entonces:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt{\frac{100}{121}}$.

Solución: Aplicando la regla del cociente tenemos que:

$$\sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11}.$$

2. Simplificar $\sqrt{\frac{72}{50}}$.

Solución: Simplificamos y aplicamos la regla del cociente:

$$\sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{(36)(2)}{(25)(2)}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}.$$

Raíces cuadradas de cuadrados

Observa el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3.$$

En ambos casos el resultado es 3, ya que $\sqrt{}$ significa la raíz cuadrada no negativa. Recuerda que el valor absoluto de -3 es 3 y esto se expresa

$$|-3| = 3.$$

En general, si a es un número real, entonces

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Como a representa un número que puede ser positivo, cero o negativo, debemos escribir el símbolo del valor absoluto para garantizar que el resultado sea no negativo.

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt{144b^2}$.

Solución:

$$\sqrt{144b^2} = \sqrt{12^2 b^2} = 12|b|.$$

No sabemos qué signo tiene b, por eso debemos dejar indicado $|b|$.

2. Simplificar $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

Solución: La expresión que está dentro del radical es un cuadrado perfecto:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|.$$

3. Resolver la ecuación $\sqrt{y^2 + 16y + 64} = 5y$.

Solución: Observamos que $y^2 + 16y + 64 = (y+8)^2$, así,

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + 16y + 64} &= 5y \\ \sqrt{(y+8)^2} &= 5y \\ |y+8| &= 5y. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos dos casos:

$$y + 8 = 5y \quad \text{o} \quad -(y+8) = 5y.$$

Despejando la y de estas dos ecuaciones tenemos:

$$y = 2 \ \text{ o } \ y = -\frac{4}{3}.$$

La solución a nuestro problema original es $y = 2$, pues el valor $y = -\frac{4}{3}$ no es solución de la ecuación original $\sqrt{y^2 + 16y + 64} = 5y$, ya que $5y$ es igual a la raíz cuadrada no negativa de $y^2 + 16y + 64$, por lo que $5y$, y por tanto, y, debe ser mayor o igual que cero.

Comprobación: Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\sqrt{y^2 + 16y + 64} = \sqrt{2^2 + 16(2) + 64} = 10.$

Lado derecho: $5y = 5(2) = 10.$

4. Resolver la ecuación $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}.$

Solución: Para resolver esta ecuación, primero quitamos los denominadores; para esto multiplicamos por 3 y por $1+\sqrt{x}$:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$
$$3 = 1 + \sqrt{x}.$$

Ahora pasamos los términos independientes de un lado de la ecuación y elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad para obtener el valor de x:

$$2 = \sqrt{x}$$
$$4 = x.$$

Comprobación: Sustituimos $x = 4$ en la ecuación original:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{4}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Veamos ahora cómo extraer la raíz cuadrada de potencias.

Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{2^{10}}$ recordamos la ley de la potencia de una potencia:

$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ donde a es un número real y b, c son números enteros.

Como $10 = (2)(5)$, podemos escribir:

$$\sqrt{2^{10}} = \sqrt{2^{(2\times 5)}} = \sqrt{\left(2^5\right)^2} = \left|2^5\right| = 32.$$

Así,

$$\sqrt{2^{10}} = 32.$$

Raíz cuadrada de una potencia par

En general, tenemos que si a es un número real y n es un número entero positivo, entonces:

$$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{\left(a^n\right)^2} = \left|a^n\right| = |a|^n,$$

así que obtenemos la siguiente ley:

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt{(-7)^6}$.

Solución:

$$\sqrt{(-7)^6} = |-7|^3 = 7^3.$$

2. Simplificar $\sqrt{5^3(-2)^6 3^5}$.

Solución: Factorizamos las potencias pares más grandes posibles de los factores que están en el radical:

$$\sqrt{5^3(-2)^6 3^5} = \sqrt{5^2(5)(-2)^6 3^2(3)}$$

Aplicamos la ley de la raíz de un producto y la ley anterior:

$$\begin{aligned}\sqrt{5^2(5)(-2)^6 3^2(3)} &= \sqrt{5^2}\sqrt{(-2)^6}\sqrt{3^2}\sqrt{(5)(3)} = (5)|-2|^3(3)\sqrt{15}\\ &= (5)(2^3)(3)\sqrt{15} = 120\sqrt{15}.\end{aligned}$$

3. Simplificar $\sqrt{12a^3b^8c}$.

Solución: Factorizamos las potencias pares más grandes posibles de los factores que están en el radical:

$$\sqrt{12a^3b^8c} = \sqrt{(3)2^2aa^2b^8c} = 2|a|\left|b^4\right|\sqrt{3ac} = 2|a|b^4\sqrt{3ac}.$$

Observa que $\left|b^4\right| = b^4$.

9.1.3.1 Distancia entre dos puntos

Para calcular la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano, que no estén en la misma recta vertical u horizontal, construimos un triángulo rectángulo que tenga el segmento PQ como hipotenusa. En el caso de la figura 9.4, el tercer vértice tiene coordenadas $R(x_2, y_1)$.

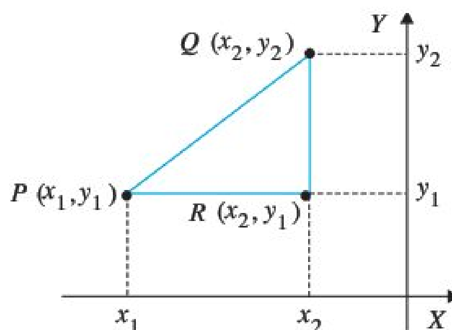


Figura 9.4

Las longitudes de los catetos del triángulo son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$. La distancia entre P y Q es la longitud de la hipotenusa del triángulo. Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}. \tag{9.7}$$

Como:

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \text{ y } |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

entonces podemos escribir (9.7) como:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{9.8}$$

Observa que si los puntos están en la misma vertical o en la misma horizontal, entonces uno de los dos sumandos de la fórmula vale cero, y el resultado sigue siendo cierto.

Ejemplo

- Las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo son $P(-5,4)$, $Q(3,-2)$ y $R(3,6)$. Calcular las longitudes de los lados del triángulo.

Solución: Para calcular las longitudes de los lados del triángulo utilizamos la fórmula (9.8). La longitud del lado PQ es:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(3-(-5))^2 + (-2-4)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \end{aligned}$$

La longitud del lado PR es:

$$\begin{aligned} d(P,R) &= \sqrt{(3-(-5))^2 + (6-4)^2} \\ &= \sqrt{64+4} \\ &= \sqrt{68} \\ &= 2\sqrt{17}. \end{aligned}$$

La longitud del lado QR es:

$$\begin{aligned} d(Q,R) &= \sqrt{(3-3)^2 + (6-(-2))^2} \\ &= \sqrt{0+64} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8. \end{aligned}$$

9.1.4 Ejercicios

Haz la construcción geométrica de la raíz cuadrada para los siguientes números.

1. $\sqrt{4}$ **2.** $\sqrt{6}$ **3.** $\sqrt{3.5}$ **4.** $\sqrt{8.5}$

Simplifica las siguientes expresiones.

5. $\sqrt{180}$
6. $\sqrt{147}$
7. $\sqrt{150}$
8. $\sqrt{288}$
9. $\sqrt{567}$
10. $\sqrt{720}$
11. $\sqrt{128}$
12. $\sqrt{484}$
13. $\sqrt{189}$
14. $\sqrt{500}$
15. $\sqrt{432}$
16. $\sqrt{19630}$
17. $\sqrt{7200}$
18. $\sqrt{8192}$
19. $\sqrt{71442}$
20. $\sqrt{8000}$
21. $\sqrt{15}\sqrt{60}$
22. $\sqrt{48}\sqrt{12}$
23. $\sqrt{30}\sqrt{120}$
24. $\sqrt{128}\sqrt{8}$
25. $\sqrt{20}\sqrt{45}$
26. $\sqrt{99}\sqrt{44}$
27. $\sqrt{28}\sqrt{63}$
28. $\sqrt{45}\sqrt{5}$
29. $\sqrt{32}\sqrt{50}$
30. $\sqrt{242}\sqrt{72}$
31. $\sqrt{800}\sqrt{882}$
32. $\sqrt{243}\sqrt{432}$
33. $\sqrt{\frac{48}{147}}$
34. $\sqrt{\frac{125}{180}}$
35. $\sqrt{\frac{162}{50}}$
36. $\sqrt{\frac{343}{700}}$
37. $\sqrt{\frac{1014}{726}}$
38. $\sqrt{\frac{484}{256}}$
39. $\sqrt{\frac{243}{432}}$
40. $\sqrt{\frac{144}{100}}$
41. $\sqrt{\frac{15}{375}}$
42. $\sqrt{\frac{176}{99}}$
43. $\sqrt{\frac{1350}{864}}$
44. $\sqrt{\frac{405}{320}}$
45. $\sqrt{64a^2c^4}$
46. $\sqrt{y^2+8y+16}$
47. $\sqrt{y^2-18y+81}$
48. $\sqrt{121w^4x^6z^8}$
49. $\sqrt{w^2+2\sqrt{2}w+2}$
50. $\sqrt{y^2+14y+49}$
51. $\sqrt{z^2-16z+64}$
52. $\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3}$
53. $\sqrt{225a^4b^8c^{12}d^{32}}$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

54. $\sqrt{x^2-10x+25}=-4x$
55. $\frac{5}{6s^2}-\frac{3}{8s^2}=\frac{11}{12}$
56. $\sqrt{w^2+12w+36}=-8w+7$
57. $7z+13=\sqrt{z^2+2z+1}$
58. $-5y+2=\sqrt{y^2-20y+100}$
59. $\frac{7}{5w^2}-\frac{5}{7w^2}=\frac{12}{35}$

En los ejercicios 60 a 68, efectúa los productos.

60. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$
61. $\left(\sqrt{8}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{12}\right)$
62. $\left(4-\sqrt{10}\right)^2$
63. $\left(9y-\sqrt{6}\right)^2$
64. $\left(9z+\sqrt{15}\right)\left(9z-2\sqrt{5}\right)$
65. $\left(\sqrt{4z}+\sqrt{11}\right)^2$
66. $\left(7\sqrt{w}-8\sqrt{6}\right)^2$
67. $\left(\sqrt{2x}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x}-4\sqrt{2}\right)$
68. $\left(\sqrt{x-7}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{y}\right)$

69. Si a, b y c son los lados de un triángulo y s es la mitad del perímetro, entonces el área del triángulo es $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

    Calcula el área del triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

70. El periodo de un péndulo es el tiempo que tarda en hacer una oscilación completa y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud. Es decir, $p=k\sqrt{\ell}$ donde p es el periodo medido en segundos, ℓ es la longitud en centímetros y k es la constante de proporcionalidad. Un péndulo de longitud de 1 metro tiene un periodo de 2 segundos. ¿Qué longitud tiene un péndulo cuyo periodo es de 1.4 segundos?

71. Las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo son $P(-1,2)$, $Q(6,2)$ y $R(-2,-3)$. Calcula las longitudes de los lados del triángulo.



9.2 RAÍCES DE ORDEN SUPERIOR

¿A qué tasa de interés anual deben invertirse \$1,000 para que se duplique su valor en 4 años, si el capital inicial y los réditos generados en un año se invierten al año siguiente?

Solución: Recuerda que la fórmula de interés compuesto es la siguiente:

$$C(1+I)^n = F,$$

donde C es el capital inicial, I es la tasa de interés, expresada como número decimal, n es el número de periodos que dura la inversión y F es el valor de la inversión al final del último periodo.

En nuestro caso, tenemos:

$$1000(1+I)^4 = 2000.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}(1+I)^4 &= 2\\ 1+I &= \sqrt[4]{2}\\ I &= \sqrt[4]{2}-1 = 1.189-1 = 0.189.\end{aligned}$$

Por tanto, la tasa de interés a la que deben invertirse \$1,000 es $I = 0.189$; es decir, al 18.9% anual.

Observa que en el primer paso tenemos $(1+I)^4 = 2$, lo cual significa que buscamos un número $(1+I)$ que multiplicado 4 veces por sí mimo dé 2.

Observa también que 1.189 es la aproximación con 3 decimales de $\sqrt[4]{2}$. Si calculamos $(1.189)^4$ obtenemos 1.998607065841... que es ligeramente menor que 2. Así, nuestra respuesta no da el valor exacto, pero sí una buena aproximación. De hecho en las dos últimas ecuaciones pudimos escribir $\approx$ para ser más precisos, en lugar de $=$, donde $\approx$ se lee: "aproximadamente igual a".

Si para un número entero positivo n, se satisface

$$a^n = b,$$

entonces decimos:

- a es una *raíz cúbica* de b si $n = 3$.
- a es una *raíz cuarta* de b si $n = 4$.
- a es una *raíz quinta* de b si $n = 5$; etcétera.
- En general, a es llamada una *raíz n-ésima* de b si n es un entero positivo indeterminado.

EJEMPLOS

- Como $5^3 = 125$, entonces 5 es una raíz cúbica de 125.
- Como $2^5 = 32$, entonces 2 es una raíz quinta de 32.
- Como $3^4 = 81$, entonces 3 es una raíz cuarta de 81.
- Como $(-3)^4 = 81$, entonces -3 también es una raíz cuarta de 81.
- Como $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, entonces $\frac{3}{2}$ es una raíz cúbica de $\frac{27}{8}$.
- No hay ningún número que multiplicado por sí mismo dé -4, así que -4 no tiene raíz cuadrada.

Observaciones:

- Si n es par, entonces a^n siempre es mayor o igual que cero, así que un número negativo no puede tener raíz *n-ésima* si n es par.
- Si n es par, y si $b = a^n$, entonces también $b = (-a)^n$; por tanto, b tiene dos raíces *n-ésimas*, a y $-a$, cuando n es par.
- Si n es impar, todo número real tiene exactamente una raíz *n-ésima*.

La raíz *n-ésima* principal $\sqrt[n]{b}$

Si $b \geq 0$, hay una única raíz *n-ésima* no negativa de b, llamada la raíz *n-ésima principal* de b, y la representamos mediante $\sqrt[n]{b}$. Esto es, si $b \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{b}$ es el único número no negativo tal que

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Criterio para que $a = \sqrt[n]{b}$. Por lo anterior, para ver que un número a sea igual a $\sqrt[n]{b}$, debemos probar que se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $a \geq 0$.
- $a^n = b$.

En la expresión $\sqrt[n]{b}$, el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical*, el número n es el *orden* de la raíz, y el número b que está dentro del radical se llama *radicando*.

En el capítulo 6 vimos las leyes de los exponentes cuando el exponente es un número natural:

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{9.9}$$

$$a^n b^n = (ab)^n \tag{9.10}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{9.11}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{9.12}$$

Utilizaremos ahora estas propiedades para obtener algunas similares para los radicales.

Operaciones con radicales

Aquí generalizamos las propiedades vistas en la subsección sobre operaciones con raíces cuadradas e incluimos una operación más: la suma de expresiones radicales similares (véase el inciso V de la página 291).

I. Si $a > 0$, $b > 0$ y n es un número entero positivo, entonces,

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \tag{9.13}$$

es decir, *la raíz n-ésima principal de un producto es el producto de las raíces n-ésimas principales.*

Para probar que $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ es la raíz *n-ésima* de ab usamos el criterio dado anteriormente. Así, elevamos $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ al exponente n, y al usar la propiedad (9.10) para exponentes enteros, y la definición de raíz *n-ésima*, obtenemos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Y como además $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \geq 0$, entonces, por el criterio antes mencionado, concluimos que $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

II. Si $a \geq 0, b > 0$ y n es un número entero positivo, entonces,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \tag{9.14}$$

es decir, *la raíz n-ésima principal de un cociente es el cociente de las raíces n-ésimas principales.*

Como en el caso anterior, elevamos $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ al exponente n, usando ahora la propiedad (9.12):

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b},$$

y como $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$, entonces $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Esta regla será más fácil de manejar cuando se introduzcan los exponentes fraccionarios (véase página 300).

III. Si $a \geq 0$ y m, n son números enteros positivos, entonces,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \tag{9.15}$$

es decir, *da lo mismo sacar la raíz n-ésima principal y luego elevar a la potencia m, que elevar primero a la potencia m y luego sacar la raíz n-ésima principal.*

Para justificar esta propiedad, elevamos $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ al exponente n, y usando la regla de los exponentes (9.11), tenemos:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m.$$

Y como $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \geq 0$, entonces $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ es la raíz *n-ésima principal* de a^m, o sea $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Como consecuencia de esta propiedad obtenemos:

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}.$$

Por la propiedad anterior $\sqrt[4]{a^2} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^2$. Además,

$$\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a} = a,$$

es decir,

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^2\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 = a.$$

Y como $\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 \geq 0$, obtenemos $\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 = \sqrt{a}$.

IV. Si $a \geq 0$ y m, n son números enteros positivos, entonces,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{9.16}$$

Es decir, *da lo mismo sacar la raíz n-ésima principal y luego sacar la raíz m-ésima principal que sacar la raíz mn-ésima principal.*

Elevamos $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ al exponente mn y usamos la ley de los exponentes (9.11), con lo que obtenemos:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Y como $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \geq 0$, tenemos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ es la raíz *mn-ésima* principal de a; es decir,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

V. Suma de expresiones con raíces. Si $a > 0, m, n$ son enteros positivos y c y d son reales distintos de 0, entonces decimos que las expresiones radicales $c\sqrt[n]{a}$ y $d\sqrt[m]{a}$ son similares si $n = m$. Por ejemplo: $5\sqrt[3]{2}$ y $\pi\sqrt[3]{2}$ son similares, mientras que $2\sqrt[3]{2}$ y $\pi\sqrt[5]{2}$ no lo son.

Consideremos dos expresiones radicales similares $c\sqrt[n]{a}$ y $d\sqrt[n]{a}$, entonces, por la propiedad distributiva, tenemos:

$$c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$$
$$c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a} = (c-d)\sqrt[n]{a}.$$

Al sumar dos expresiones algebraicas en las que aparecen expresiones radicales, agrupamos las similares de acuerdo con las fórmulas anteriores. Por ejemplo:

$$\left(3+2\sqrt{5}+3\sqrt[4]{2}\right)+\left(1-3\sqrt{5}+7\sqrt[4]{2}-\sqrt[5]{4}\right)=4-\sqrt{5}+10\sqrt[4]{2}-\sqrt[5]{4}.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt[3]{8000}$.

Solución:

$$\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{1000}\,\sqrt[3]{8} = 10(2) = 20.$$

2. Simplificar $\dfrac{\sqrt[5]{x^{12}y^3z}}{\sqrt[5]{x^2y^8z^6}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt[5]{x^{12}y^3z}}{\sqrt[5]{x^2y^8z^6}} = \sqrt[5]{\frac{x^{12}y^3z}{x^2y^8z^6}} = \sqrt[5]{\frac{x^{10}}{y^5z^5}} = \frac{x^2}{yz}.$$

3. Simplificar $\sqrt[4]{\left(81a^8b^{12}\right)^5}$.

Solución:

$$\sqrt[4]{\left(81a^8b^{12}\right)^5} = \left(\sqrt[4]{81a^8b^{12}}\right)^5 = \left(3a^2b^3\right)^5 = 3^5a^{10}b^{15}.$$

4. Simplificar $\sqrt[2]{\sqrt[6]{(x+5)^{24}(y-1)^{60}}}$.

Solución:

$$\sqrt[2]{\sqrt[6]{(x+5)^{24}(y-1)^{60}}} = \sqrt[12]{(x+5)^{24}(y-1)^{60}} = (x+5)^2\left|y-1\right|^5.$$

5. Simplificar $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{128}$.

Solución:

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125\cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64\cdot 2} = 4\sqrt[3]{2}.$$

Por tanto,

$$2\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{128}=6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}.$$

9.2.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes raíces.

1. $\sqrt{81x^4}$
2. $\sqrt[3]{8a^6}$
3. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
4. $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}}$
5. $\sqrt[5]{-10000a^{10}}$
6. $\left(\sqrt[3]{2x}\right)^6$
7. $\sqrt{\dfrac{36b^6}{25a^4}}$
8. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$
9. $\sqrt[5]{\dfrac{-32a^{10}}{b^{25}}}$
10. $\sqrt{\sqrt[3]{64b^{12}}}$
11. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{36}y^{24}}}$
12. $\sqrt[7]{64a^2b^4}\sqrt[7]{512a^3b^6}$
13. $\sqrt[5]{\left((6c+7)^{15}(d+1)^{45}\right)^3}$
14. $\sqrt{0.01b^6}$
15. $\sqrt[4]{256a^{32}b^8c^6}$
16. $\sqrt[7]{r^{10}s^{57}t^3}\sqrt[7]{r^4s^{27}t^{60}}$
17. $\sqrt[5]{36a^4b^3}\sqrt[5]{216a^6b^2}$
18. $\sqrt[6]{x^3y^6z^{12}}$
19. $\sqrt{-\dfrac{27x^6}{8y^9}}$
20. $\dfrac{\sqrt[8]{a^{15}b^{45}c^{20}}}{\sqrt[8]{a^{79}b^{21}c^{68}}}$
21. $\dfrac{\sqrt[3]{x^5w^8z^4}}{\sqrt[3]{x^2w^2z^{-11}}}$
22. $\sqrt[9]{\sqrt[2]{(w^2-2)^{54}(5z+3)^6}}$
23. $\sqrt[4]{\left(\sqrt{2^3}a^4c^2\right)^3}$
24. $\sqrt[5]{\left(x^5y^{10}\sqrt[3]{125z^3}\right)^4}$
25. En el año 1963, un bono del ahorro nacional con valor de $10 duplicaba su valor en 10 años. ¿Qué porcentaje de interés se pagaba?
26. ¿A qué porcentaje de interés deben invertirse $1,000 para que se dupliquen en 4 años?, ¿y cualquier otra cantidad?
27. ¿Cuánto tiempo tendrá que invertirse un capital de $30,000 para duplicarse si el interés compuesto anual es de 3%? Si cambias la cantidad inicial por cualquier otra, ¿cuánto tiempo se requiere?

9.3 Racionalización (de denominadores) de expresiones con radicales

Hay expresiones que contienen radicales en el denominador, lo cual dificulta su manejo; para hacerlo más fácil es conveniente escribirlas de manera que en su denominador no haya radicales. El proceso mediante el cual se elimina el radical del denominador de una expresión se llama *racionalización de denominadores,* o simplemente *racionalización.*

Ejemplos

1. Calcular un valor aproximado de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ si tomamos 1.41 como un valor aproximado de $\sqrt{2}$.

   Solución: Una manera de hacerlo es efectuar la división $\dfrac{1}{1.41}$.

   Otra forma consiste en racionalizarla primero, multiplicándola por $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y después efectuar esta última división:

$$\frac{1.41}{2} = 0.705,$$

que es sin duda más fácil de realizar que $\frac{1}{1.41}$.

2. Racionalizar la expresión $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6.$$

3. Racionalizar la expresión $\frac{1}{\sqrt{75}}$.

Solución: Primero simplificamos la expresión, buscando los factores del radicando con los exponentes pares más grandes posibles:

$$\frac{1}{\sqrt{75}} = \frac{1}{\sqrt{(5^2)3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}.$$

Multiplicamos toda la expresión por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ para eliminar $\sqrt{3}$ del denominador:

$$\frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5(3)} = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

Nota que la expresión sólo tiene sentido para $x > 0$.

4. Racionalizar la expresión $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6x^3}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6x^3}} = \frac{\sqrt{3^2(5)}}{\sqrt{6x^2x}} = \frac{3\sqrt{5}}{x\sqrt{6x}} = \frac{3\sqrt{5}}{x\sqrt{6x}}\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}} = \frac{3\sqrt{30x}}{x\cdot 6\cdot x} = \frac{\sqrt{30x}}{2x^2}.$$

5. Racionalizar la expresión $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$.

Solución: Debemos buscar un factor tal que al multiplicarlo por $2+\sqrt{3}$ elimine el radical.

Recordamos la fórmula del producto de binomios conjugados:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Así,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3 = 1.$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador de la expresión original por $2-\sqrt{3}$, ésta no se altera, pues hemos multiplicado por 1.

$$\frac{4}{2+\sqrt{3}}=\frac{4}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}=4\left(2-\sqrt{3}\right).$$

6. Racionalizar la expresión $\frac{5x}{\sqrt{3x}-2\sqrt{x}}$.

Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por el binomio conjugado del denominador; es decir, por $\sqrt{3x}+2\sqrt{x}$.

$$\frac{5x\left(\sqrt{3x}+2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{3x}-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3x}+2\sqrt{x}\right)}=\frac{5x\left(\sqrt{3x}+2\sqrt{x}\right)}{3x-4x}$$
$$=-5\left(\sqrt{3x}+2\sqrt{x}\right).$$

7. Racionalizar la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^3}\sqrt[3]{b^2}}$.

Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^3}\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}{\left(\sqrt{2}\sqrt[5]{a^3}\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[5]{a^3}\sqrt[5]{a^2}\right)\left(\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{b}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}{2\left(\sqrt[5]{a^5}\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}{2ab}.$$

■

9.3.1 Ejercicios

Racionaliza las siguientes expresiones.

1. $\frac{7}{\sqrt{63}}$
2. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{48}}$
3. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{105}}$
4. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$
5. $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{80}}$
7. $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{150}}$
8. $\frac{1}{\sqrt{112}}$
9. $\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{40}}$
10. $\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{48}}$
11. $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{240}}$
12. $\frac{1}{\sqrt{108}}$
13. $\frac{8}{2-\sqrt{7}}$
14. $\frac{10}{\sqrt{6}+4}$
15. $\frac{4}{\sqrt{3}-5}$
16. $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{10}}$
17. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
18. $\frac{16}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$
19. $\frac{4}{2\sqrt{3}+1}$
20. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}+7}$
21. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$
22. $\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{10}+9}$
23. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4\sqrt{11}-2}$
24. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-8}$

25. $\dfrac{\left(\sqrt{5}+x\right)+1}{\sqrt{5}+x}$

26. $\dfrac{z^2-49}{\sqrt{z+7}}$

27. $\dfrac{3+\sqrt{w+1}}{3-\sqrt{w+1}}$

28. $\dfrac{b+2}{\sqrt{b^2-4}}$

29. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{3}}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$

30. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

31. $\dfrac{121-t}{11+\sqrt{t}}$

32. $\dfrac{3z-5}{\sqrt{8z-5\sqrt{z+1}}}$

33. $\dfrac{3x+1}{\sqrt{5x+6\sqrt{x}}}$

34. $\dfrac{3w-4}{\sqrt{4w-1-\sqrt{w+3}}}$

35. $\dfrac{16z^2-81}{\sqrt{6z^2+7+\sqrt{2-2z^2}}}$

36. $\dfrac{\sqrt{s-8}+\sqrt{s+8}}{\sqrt{s-8}-\sqrt{s+8}}$

37. $\dfrac{(y-4)^2}{\sqrt{3y^2-8y+16-\sqrt{2y^2+2y-9}}}$

9.4 Reducción de expresiones radicales

Una expresión que contiene radicales está en su forma más sencilla si:

- No se puede sacar ningún factor del radicando.
- No hay fracciones dentro de un radical.
- No hay radicales en el denominador. Es decir, se ha racionalizado su denominador.

Ejemplos

1. Reducir $\sqrt{18}$.

Solución: 18 puede factorizarse como $18 = 9\cdot 2 = 3^2\cdot 2$, así que:

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{3^2}\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

2. Reducir $\sqrt[4]{25x^2}$.

Solución: Como $|x|^2 = x^2$, tenemos:

$$\sqrt[4]{25x^2}=\sqrt[4]{(5x)^2}=\sqrt[4]{(5|x|)^2}.$$

Por (9.15):

$$\sqrt[4]{(5|x|)^2}=\left(\sqrt[4]{5|x|}\right)^2.$$

Concluimos que:

$$\left(\sqrt[4]{5|x|}\right)^2=\sqrt{5|x|}.$$

Por tanto,

$$\sqrt[4]{25x^2}=\sqrt{5|x|}.$$

3. Reducir $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Solución: Como no queremos radicales en el denominador, multiplicamos y dividimos la expresión por $\sqrt{5}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

4. Reducir $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

5. Reducir $\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Solución: No queremos fracciones en el radical, usamos primero la propiedad de que la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces, y después eliminamos el radical del denominador como en los ejemplos anteriores:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

6. Reducir $\frac{x-1}{x-\sqrt{2}}$.

Solución: Para eliminar el radical $\sqrt{2}$ del denominador, usamos la fórmula del producto de binomios conjugados:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Así, multiplicando el numerador y el denominador de la expresión por $\left(x+\sqrt{2}\right)$, obtenemos

$$\frac{x-1}{x-\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = \frac{x^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}.$$

7. Reducir $\sqrt[3]{\frac{24a^7}{b^8}}$, donde $a, b > 0$.

Solución:

$$\sqrt[3]{\frac{24a^7}{b^8}} = \frac{\sqrt[3]{24a^7}}{\sqrt[3]{b^8}} = \frac{\sqrt[3]{24}\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{b^8}} = \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 3a^6 \cdot a}}{\sqrt[3]{b^6 b^2}} = \frac{\sqrt[3]{8a^6 \cdot 3a}}{\sqrt[3]{b^6 b^2}} = \frac{2a^2\sqrt[3]{3a}}{b^2\sqrt[3]{b^2}}.$$

Racionalizando el denominador de la última expresión obtenemos:

$$\frac{2a^2\sqrt[3]{3a}}{b^2\sqrt[3]{b^2}} = \frac{2a^2\sqrt[3]{3a}}{b^2\sqrt[3]{b^2}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{2a^2\sqrt[3]{3ab}}{b^2\sqrt[3]{b^2}\sqrt[3]{b}} = \frac{2a^2\sqrt[3]{3ab}}{b^2 b} = \frac{2a^2\sqrt[3]{3ab}}{b^3}$$

De donde:

$$\sqrt[3]{\frac{24a^7}{b^8}}=\frac{2a^2\sqrt[3]{3ab}}{b^3}.$$

9.4.1 Ejercicios

Reduce las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[3]{500}$
2. $\sqrt[4]{48}$
3. $\sqrt[5]{96}$
4. $\sqrt[4]{768}$
5. $\dfrac{12}{\sqrt[3]{6}}$
6. $\dfrac{15}{\sqrt[5]{3}}$
7. $\dfrac{26}{\sqrt[6]{2}}$
8. $\dfrac{45}{\sqrt[4]{5}}$
9. $\dfrac{9}{\sqrt[4]{36}}$
10. $\dfrac{11\sqrt{6}}{\sqrt{121}}$
11. $\dfrac{5}{\sqrt{3}-3}$
12. $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$
13. $\dfrac{-3}{\sqrt{8}+\sqrt{11}}$
14. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$
15. $\dfrac{w^2-29w-30}{7-\sqrt{w+19}}$
16. $\dfrac{z-31}{\sqrt{z+5}+6}$
17. $\sqrt[6]{125a^3b^3c^6}$
18. $\sqrt[3]{64x^9y^{12}z^{21}}$
19. $\sqrt[4]{144c^6d^8e^4}$
20. $\sqrt[9]{512c^{18}d^{72}c^{21}}$
21. $\dfrac{x^2-2x-48}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$
22. $\dfrac{z^3+z^2-3z-3}{z-\sqrt{3}}$
23. $\dfrac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x-6}-2}$
24. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a-5}+\sqrt{b-5}}$
25. $\dfrac{w^2-14w+49}{\sqrt{w}+\sqrt{7}}$
26. $\dfrac{12}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4}}$
27. $\sqrt[12]{x^{16}y^8z^{20}}$
28. $\sqrt[3]{8(a+b)^2c^{12}d^9}$

Utiliza las fórmulas $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ para reducir las siguientes expresiones.

29. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{27}}$
30. $\dfrac{131-a}{5-\sqrt[3]{a-6}}$
31. $\dfrac{w+8}{\sqrt[3]{w}+2}$
32. $\dfrac{z-8}{\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{8z}+\sqrt[3]{64}}$
33. $\dfrac{-x+4}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+\sqrt[3]{9x+45}+\sqrt[3]{81}}$
34. $\dfrac{a^4-36}{a^4-a^2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$

9.5 Exponentes negativos y fraccionarios

Queremos ahora extender la definición de la potencia a^n para cuando el exponente n sea 0, un entero negativo o un racional, de manera que sigan valiendo las reglas 9.9, 9.10, 9.11 y 9.12.

Empecemos por definir potencias cuando el exponente es 0.

Si queremos que la regla (9.9) siga siendo válida cuando $n=0$, entonces, para todo $a\neq 0$ tenemos:

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m;$$

dividiendo ambos miembros entre a^m obtenemos:

$$a^0=\frac{a^m}{a^m}=1.$$

Así, definimos:

$$a^0=1 \text{ para todo } a\neq 0.$$

9.5.1 Exponentes negativos

Veamos ahora cuando el exponente es negativo.

Tomemos $a \neq 0$ y un número entero positivo n; si queremos que (9.9) siga siendo válida para exponentes negativos, entonces:

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1,$$

así que:

$$a^n a^{-n} = 1.$$

Dividiendo ambos miembros entre a^n obtenemos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Así, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } a \neq 0 \qquad n \text{ es un entero positivo.} \qquad (9.17)$$

Observemos que:

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}} \quad \text{si } m \text{ es un entero negativo,} \qquad (9.18)$$

ya que $m = -(-m)$ y $(-m) > 0$.

De acuerdo con esta observación es fácil ver que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \text{si} \quad a \neq 0 \text{ y } n \text{ es un entero,} \qquad (9.19)$$

ya que:

- Si n es positivo entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ se sigue de (9.17), y despejando obtenemos $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.
- Si $n = 0$, entonces todos los miembros valen 1.
- Si n es negativo, entonces por (9.18) obtenemos $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, y despejando obtenemos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Con base en (9.19) podemos pasar al denominador potencias que aparezcan en el numerador, y viceversa, siempre y cuando cambiemos el signo del exponente.

EJEMPLOS

1. Verificar que $\frac{a^5}{b^3} = \frac{b^{-3}}{a^{-5}}$.

Solución:

$$\frac{a^5}{b^3} = \frac{\frac{1}{a^{-5}}}{\frac{1}{b^{-3}}} = \frac{b^{-3}}{a^{-5}}.$$

2. Verificar que $3^4 \cdot 2^{-7} = \frac{3^4}{2^7}$.

Solución:

$$3^4 \cdot 2^{-7} = 3^4 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{3^4}{2^7}.$$

Es fácil probar que, con la definición dada, las leyes de los exponentes son válidas cuando éstos son enteros, es decir, si $a > 0$ y n y m son enteros, entonces:

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{9.20}$$

$$a^n b^n = (ab)^n \tag{9.21}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm} \tag{9.22}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{9.23}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{9.24}$$

Sólo haremos una de las pruebas, pues son un poco extensas por los diversos casos que hay que considerar, pero todas ellas se obtienen de modo similar.

Propiedad (9.20): $a^n a^m = a^{n+m}$, si n y m son enteros.

Caso 1: Si $n, m > 0$, ya sabemos que la ley es válida.

Caso 2: Supongamos que un exponente es positivo y el otro negativo, digamos $n > 0$, $m = -r$ con $r > 0$:

a. Si $n - r > 0$, entonces, por la propiedad (9.9) para exponentes positivos, tenemos

$$a^{n-r} a^r = a^n.$$

Y así,

$$a^{n-r} = \frac{a^n}{a^r} = a^n a^{-r},$$

es decir,

$$a^{n+m} = a^n a^m.$$

b. Si $n - r = 0$, entonces:

$$a^{n+m} = a^{n-r} = a^0 = 1.$$

Y como $n = r$, tenemos:

$$a^n a^m = a^n a^{-r} = \frac{a^n}{a^r} = 1,$$

de donde:

$$a^{n+m} = a^n a^m.$$

c. Si $n - r < 0$, entonces $r - n > 0$ y tenemos

$$a^{r-n} a^n = a^r.$$

Y así,

$$a^{r-n} = \frac{a^r}{a^n} = a^r a^{-n},$$

es decir,

$$a^{r-n} = \frac{a^r}{a^n}.$$

Despejando, obtenemos:

$$\frac{a^n}{a^r} = \frac{1}{a^{r-n}}.$$

De (9.19) se sigue:

$$a^n a^{-r} = a^{n-r};$$

es decir,

$$a^n a^m = a^{n+m}.$$

Caso 3: Cuando un exponente es cero, digamos $n = 0$, entonces:

$$a^n a^m = a^0 a^m = 1 \cdot a^m = a^m = a^{0+m} = a^{n+m}.$$

Caso 4: Los dos exponentes son negativos: $n = -r$ y $m = -s$, con $r, s > 0$.

$$a^n a^m = a^{-r} a^{-s} = \frac{1}{a^r}\frac{1}{a^s} = \frac{1}{a^r a^s} = \frac{1}{a^{r+s}} = a^{-(r+s)} = a^{n+m}.$$

9.5.2 Exponentes fraccionarios

No existe ningún entero n que satisfaga la ecuación

$$3^n 3^n = 3,$$

ya que: si $n > 0$, entonces $3^n > 3$; si $n = 0$, entonces $3^n = 1$, y si $n = -m$ con $m > 0$, entonces $3^n = \frac{1}{3^m} < 1$.

Si aceptamos exponentes que no sean enteros y suponemos que podemos usar las leyes de los exponentes, ¿cuánto debe valer n para que la siguiente expresión sea cierta?

$$3^n 3^n = 3.$$

De acuerdo con (9.9), $3^n 3^n = 3^{2n}$, por lo que la ecuación se transforma en $3^{2n} = 3$, cuya solución es $2n = 1$; es decir, $n = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, si $3^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} = 3$; es decir, si $3^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por sí mismo es 3, entonces $3^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de 3. Esto nos sugiere dar la siguiente definición:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}.$$

Siguiendo lo anterior, definimos:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{si } a \geq 0 \quad \text{y} \quad n \text{ es un entero positivo.} \tag{9.25}$$

Si queremos que la ley (9.11) sea válida, debemos tener:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}},$$

y para ese propósito definimos

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{si} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad m, n \text{ son enteros, con } n > 0. \tag{9.26}$$

Como cualquier racional r se puede escribir como $\frac{m}{n}$ con m, n enteros y $n > 0$, la definición anterior le da significado a a^r para todo $a > 0$ y r racional. Más aún, con las propiedades de los radicales que vimos en la sección anterior, se probará en el resumen de este capítulo que se pueden extender las leyes de los exponentes para $a > 0$, $b > 0$ y p, q números racionales:

$$a^p a^q = a^{p+q} \tag{9.27}$$

$$a^p b^p = (ab)^p \tag{9.28}$$

$$(a^p)^q = a^{pq} \tag{9.29}$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \tag{9.30}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \tag{9.31}$$

Observación

Aunque $a^{\frac{m}{n}}$ puede tener sentido para $a < 0$ y algún $\frac{m}{n}$, las leyes de los exponentes pueden no ser válidas en ese caso; por ejemplo:

$$\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ y } (-1)^{2\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^1 = -1,$$

así,

$$\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \neq (-1)^{2\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Justificaremos ahora las propiedades (9.27) a (9.31) para exponentes racionales y reales $a, b > 0$.

En las pruebas que siguen escribimos $p = \frac{m}{n}$ y $q = \frac{r}{s}$, con m, n, r y s enteros y $n, s > 0$.

Propiedad (9.27): $a^p a^q = a^{p+q}$

Demostración:

$$a^p a^q = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} a^{\frac{nr}{ns}} \quad \text{y} \quad a^{p+q} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}}$$

Se probará que $a^{\frac{ms}{ns}} a^{\frac{nr}{ns}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}}$

Por la definición (9.26):

$$a^{\frac{ms}{ns}} a^{\frac{nr}{ns}} = \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms} \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{nr}.$$

Por la propiedad (9.20) para exponentes enteros, tenemos:

$$\left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms} \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{nr} = \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms+nr}.$$

Por otra parte, por la definición (9.26)

$$a^{\frac{ms+nr}{ns}} = \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms+nr}.$$

Así,

$$a^p a^q = a^{p+q}.$$

Propiedad (9.28): $a^p b^p = (ab)^p$.

Demostración: Por la definición (9.26)

$$a^p b^p = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \quad \text{y} \quad (ab)^p = (ab)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^m$$

Se probará que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^m$.

Al utilizar la propiedad (9.21) para exponentes enteros, tenemos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^m,$$

por la propiedad de los radicales (9.13):

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^m.$$

De donde:

$$a^p b^p = (ab)^p.$$

Propiedad (9.29): $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$.

Demostración: Por la definición (9.26) y la propiedad (9.15), tenemos:

$$\left(a^p\right)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^r} \quad \text{y} \quad a^{pq} = a^{\frac{mr}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{mr}}$$

Se probará que $\sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^r} = \sqrt[ns]{a^{mr}}$.

Por la propiedad (9.22) para exponentes enteros:

$$\sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mr}}.$$

Utilizando las propiedades (9.15) y (9.16):

$$\sqrt[ns]{a^{mr}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mr}};$$

así,

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}.$$

Propiedad (9.30): $a^{-p} = \dfrac{1}{a^P}$.

Demostración: Por la propiedad (9.27):

$$a^p a^{-p} = a^{p-p} = a^0 = 1;$$

así,

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Propiedad (9.31): $\left(\dfrac{a}{b}\right)^P = \dfrac{a^P}{b^P}$.

Demostración:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \quad \text{y} \quad \frac{a^p}{b^p} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$$

Se probará que $\sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$.

Por la propiedad (9.12):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}},$$

por la propiedad (9.14) y la definición (9.26):

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}.$$

O sea,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

EJEMPLOS

1. Simplificar $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ si $a \geq 0$.

Solución:

$$\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[5(2)]{a} = \sqrt[10]{a}.$$

2. Simplificar $\left(16x^{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ si $x \geq 0$.

Solución:

$$\left(16x^{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} x^{\frac{16}{4}} = \sqrt[4]{16}x^4 = 2x^4.$$

3. Simplificar $\left(27c^{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ si $c > 0$.

Solución:

$$\left(27c^{18}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(27c^{18}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}} c^{\frac{18}{3}}} = \frac{1}{3c^6}.$$

4. Simplificar $\left(\dfrac{9x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{9}}}{25z^8}\right)^{\frac{3}{2}}$ si $x, y, z > 0$.

Solución:

$$\left(\frac{9x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{9}}}{25z^8}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9^{\frac{3}{2}} x^{\frac{4}{3}\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{9}\frac{3}{2}}}{25^{\frac{3}{2}} z^{8\left(\frac{3}{2}\right)}} = \frac{27x^2y^{-\frac{1}{3}}}{125z^{12}} = \frac{27x^2}{125z^{12}y^{\frac{1}{3}}}.$$

5. Simplificar $\sqrt[3]{18a^2bc^5}\,\sqrt[3]{12ab^5c^4}$ si $a, b, c > 0$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{18a^2bc^5}\,\sqrt[3]{12ab^5c^4} &= \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2a^2bc^5\right)\left(2^2\cdot 3ab^5c^4\right)}\\ &= \sqrt[3]{2^3\cdot 3^3a^3b^6c^9}\\ &= 6ab^2c^3.\end{aligned}$$

■

Observación:

La ley de las raíces de potencias (9.15):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

es más fácil de manejar cuando la escribimos con exponentes racionales y usamos (9.29):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Por ejemplo, resolvamos el ejemplo (2) de la página 295:

Reducir $\sqrt[4]{25x^2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{25x^2} &= \sqrt[4]{25|x|^2} = \sqrt[4]{\left(5|x|\right)^2} = \left(\left(5|x|\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}\\ &= \left(5|x|\right)^{\frac{2}{4}} = \left(5|x|\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5|x|}\end{aligned}$$

9.5.1 Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^2+1}}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{b^4}}$

3. $\left(81(a+b)^4\right)^{\frac{1}{2}}$

4. $\left(64a^{24}c^{42}\right)^{-\frac{1}{6}}$

5. $\left(243x^{\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$

6. $\left(1024y^{\frac{25}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$

7. $\left(\dfrac{a^{5}b^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{4}{15}}}\right)^{\frac{3}{5}}$

8. $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{9}{2}}c^{4}}{c^{-4}}\right)^{\frac{2}{3}}$

9. $\left(\dfrac{c^{\frac{10}{3}}d^{-\frac{15}{12}}}{(243)^{\frac{1}{6}}c^{\frac{5}{2}}e^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{6}{5}}$

10. $\left(\dfrac{169a^{\frac{2}{5}}b^{-\frac{1}{10}}}{4a^{2}c^{6}}\right)^{\frac{5}{2}}$

11. $\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}}z^{-\frac{2}{3}}}{x^{-4}z^{2}}\right)^{-\frac{3}{4}}$

12. $\left(\dfrac{(729)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{8}}b^{\frac{9}{4}}}{(343)^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}}$

13. $\sqrt[5]{r^{3}s}\sqrt[5]{r^{2}s^{9}}$

14. $\sqrt[4]{64a^{3}b^{6}c^{7}}\sqrt[4]{4a^{5}b^{2}c^{5}}$

15. $\sqrt[5]{27x^{6}y^{9}z^{3}}\sqrt[5]{9x^{9}y^{6}z^{8}}$

16. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32a^{45}b^{30}c^{75}}}$

17. $\sqrt[3]{2a-6}\sqrt[3]{4a^{2}-24a+36}$

18. $\sqrt{x^{2}+2x-15}\sqrt{x^{2}-8x+15}$

19. $\dfrac{\sqrt[4]{x^{13}y^{18}z^{4}}}{\sqrt[4]{x^{5}y^{6}z^{3}}}$

20. $\sqrt[6]{256c^{20}d^{15}e^{7}}\sqrt[6]{16c^{10}d^{9}e^{5}}$

21. $\sqrt[8]{x^{2}-2\sqrt{2}x+2}\sqrt[8]{x^{2}-2\sqrt{2}x+2}$

9.6 Ecuaciones con radicales

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, el cubo de la distancia media de un planeta al Sol es igual al cuadrado del tiempo que tarda en dar una vuelta completa al Sol. La distancia se mide en unidades astronómicas (1 U.A. = distancia media de la Tierra al Sol) y el tiempo se mide en años terrestres.

¿Cuánto tarda Júpiter en dar la vuelta al Sol si sabemos que su distancia a éste es de 5.2 U.A.?

Johannes Kepler (1571-1630)
Astrónomo, matemático y físico alemán. En 1594 aceptó una plaza como profesor de matemáticas en Graz, lugar en el que trabajó sobre la forma elíptica de las órbitas planetarias. En 1619 publicó la que hoy conocemos como tercera ley de Kepler, en la que relaciona los periodos de revolución de los planetas con sus distancias medias al Sol.

Solución: Llamamos t al tiempo que tarda en dar la vuelta al Sol y a a su distancia media al Sol. La ecuación de la tercera ley de Kepler es entonces:

$$t^{2}=a^{3},$$

Sustituyendo $a=5.2$ en la ecuación obtenemos:

$$t^{2}=(5.2)^{3}$$
$$t=(5.2)^{\frac{3}{2}}=11.86.$$

Así, Júpiter tarda 11.86 años terrestres en dar la vuelta al Sol.

Observa que para resolver ecuaciones con exponentes racionales utilizamos las leyes de los exponentes (9.27) a (9.31).

EJEMPLOS

1. Resolver $\left(x^{\frac{2}{3}}-2\right)^{2}=4.$

Solución: Llamamos:

$$y=x^{\frac{2}{3}}-2. \qquad (9.32)$$

La ecuación puede escribirse como:

$$y^{2}=4.$$

Resolviendo la última ecuación obtenemos $y = 2$ o $y = -2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (9.32) obtenemos dos ecuaciones:

$$x^{\frac{2}{3}} - 2 = 2 \quad \text{y} \quad x^{\frac{2}{3}} - 2 = -2. \tag{9.33}$$

Ahora resolvemos la primera de ellas:

$$x^{\frac{2}{3}} - 2 = 2$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 4,$$

elevando al cubo ambos lados de la ecuación y despejando x tenemos:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^3$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \pm 8.$$

Como sólo hemos definido exponentes fraccionarios para bases no negativas, consideramos únicamente como solución $x = 8$, pues la expresión $(-8)^{\frac{2}{3}}$ no está definida.

Resolvemos la segunda de las ecuaciones en (9.33):

$$x^{\frac{2}{3}} - 2 = -2$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 0$$
$$x = 0.$$

Así que las soluciones del problema original son $x = 8$, $x = 0$.

Comprobación: Sustituimos $x = 8$ en la ecuación original:

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)^2 = \left(8^{\frac{2}{3}} - 2\right)^2 = \left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 - 2\right)^2 = (4 - 2)^2 = 4.$$

Sustituimos $x = 0$ en la ecuación original:

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)^2 = \left(0^{\frac{2}{3}} - 2\right)^2 = 2^2 = 4.$$

2. Una fábrica desea construir un tanque esférico de almacenamiento de 10 m^3 de capacidad. ¿Cuál debe ser el radio de dicho tanque?

Solución: La fórmula del volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

donde r es el radio de la esfera.

Sustituimos $V = 10$ y resolvemos la ecuación:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 10$$
$$r^3 = \frac{30}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{30}{4\pi}} = 1.336.$$

Así, el radio del tanque debe ser de 1.336 metros.

3. Resolver la ecuación $\sqrt{y+7} = y+1$.

Solución: Para resolver esta ecuación elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \sqrt{y+7} &= y+1 \\ \left(\sqrt{y+7}\right)^2 &= (y+1)^2 \\ y+7 &= y^2+2y+1 \\ 0 &= y^2+y-6 \\ 0 &= (y+3)(y-2). \end{aligned}$$

Las soluciones de la última ecuación son:

$$y = -3 \ \text{ o } \ y = 2.$$

y son las candidatas para ser las soluciones de la ecuación original.

Cuando resolvemos ecuaciones elevando al cuadrado hay que tener especial cuidado en comprobar el resultado, ya que algunas veces uno de los candidatos no sirve. En este caso veremos que $y = 2$ es la única solución.

Comprobación: Sustituimos $y = -3$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\sqrt{y+7} = \sqrt{-3+7} = 2$.
Lado derecho: $y+1 = -3+1 = -2$.

Este valor de y no satisface la ecuación. Pudimos desechar desde antes el valor $y = -3$ observando que $y+1$ es igual a $\sqrt{y+7}$, por lo que $y+1$ debe ser no negativo, lo que no es el caso si $y = -3$, ya que entonces $y+1 = -2 < 0$.

Sustituimos $y = 2$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\sqrt{y+7} = \sqrt{2+7} = 3$.
Lado derecho: $y+1 = 2+1 = 3$.

Este valor de y sí satisface la ecuación.

4. Resolver la ecuación $\sqrt{z+2} + \sqrt{2z+2} = \sqrt{6z+7}$.

Solución: Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \sqrt{z+2} + \sqrt{2z+2} &= \sqrt{6z+7} \\ z+2+2\sqrt{z+2}\sqrt{2z+2}+2z+2 &= 6z+7 \\ 3z+4+2\sqrt{z+2}\sqrt{2z+2} &= 6z+7. \end{aligned}$$

Ahora dejamos de un lado de la igualdad los términos que tienen radicales, elevamos nuevamente al cuadrado y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{z+2}\sqrt{2z+2} &= 3z+3 \\ 4(z+2)(2z+2) &= 9z^2+18z+9 \\ 8z^2+24z+16 &= 9z^2+18z+9 \\ 0 &= z^2-6z-7 \\ 0 &= (z-7)(z+1). \end{aligned}$$

Así,

$$z = 7 \quad \text{y} \quad z = -1.$$

Las dos son soluciones de la ecuación original, como comprobamos a continuación.

Comprobación: Sustituimos $z = 7$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\sqrt{z+2} + \sqrt{2z+2} = \sqrt{7+2} + \sqrt{2(7)+2} = 3 + 4 = 7.$

Lado derecho: $\sqrt{6z+7} = \sqrt{6(7)+7} = \sqrt{49} = 7.$

Sustituimos $z = -1$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $\sqrt{z+2} + \sqrt{2z+2} = \sqrt{-1+2} + \sqrt{2(-1)+2} = 1 + 0 = 1.$

Lado derecho: $\sqrt{6z+7} = \sqrt{6(-1)+7} = \sqrt{1} = 1.$

5. Resolver $6\sqrt{x+5} - 3 = 4\sqrt{x+5} + 17.$

Solución: Pasamos los términos que contienen radicales similares al primer miembro y el resto queda en el segundo.

$$6\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+5} = 17 + 3$$
$$2\sqrt{x+5} = 20,$$

es decir,

$$\sqrt{x+5} = 10.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para quitar la raíz cuadrada:

$$x + 5 = 100.$$

De donde $x = 95$.

Comprobación: Sustituimos $x = 95$ en la ecuación original:

$$6\sqrt{x+5} - 3 = 4\sqrt{x+5} + 17$$

y obtenemos:

$$6\sqrt{95+5} - 3 = 4\sqrt{95+5} + 17$$

que es verdadera pues los valores de los dos miembros son:

$$6\sqrt{95+5} - 3 = 6 \cdot 10 - 3 = 57$$
$$4\sqrt{95+5} + 17 = 4 \cdot 10 + 17 = 57.$$

En los últimos ejemplos, en cierto momento elevamos al cuadrado para poder despejar x. Hay que ser cuidadosos al hacer esto pues proceder de manera automática puede conducirnos a errores. También es aconsejable hacer siempre la comprobación. Por ejemplo, si se nos pide encontrar un número real que satisfaga la ecuación:

$$\sqrt{x} + 3 = 2,$$

observamos que esto equivale a encontrar un número real que satisfaga:

$$\sqrt{x} = -1 \tag{9.34}$$

pero tal número real no existe pues $\sqrt{x}$ es, por definición, mayor o igual que cero para cualquier x para la que esté definida esa raíz; por tanto, ya hemos dado respuesta al problema.

Si procedemos de forma automática a elevar al cuadrado cada miembro de (9.34) obtenemos:

$$x = (-1)^2 = 1,$$

que no es una respuesta correcta a nuestro problema, ya que este valor no es solución de la ecuación original:

$$\sqrt{1} + 3 = 4 \neq 2.$$

9.6.1 Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $\sqrt{8z} + 2 = 6$
2. $\sqrt[3]{x} - 8 = 0$
3. $\sqrt{w-7} + \sqrt{w} = 7$
4. $2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2}$
5. $\sqrt{3x^2+4} = 16$
6. $\sqrt[5]{y-8} = -3$
7. $\sqrt[3]{10z^2+6} = 2$
8. $\sqrt[6]{3a+2} = 2$
9. $\sqrt[3]{4x-8} = 2$
10. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$
11. $(3x+1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 0$
12. $(2x+1)^{\frac{3}{2}} - 27 = 0$
13. $3\sqrt{x} + 4 = x$
14. $\sqrt[7]{5y^3+8} = -1$
15. $\sqrt[6]{\dfrac{3x-4}{7}} = 2$
16. $\sqrt{11+z} = 3 + \sqrt{z}$
17. $\dfrac{\sqrt{w}+4}{\sqrt{w}-4} = \dfrac{\sqrt{w}+7}{\sqrt{w}-3}$
18. $\sqrt[8]{6a-7} + 3 = 2$
19. $\left(9t^2-45\right)^{1/4} = 3$
20. $\sqrt{a+3} = \sqrt{a-2} + 1$
21. $1 + \sqrt{y+2} = \sqrt{y+7}$
22. $\sqrt{2w+3} - \sqrt{w+5} = 1$
23. $\sqrt{x^2-3x+6} = x - 1$
24. $\sqrt{y+13} + \sqrt{y} = 13$
25. $(z-9)^{\frac{1}{4}} - 5 = -3$
26. $2\left(t^3-7\right)^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}$
27. $\left(b^4-25\right)^{\frac{1}{5}} = (56)^{\frac{1}{5}}$
28. $\sqrt{z-5} + \sqrt{3z-2} = \sqrt{6z-5}$
29. $\sqrt[3]{2w^2+13w+118} = 5$
30. $\sqrt{2x+2} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{11x+4}$
31. $\sqrt[4]{t^3-6t^2-16t+256} = 4$
32. $\sqrt[6]{20r^2+23r+722} - 28 = -25$
33. $\sqrt[3]{25y^2-54} - 19 = -16$
34. La siguiente tabla muestra la distancia de cada planeta del sistema solar al Sol; la distancia está dada en unidades astronómicas (U.A.). Una unidad astronómica, por definición, es la distancia media de la Tierra al Sol.

Planeta	Distancia media al Sol (U. A.)
Mercurio	0.387
Venus	0.723
Tierra	1
Marte	1.52
Júpiter	5.2
Saturno	9.54
Urano	19.18
Neptuno	30.06

El periodo de un planeta es el tiempo que tarda en dar la vuelta al Sol, medido en años terrestres. De acuerdo con la tercera ley de Kepler, el cuadrado del periodo de un cuerpo celeste que gira alrededor del Sol es igual al cubo de su distancia media al Sol.

Encuentra el periodo de cada planeta del sistema solar.

35. El cometa Halley tarda 76 años en dar una vuelta alrededor del Sol; encuentra su distancia media al Sol.
36. ¿Cuánto mide un cateto de un triángulo rectángulo, si el otro mide 5 cm y la hipotenusa mide 13 cm?
37. ¿Cuál es el perímetro de una circunferencia que tiene 25 m^2 de área?
38. ¿Cuál es el área de una esfera que tiene un volumen de 1 m^3?
39. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro que tiene un volumen de 1 m^3 y una altura de 2 metros?

40. ¿Cuál es la altura de un triángulo isósceles que tiene una base de 6 cm y los otros dos lados de 5 cm cada uno?

41. ¿Cuál es el apotema de un hexágono que tiene un perímetro de 12 cm?

42. ¿Cuál es el radio de un cono que tiene un volumen de 8 m^3 y una altura de 2 metros?

43. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo equilátero que tiene una altura de 4 cm?

44. La pirámide de Keops en Egipto, cuya base es cuadrada, ocupa una superficie de 56,169 m^2. ¿Cuál es la longitud de uno de los lados de la base?

45. Un recipiente de almacenamiento de agua tiene forma de prisma rectangular. Su ancho mide $\frac{1}{6}$ de su largo, su altura es de 1 metro y tiene una capacidad de 150 m^3. ¿Cuáles son las dimensiones del recipiente?

46. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros es igual a 345. Si el menor es igual a 4, ¿cuál es el mayor?

9.7 Los números complejos

9.7.1 Ecuaciones sin solución en $\mathbb{R}$

Dar una ecuación en una variable que no sea satisfecha por ningún número real.

Solución: Debemos recordar que para todo número real x se cumple que $x^2 \geq 0$. Por tanto, ningún número real satisface la ecuación:

$$x^2 = -1. \tag{9.35}$$

Más en general, si r es un número positivo, entonces $-r$ es negativo y la ecuación:

$$x^2 = -r$$

no tiene solución en los números reales por la misma razón que dimos en nuestro ejemplo inicial.

Las ecuaciones anteriores son casos simples de las llamadas ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas en una variable, con coeficientes reales, las cuales, en general, tienen la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, y que estudiaremos más adelante.

Por lo antes visto concluimos que hay ecuaciones cuadráticas en una variable y con coeficientes reales que no tienen solución en $\mathbb{R}$.

Hay unos números, llamados *números complejos,* que forman un sistema numérico que denotamos por $\mathbb{C}$. Este sistema comparte muchas propiedades algebraicas con los números reales; más específicamente, en $\mathbb{C}$ son válidas las propiedades fundamentales de la suma y el producto enunciadas para los números reales. Además, en $\mathbb{C}$ es posible encontrar soluciones a ecuaciones para las que los números reales resultan insuficientes; ejemplos de tales ecuaciones son:

- $x^2 = -1$, o más en general
- $x^2 = -r$, donde r es un real positivo.

9.7.2 Definición del sistema de los números complejos. El número *i*

Los números complejos contienen propiamente a los números reales, en símbolos:

$$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Leonardo Euler (1707-1783)
El uso de la letra *i* para representar una unidad imaginaria, la raíz de −1, se debe a este matemático suizo que nació en Basilea y murió en San Petersburgo. Euler es considerado uno de los matemáticos más fecundos de todos los tiempos, pues escribió tratados sobre todas las ramas de esta ciencia. Publicó más de 500 libros y artículos que, repartidos durante toda su vida, dan un promedio de 800 páginas por año.

El número i es un número complejo que no es un número real y tiene la propiedad de que es solución de la ecuación $x^2 = -1$; es decir,

$$i^2 = -1.$$

Así, el número complejo i resuelve la ecuación (9.35).

Como hemos dicho, todo número real y el número i pertenecen a $\mathbb{C}$, y los números complejos se pueden sumar y multiplicar; en particular:

$$0i = 0$$
$$abi = aib = iab$$
$$0 + z = z.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$.

En general, cualquier número complejo se escribe de la siguiente manera:

$$a + bi,$$

donde a y b son dos números reales cualesquiera.

Si $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces el número real a se conoce como la *parte real* y b como la *parte imaginaria* del complejo z. Escribimos:

$$\text{Re}(z) = a \quad \text{e} \quad \text{Im}(z) = b$$

Debemos observar que la parte real y la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

Escribimos:

$$a + bi = c + di \quad \text{si} \quad a = c \text{ y } b = d;$$

es decir, dos complejos son iguales si sus partes reales y sus partes imaginarias coinciden entre sí:

Podemos escribir en símbolos:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R} \quad \text{donde} \quad i^2 = -1 \right\}$$

Los siguientes son números complejos:

- $3 + (-2)i$.
- $\sqrt{3} + \pi i$.
- $0 + 0i = 0$.

Si b es un real, entonces escribimos $(-b)i$ como $-bi$. Así,

- $3 + (-2)i = 3 - 2i$.
- $-(1)i = -i$.

Cuando la parte real de un complejo $z \neq 0$ es 0, es decir, cuando $z = bi$, donde b es un real distinto de 0, entonces decimos que el complejo es *imaginario puro*. Ejemplos de imaginarios puros son:

- i.
- $-i$.
- $\frac{1}{2}i$.

En tanto que los siguientes no son imaginarios puros:

- $1+i$.
- 0.
- -3.

Escribimos:

$$\mathbb{R}i = \{bi \; : \; b \in \mathbb{R}\}$$

para denotar al conjunto de los imaginarios puros, entonces,

$$\mathbb{R}i \subsetneq \mathbb{C}$$

9.8 Operaciones con números complejos

La operaciones de suma, resta y multiplicación de números complejos siguen las reglas que conocemos para operar con los números reales y las expresiones algebraicas; además, debemos tener presente que $i^2 = -1$.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces definimos:

Suma y resta de números complejos

$$\begin{aligned} z + w &= (a+c) + (b+d)i, \\ z - w &= (a-c) + (b-d)i, \end{aligned}$$

es decir, sumamos o restamos, según sea el caso, las partes reales y las partes imaginarias.

Producto de números complejos

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + bdi^2 + (ad+bc)i \\ &= ac - bd + (ad+bc)i \end{aligned}$$

En resumen:

$$z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i. \tag{9.36}$$

También se puede escribir zw, en lugar de $z \cdot w$.

Observación:

La parte real de $z \cdot w$:

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = ac - bd$$

es el producto de las partes reales menos el producto de las partes imaginarias.
La parte imaginaria de $z \cdot w$:

$$\operatorname{Im}(z \cdot w) = ad + bc$$

es la suma de la parte real de uno de los números complejos por la imaginaria del otro.

EJEMPLOS

1. Calcular zw si $z = 2 + 6i$ y $w = -2 + 3i$.

Solución: Conforme a la fórmula (9.36) obtenemos:

$$zw = (2)(-2) - (6)(3) + \big((2)(3) + (6)(-2)\big)i = -4 - 18 + (6 - 12)i.$$

Así,

$$zw = -22 - 6i.$$

También pudimos hacer las operaciones siguiendo las reglas para manejar expresiones algebraicas, recordando que $i^2 = -1$, como ahora lo hacemos:

$$\begin{aligned} zw &= (2+6i)(-2+3i) = (2)(-2) + (2)(3i) + (6i)(-2) + (6i)(3i) \\ &= -4 + 18i^2 + 6i - 12i = -4 - 18 - 6i = -22 - 6i. \end{aligned}$$

2. Sumar $z = 2 + 6i$ y $w = -2 + 3i$.

Solución:

$$z + w = (2 + 6i) + (-2 + 3i) = 2 - 2 + 6i + 3i.$$

Así,

$$z + w = 9i.$$

3. Encontrar $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ si $z = (-1 + 2i)(9 + 12i)$.

Solución:

$$(-1 + 2i)(9 + 12i) = -(9 + 12i) + 2i(9 + 12i) = -9 - 12i + 18i - 24.$$

O sea,

$$z = -33 + 6i.$$

Por tanto,

$$\text{Re}(z) = -33 \quad \text{e} \quad \text{Im}(z) = 6.$$

9.9 Raíces cuadradas de números reales negativos

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 = -4$.

Solución: Buscamos un número complejo $z = a + ib$ tal que:

$$z^2 = (a + bi)^2 = -4,$$

o lo que es lo mismo, a y b deben ser dos números reales tales que:

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -4 + 0i.$$

Por tanto,

$$a^2 - b^2 = -4$$
$$2ab = 0.$$

De la última igualdad concluimos que $a = 0$, o bien, $b = 0$. Analizamos cada caso:

- Si $b = 0$, entonces al sustituir en $a^2 - b^2 = -4$ obtenemos $a^2 = -4$, y como sabemos, no hay ningún número real a que satisfaga esta ecuación. Por tanto, consideramos la segunda opción:
- Si $a = 0$, entonces $a^2 - b^2 = -4$ se transforma en $-b^2 = -4$; es decir, $b^2 = 4$, la cual tiene como soluciones: $b = 2$ y $b = -2$. Por tanto, hay dos números complejos:

  $$z = 2i \text{ y } w = -2i$$

  que satisfacen $z^2 = -4$, como comprobamos a continuación:

  $$(2i)^2 = (2i)(2i) = (2)^2(i)^2 = 4(-1) = -4$$
  $$(-2i)^2 = (-2i)(-2i) = (-2)^2(i)^2 = 4(-1) = -4.$$

  Reservamos el símbolo $\sqrt{-4}$ para $2i$ que podemos escribir como $\sqrt{4}i$; o sea,

  $$\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

En general, si $a > 0$ entonces reservamos el símbolo $\sqrt{-a}$ para $\sqrt{a}i$; es decir,

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i \text{ si } a > 0.$$

Si $a > 0$, entonces $-a < 0$ y tiene dos raíces complejas, es decir, hay dos números complejos: $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ y $-\sqrt{-a} = -\sqrt{a}i$ que satisfacen la ecuación:

$$z^2 = a.$$

En efecto.

$$\left(\sqrt{-a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}i\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2(i)^2 = a(-1) = -a$$
$$\left(-\sqrt{-a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}i\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2(i)^2 = a(-1) = -a.$$

EJEMPLOS

1. $\sqrt{-9} = 3i$.
2. $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$.
3. $-\sqrt{-25} = -5i$.

Algunos autores prefieren no usar el símbolo $\sqrt{-a}$ cuando $a > 0$, pues puede inducir a errores debido a que $\sqrt{-a}$, con $a > 0$, no satisface las propiedades que vimos para los radicales cuando el radical es positivo; por ejemplo:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} \tag{9.37}$$

ya que:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1;$$

en tanto que:

$$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

La expresión (9.37) muestra que $\sqrt{-1}$ no satisface la propiedad (9.13) que era satisfecha por $\sqrt[n]{a}$ con $a > 0$ y n entero positivo (en particular cuando $n = 2$).

9.9.1 Ejercicios

Efectúa las sumas y reduce a la forma a + bi.

1. $\left(2\sqrt{3}+7i\right)+\left(5+i\sqrt{2}\right)$
2. $\left(-5+i4\sqrt{5}\right)+\left(5-i4\sqrt{5}\right)$
3. $-6i+15i$
4. $(5+i)+(7+4i)$
5. $(8+3i)+(9+3i)$
6. $(-4+9i)-(3-8i)$
7. $(12-i)+(12+i)$
8. $(12+7i)-(12-7i)$
9. $(2+6i)-(4+10i)$
10. $(1+12i)+(15+7i)$
11. $20i+(-20+4i)$
12. $\left(8+\sqrt{2}i\right)+\left(3-3\sqrt{2}i\right)$
13. $7+\left(5-\sqrt{3}i\right)$
14. $\left(5\sqrt{3}-i\right)+\left(i+5\sqrt{3}\right)$
15. $(14-8i)+(-27+12i)$

Efectúa los productos y reduce a la forma a + bi.

16. $(5-2i)(4-6i)$
17. $(-7-i)(-i)$
18. $(9+8i)(-4-11i)$
19. $(9i-11)(-9i+11)$
20. $\left(\sqrt{7}-3i\right)\left(\sqrt{7}+3i\right)$
21. $\left(12-\sqrt{8}i\right)\left(4-\sqrt{2}i\right)$
22. $\left(\frac{5}{4}+6i\right)\left(3+\frac{3}{2}i\right)$
23. $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{2}i\right)$
24. $(14-8i)(2+10i)$
25. $(11-5i)(9-13i)$
26. $(-10-7i)(-5-12i)$
27. $(-15-8i)(1+15i)$
28. $(12+5i)(12-5i)$
29. $(11-6i)(11-6i)$
30. $(35+9i)\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}i\right)$

En los ejercicios 31 a 42, encuentra la parte real y la parte imaginaria de los números complejos.

31. $(5-4i)+(-3-6i)$
32. $(8+12i)+(25+14i)$
33. $(7+3i)(-8+5i)$
34. $(-6+9i)(-20-4i)$
35. $\left(\frac{3}{2}-i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{i}{4}\right)$
36. $\left(\frac{4}{7}+5i\right)\left(\frac{1}{2}-i\right)$
37. $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}i\right)$
38. $\left(9-\sqrt{6}i\right)\left(9+\sqrt{6}i\right)$
39. $\left(-\frac{1}{8}-7i\right)\left(\frac{1}{8}+7i\right)$
40. $\left(\frac{3}{5}-\sqrt{3}i\right)+\left(\frac{3}{5}+\sqrt{3}i\right)$
41. $(10+13i)(10-13i)$
42. $(-21+4i)+(-21-4i)$

43. Prueba que la parte imaginaria de $(a+bi)i$ es la parte real de $a+bi$ si $a, b \in \mathbb{R}$.
44. Prueba que la parte real de $(3-i)\left(5+\sqrt{2}i\right)$ no es el producto de las partes reales de $(3-i)$ y $\left(5+\sqrt{2}i\right)$.
45. Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a. $\sqrt{-36}$.
b. $-\sqrt{-\pi}$.
c. $\sqrt{-x^2-1}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Resumen

- Un número positivo x tiene dos raíces cuadradas distintas: $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$.
- El cero tiene una sola raíz cuadrada, ya que: $\sqrt{0}=0=-\sqrt{0}$.
- Los números negativos no tienen raíz cuadrada en los números reales.
- Si $a \geq 0, b \geq 0$, entonces $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ y n es un número entero positivo, entonces $\sqrt{a^{2n}}=|a|^n$.
- Si $a > 0, b > 0$ y n es un número entero positivo, entonces $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.
- Si $a \geq 0, b > 0$ y n es un número entero positivo, entonces $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
- Si $a \geq 0$ y m, n son números enteros positivos, entonces $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.
- Si $a \geq 0$ y m, n son números enteros positivos, entonces $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

- $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$, n es un entero positivo.
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$ y n es un entero positivo.
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ si $a > 0$ y m, n son enteros, con $n > 0$.
- Si $a > 0, b > 0$ y p, q números racionales:
  1. $a^p a^q = a^{p+q}$.
  2. $a^p b^p = (ab)^p$.
  3. $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$.
  4. $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$.
  5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.
- Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $z + w = (a + c) + (b + d)i$.
- Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i$.

9.10 EJERCICIOS DE REPASO

Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\sqrt{900}$
2. $\sqrt{1584}$
3. $\sqrt{4704}$
4. $\sqrt{75}\sqrt{147}$
5. $\sqrt{80}\sqrt{40}\sqrt{18}$
6. $\sqrt{84}\sqrt{21}$
7. $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{3}x + 12}$
8. $\sqrt{256x^{10}y^6z^{14}}$
9. $\sqrt{25x^2 - 50\sqrt{2}x + 50}$
10. $\dfrac{\sqrt[7]{x^{29}y^{12}z^{37}}}{\sqrt[7]{x^8y^{33}z^2}}$
11. $\dfrac{\sqrt[4]{a^6b^{32}c^{-5}}}{\sqrt[4]{a^{-2}b^4c^{19}}}$
12. $\dfrac{\sqrt[5]{u^{14}v^{28}w^{22}}}{\sqrt[5]{u^{-6}v^{13}w^{-8}}}$

Racionaliza las siguientes expresiones.

13. $\dfrac{6}{5 + \sqrt{2}}$
14. $\dfrac{4b + 5}{\sqrt{16b^2 - 25}}$
15. $\dfrac{36x^2 - 81}{\sqrt{6x - 9}}$
16. $\dfrac{4}{\sqrt{28} + \sqrt{20}}$
17. $\dfrac{4a + 4}{\sqrt{5a + 2} - \sqrt{9a + 6}}$
18. $\dfrac{64y^2 - 4}{\sqrt{10y + 8} + \sqrt{2y + 6}}$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

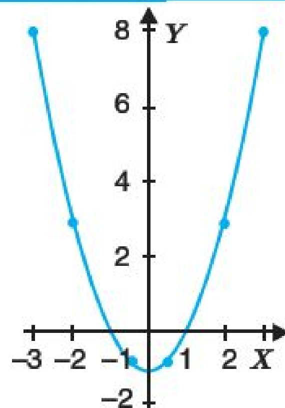
19. $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = x + 2$
20. $\sqrt{a^2 + a - 41} = a - 5$
21. $\sqrt{x + 4} = x - 8$
22. $\sqrt{z^2 - 3z - 1} = 2z - 7$
23. $\sqrt{a^2 - 5a + 1} - a = 8$
24. $\sqrt{2b + 51} = 3 + \sqrt{2b + 6}$

25. Un número menos su raíz cuadrada es igual a 30. ¿Cuál es dicho número?
26. Encuentra dos números enteros pares consecutivos positivos cuya media geométrica sea $4\sqrt{5}$. Recuerda que la media geométrica de dos números positivos a y b es $\sqrt{ab}$.
27. Un número menos su raíz cuadrada es igual a 20. ¿Cuál es dicho número?
28. La sombra de un poste de 8 metros de alto mide 15 metros. ¿Qué distancia hay del extremo del poste al punto final de la sombra?
29. Las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo son $P(-5, 4)$ $Q(3, -2)$ y $R(3, 4)$. Calcula las longitudes de los lados del triángulo.

capítulo

10

Ecuación general de segundo grado



10.1 Cómo completar cuadrados
10.2 Solución de la ecuación general de segundo grado
10.3 Aplicaciones
10.4 Desigualdades de segundo grado
10.5 Ejercicios de repaso

En la vida práctica, cuando es necesario resolver una ecuación de segundo grado que surgió de un problema concreto, la mayor parte de las veces dicha ecuación no es de fácil resolución. En este capítulo analizaremos este tipo de ecuaciones hasta obtener una fórmula que nos permita llegar a la resolución de una manera sistemática.

10.1 Cómo completar cuadrados

En el capítulo 7 aprendimos a resolver ciertas ecuaciones de segundo grado; es decir, aquellas de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$, cuando es relativamente fácil factorizar el miembro izquierdo como producto de dos expresiones de primer grado. Este método suele ser el más efectivo cuando podemos ver rápidamente cómo factorizar la ecuación de segundo grado. Sin embargo, hay ocasiones en las que la ecuación es suficientemente compleja como para no poder ver a simple vista su factorización.

Ahora veremos un método de resolución de ecuaciones de segundo grado que nos conducirá más adelante a la resolución general de dichas ecuaciones.

Pedro y su hijo Felipe pueden cosechar una canasta de manzanas en 10 minutos. Felipe tarda 4 minutos más que Pedro en cosechar una canasta de manzanas. ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en cosechar una canasta de manzanas?

Solución: Llamemos P a la potencia de Pedro; es decir, a la cantidad de trabajo (cosechar una canasta) que puede realizar Pedro por unidad de tiempo, y x al tiempo que tarda en cosechar una canasta:

$$P=\frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}=\frac{1\text{ canasta}}{x},$$

y F a la potencia de Felipe, y y al tiempo que tarda en cosechar una canasta:

$$F=\frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}=\frac{1\text{ canasta}}{y}.$$

La potencia de ambos es:

$$P+F=\frac{1\text{ canasta}}{10\text{ minutos}},$$

así que,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}. \tag{10.1}$$

Sabemos que Felipe tarda 4 minutos más que Pedro en cosechar una canasta; es decir,

$$y=x+4.$$

Sustituyendo esto último en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{10}.$$

Efectuamos las operaciones necesarias para eliminar los denominadores:

$$\begin{aligned}\frac{x+4+x}{x(x+4)}&=\frac{1}{10}\\ 10(2x+4)&=x^2+4x\\ x^2-16x-40&=0.\end{aligned}$$

La última ecuación no es fácil de factorizar, pues no hay dos números enteros cuyo producto sea -40 y cuya suma sea -16. Busquemos entonces un número que complete a:

$$x^2-16x$$

de manera que sea un trinomio cuadrado perfecto. El número que le hace falta es $\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$. Si pasamos el 40 al lado derecho de la ecuación y sumamos 64 en ambos lados, ésta no se altera y obtenemos:

$$\begin{aligned}x^2-16x&=40\\ x^2-16x+64&=40+64\\ (x-8)^2&=104.\end{aligned}$$

Ya sabemos resolver esta ecuación:

$$\begin{aligned}|x-8|&=\sqrt{104}\\ x-8&=\pm\sqrt{104}\\ x&=8\pm\sqrt{104},\end{aligned}$$

con lo que obtenemos $x_1\approx 8+10.20=18.20$ y $x_2\approx 8-10.20=-2.20$.

Como x representa el tiempo que Pedro tarda en cosechar una canasta, sólo tiene sentido la respuesta $x=18.20$ minutos. El tiempo que tarda Felipe es $18.20+4=22.20$ minutos.

Comprobación: Sustituyendo $x=18.20$ y $y=22.20$ en la ecuación (10.1), obtenemos:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18.20}+\frac{1}{22.20}=0.099\approx\frac{1}{10}.$$

En la solución del ejemplo anterior utilizamos el:

Método de completar el cuadrado

El método de completar el cuadrado consiste en transformar un binomio de la forma $x^2 + cx$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto, es decir, para que tenga una de las siguientes formas:

$$x^2 + 2xb + b^2 = (x+b)^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 2xb + b^2 = (x-b)^2.$$

Para conseguir esto desarrollamos los siguientes pasos:

- Observa que ya tenemos el cuadrado del primer término; es decir, x^2.
- Ahora observamos el término en cx, el cual debe ser el doble producto del primero (x) por el segundo (b): $2xb$; es decir,

  $$cx = 2xb.$$

  Entonces el segundo término del binomio buscado es $b = \frac{c}{2}$.
- El tercer término del trinomio es el cuadrado b^2 del segundo término; es decir,

  $$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

  Por tanto, el trinomio cuadrado perfecto es:

  $$x^2 + cx + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2.$$

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $x^2 - 6x - 3 = 0$.

   Solución: Buscamos un número que complete a $x^2 - 6x$ como trinomio cuadrado perfecto: dicho número es $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$, así que:

   $$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2.$$

   En la ecuación original, pasamos el término independiente del otro lado y sumamos 9 en ambos lados de la ecuación:

   $$x^2 - 6x - 3 = 0$$
   $$x^2 - 6x = 3$$
   $$x^2 - 6x + 9 = 3 + 9$$
   $$(x-3)^2 = 12.$$

   Sacando raíz cuadrada de ambos lados, obtenemos:

   $$|x-3| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

   Así que las dos soluciones son:

   $$x_1 = 3 + 2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{3}.$$

   Comprobación: Sustituimos $x = 3 + 2\sqrt{3}$ en la ecuación original y obtenemos:

   $$x^2 - 6x - 3 = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(3 + 2\sqrt{3}\right) - 3 = 9 + 12\sqrt{3} + 12 - 18 - 12\sqrt{3} - 3 = 0.$$

Sustituimos $x = 3 - 2\sqrt{3}$ en la ecuación original y obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 3 &= \left(3 - 2\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(3 - 2\sqrt{3}\right) - 3 \\ &= 9 - 12\sqrt{3} + 12 - 18 + 12\sqrt{3} - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Resolver la ecuación $8z + 1 = -2z^2$.

Solución: Para resolver esta ecuación primero dejamos en un lado de la igualdad los términos que tienen z y antes de intentar completar el cuadrado factorizamos el coeficiente de z^2:

$$\begin{aligned} 8z + 1 &= -2z^2 \\ 2z^2 + 8z &= -1 \\ 2\left(z^2 + 4z\right) &= -1. \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado dentro del paréntesis; es decir, debemos sumar $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$:

$$z^2 + 4z + 4 = (z + 2)^2.$$

Pero como todo lo que está dentro del paréntesis está multiplicado por 2, del otro lado de la ecuación hay que sumar $2(4) = 8$, con lo cual la ecuación queda así:

$$\begin{aligned} 2(z + 2)^2 &= -1 + 8 \\ |z + 2| &= \sqrt{\frac{7}{2}}, \end{aligned}$$

entonces hay dos soluciones:

$$z + 2 = \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \text{o} \quad z + 2 = -\sqrt{\frac{7}{2}},$$

por tanto, tenemos:

$$z = -2 + \sqrt{\frac{7}{2}} \quad \text{o} \quad z = -2 - \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Comprobación: Sustituimos $z = -2 + \sqrt{\frac{7}{2}}$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $8z + 1 = 8\left(-2 + \sqrt{\frac{7}{2}}\right) + 1 = -15 + 8\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Lado derecho:
$$\begin{aligned} -2z^2 &= -2\left(-2 + \sqrt{\tfrac{7}{2}}\right)^2 \\ &= -2\left(4 - 4\sqrt{\tfrac{7}{2}} + \tfrac{7}{2}\right) = -15 + 8\sqrt{\tfrac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Sustituimos $z = -2 - \sqrt{\frac{7}{2}}$ en la ecuación original:

Lado izquierdo: $8z + 1 = 8\left(-2 - \sqrt{\frac{7}{2}}\right) + 1 = -15 - 8\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Lado derecho:
$$\begin{aligned} -2z^2 &= -2\left(-2 - \sqrt{\tfrac{7}{2}}\right)^2 \\ &= -2\left(4 + 4\sqrt{\tfrac{7}{2}} + \tfrac{7}{2}\right) = -15 - 8\sqrt{\tfrac{7}{2}}. \end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación $3y^2 - 5y = 8$.

Solución: Factorizamos el coeficiente de y^2 y completamos el cuadrado:

$$3y^2 - 5y = 8$$

$$3\left(y^2 - \frac{5}{3}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = 8 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$3\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = 8 + \frac{25}{12}$$

$$\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$$

$$\left|y - \frac{5}{6}\right| = \frac{11}{6}.$$

Entonces hay dos soluciones:

$$y - \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \quad \text{o} \quad y - \frac{5}{6} = -\frac{11}{6}.$$

Despejando y de estas dos ecuaciones tenemos:

$$y = \frac{8}{3} \quad \text{o} \quad y = -1.$$

Comprobación: Sustituimos $y = \frac{8}{3}$ en la ecuación original:

$$3y^2 - 5y = 3\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{24}{3} = 8.$$

Sustituimos $y = -1$ en la ecuación original:

$$3y^2 - 5y = 3(-1)^2 - 5(-1) = 8.$$

4. Resolver la ecuación $5w^2 + 10w + 7 = 0$.

Solución:

$$5w^2 + 10w + 7 = 0$$

$$5w^2 + 10w = -7$$

$$5(w^2 + 2w) = -7$$

$$5(w^2 + 2w + 1) = -7 + 5$$

$$(w + 1)^2 = -\frac{2}{5}.$$

En este caso llegamos a la conclusión de que un cuadrado es igual a un número negativo, y como cualquier número real elevado al cuadrado siempre es mayor o igual a cero, entonces esta ecuación no tiene solución real; es decir, no existe ningún número real w que satisfaga la ecuación original.

10.1.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 36, resuelve las ecuaciones completando el cuadrado.

1. $y^2 + 16y - 36 = 0$

2. $x^2 - 8x - 9 = 0$

3. $z^2 + 2z - 5 = 30$

4. $w^2 - 5w = -4$

5. $y^2 - 10y - 24 = 0$

6. $a^2 + 6a + 6 = 40$

7. $z^2 + \frac{z}{5} - \frac{1}{20} = 0$

8. $w^2 - \frac{w}{3} - \frac{2}{3} = 0$

9. $x^2 + \frac{x}{2} = \frac{31}{16}$

10. $y^2+7y+1=0$
11. $4w^2-16w+7=0$
12. $x^2+18x=-81$
13. $3a^2-2a-5=0$
14. $6x^2=4x+6$
15. $10a^2-20a+8=0$
16. $z^2=14z-13$
17. $-4s^2+3s+1=0$
18. $2+y-6y^2=0$
19. $z^2-2\sqrt{2}z-7=0$
20. $y^2+\sqrt{3}y=1$
21. $w^2+\sqrt{6}w-3=0$
22. $3x^2-6\sqrt{7}x+5=0$
23. $8a^2+8\sqrt{10}a-16=0$
24. $7z^2-14\sqrt{8}z-8=0$
25. $a^2-2a+5=0$
26. $s^2+s-1=0$
27. $z^2-24z=-144$
28. $3z^2+7z=-2$
29. $9x^2-24x=-16$
30. $8w^2+4w-6=0$
31. $\frac{3a+5}{a+4}+\frac{2a-5}{a-2}=\frac{23}{5}$
32. $\frac{x+6}{x-6}-\frac{x-6}{x+6}=-\frac{24}{5}$
33. $\frac{z+8}{z-8}+\frac{z-8}{z+8}=\frac{4}{3}$
34. $\frac{4w+2}{w+3}-\frac{5w-6}{w-2}=-\frac{20}{3}$
35. $(y+1)+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{2}$
36. $\frac{1}{x+2}+x+2=2$

37. El cuadrado de un número menos el número es igual a 20. ¿Cuál es dicho número?

38. Con una cartulina cuadrada se construye una charola cortando en cada esquina un cuadrado de 3 cm de lado y doblando después hacia arriba los lados. ¿Qué tamaño tenía la cartulina original si la charola tiene un volumen de 192 cm^3?

39. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 95 en dicho sistema sea 137?

40. Una fuente en forma rectangular tiene 16 metros de largo y 9 metros de ancho. Se quiere transformar la fuente para que tenga forma cuadrada pero que siga teniendo la misma superficie. ¿Cuánto se debe disminuir el largo y cuánto se debe aumentar el ancho?

41. Si se deja caer una roca de una barranca de 122.5 metros de profundidad, ¿cuánto tiempo tarda en llegar al fondo? Recuerda que la fórmula de la caída libre es $d=\frac{1}{2}gt^2$, donde $g=9.8$ m/seg^2.

42. El cuadrado de la suma de dos enteros pares consecutivos es igual a la suma de los cuadrados de cada entero más 240. ¿Cuáles son dichos números?

43. Encuentra dos números enteros consecutivos pares y positivos cuya media geométrica sea $8\sqrt{15}$. (Véase el ejercicio 26 de la página 315, respecto a la media geométrica.)

44. Veinticuatro más un noveno del cuadrado de un número es igual a diez tercios del número. ¿Cuál es dicho número?

45. La suma de dos números es 42 y la suma de sus cuadrados es 1332. ¿Cuáles son dichos números?

46. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 5 cm más el doble del otro. Si la hipotenusa mide 85 cm, ¿cuántos centímetros mide cada uno de los catetos?

47. Encuentra un número que sumado con su raíz cuadrada sea igual a 12.

48. Un número menos su raíz cuadrada es igual a 132. ¿Cuál es dicho número?

49. Un número de dos cifras es tal que si le sumamos 18 es igual al número original con las cifras invertidas. Si dividimos el número entre el producto de sus cifras, el cociente es igual a 3. ¿Cuál es dicho número?

50. Encuentra dos números enteros consecutivos pares tales que su media armónica sea $\frac{48}{7}$. Recuerda que la media armónica de dos números a y b es:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

10.2 Solución de la ecuación general de segundo grado

Resolvamos el siguiente problema escrito en verso:

Unas niñas muy precoces
al cuadrado se elevaron.
Y como eran muy audaces
por dos se multiplicaron.
Que ya eran muchas sintieron
y por eso se restaron
doce veces lo que fueron.

Las que al principio empezaron
con esto se contentaron
y treinta y dos ahora son.
Ahora quiero que me digas
sin miedo y sin compasión,
¿cuántas eran al principio
de este cuento juguetón?

Alejandro Bravo
Margarita Espinosa

Solución: Llamamos x al número total de niñas.

Planteamos la ecuación:

$$2x^2 - 12x = 32. \qquad (10.2)$$

Podemos resolverla completando el cuadrado:

$$2x^2 - 12x = 32$$
$$x^2 - 6x = 16.$$

En el último paso hemos factorizado el coeficiente (2) de x^2 pues así es más fácil completar el trinomio cuadrado perfecto. Para completar $x^2 - 6x$ hay que sumar $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$ al miembro de la izquierda, así:

$$x^2 - 6x + 3^2 = (x-3)^2,$$

y del lado derecho de la ecuación hay que sumar $(3)^2 = 9$, por lo que la ecuación queda así:

$$(x-3)^2 = 16 + 9$$
$$(x-3)^2 = 25$$
$$|x-3| = 5,$$

entonces,

$$x - 3 = 5 \quad \text{o} \quad x - 3 = -5.$$

De donde obtenemos dos soluciones:

$$x = 8 \quad \text{o} \quad x = -2.$$

Sólo una de las dos soluciones es válida: la positiva; así, el número de niñas es 8.

La resolución de ecuaciones de segundo grado se remonta a cerca de 2000 años antes de Cristo. En el siglo IX, el matemático hindú Shridhara fue uno de los primeros en dar una regla general para resolver una ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$4a\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$
$$4a\left(ax^2 + bx + c\right) + b^2 = b^2$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Comprobación: Sustituimos $x = 8$ en la ecuación (10.2):

$$2x^2 - 12x = 2(8)^2 - 12(8) = 128 - 96 = 32.$$

En la práctica, cuando tenemos que resolver una ecuación de segundo grado que surgió de un problema concreto, la mayoría de las veces la ecuación resultante no puede resolverse mediante algún método simple de factorización, por lo que tenemos que echar mano del método de completar el trinomio cuadrado perfecto. Este método es laborioso y podemos cometer muchos errores en el camino si no procedemos con cuidado. Apliquemos este método a una ecuación general de segundo grado para obtener una fórmula que nos permita hallar la solución.

Supongamos que:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (10.3)$$

es una ecuación de segundo grado en x, donde a, b y c son números dados y $a \neq 0$. Para resolverla por el método de completar el cuadrado, pasamos el término independiente del otro lado de la ecuación y factorizamos el coeficiente de x^2.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$
$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

El número que completa a $x^2 + \frac{b}{a}x$ como trinomio cuadrado perfecto es $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, así:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como estamos sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ del lado izquierdo, hay que sumar lo mismo del lado derecho, por lo que la ecuación queda así:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Efectuando la suma de la derecha obtenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

así que,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Con lo cual obtenemos las soluciones:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (10.4)$$

Podemos escribir brevemente lo anterior como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión anterior se llama *solución general de la ecuación general de segundo grado.*

Observaciones:

Para que la expresión anterior tengan sentido:

- El coeficiente a debe ser distinto de cero para poder dividir entre él. Esto realmente no causa problema, ya que si $a = 0$, la ecuación (10.3) es una ecuación de primer grado:

$$bx + c = 0$$

que se resuelve fácilmente.

- La expresión $b^2 - 4ac$ que está dentro del radical se llama *discriminante* y debe ser mayor o igual a cero, ya que de otro modo no podemos obtener una raíz cuadrada que sea un número real. Cuando en una ecuación obtengamos que $b^2 - 4ac < 0$, esto significa que la ecuación (10.3) no tiene solución en los números reales.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Solución: Aplicamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado (10.4), con $a = 9$, $b = -6$ y $c = 1$:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(1)}}{2(9)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{1}{3},$$

de donde,

$$x = \frac{6+0}{18} = \frac{1}{3} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{6-0}{18} = \frac{1}{3}.$$

Vemos que los valores de las dos soluciones son iguales, así que la ecuación tiene una sola solución:

$$x = \frac{1}{3}.$$

Comprobación: Sustituimos $x = \frac{1}{3}$ en la ecuación original:

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

2. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución: Aplicamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado (10.4), con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Como el número que está dentro del radical es negativo, no podemos extraer raíz cuadrada; lo mismo pasa con la otra expresión de la fórmula (10.4), así que la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene solución en los números reales.

3. Resolver la ecuación $35x^2 - x - 6 = 0$.

Solución: Aplicamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado (10.4), con $a = 35$, $b = -1$ y $c = -6$:

$$x=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4(35)(-6)}}{2(35)}=\frac{1+\sqrt{841}}{70}=\frac{1+29}{70}=\frac{3}{7},$$

o bien,

$$x=\frac{1-\sqrt{841}}{70}=\frac{1-29}{70}=-\frac{28}{70}=-\frac{2}{5}.$$

Así, las raíces de la ecuación son $\frac{3}{7}$ y $-\frac{2}{5}$.

Comprobación: Sustituimos $x=\frac{3}{7}$ en la ecuación original:

$$35\left(\frac{3}{7}\right)^2-\frac{3}{7}-6=\frac{315}{49}-\frac{3}{7}-6=\frac{315-21-294}{49}=0.$$

Sustituimos $x=-\frac{2}{5}$ en la ecuación original:

$$35\left(-\frac{2}{5}\right)^2-\left(-\frac{2}{5}\right)-6=\frac{28}{5}+\frac{2}{5}-6=\frac{28+2-30}{5}=0.$$

10.2.1 Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado

Analicemos la ecuación $y=x^2-1$.

Solución: Podemos encontrar algunos valores que satisfacen la ecuación $y=x^2-1$ haciendo la siguiente tabla, en la que damos valores a x y obtenemos los correspondientes de $y=x^2-1$.

x	3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3
$y=x^2-1$	8	3	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	3	8

Dibujamos estos puntos y observamos que los podemos unir mediante una curva:

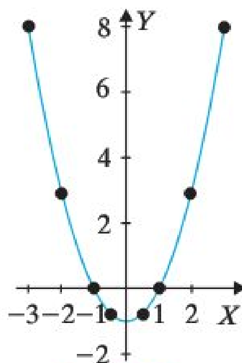


Figura 10.1

Si ahora resolvemos la ecuación $x^2-1=0$, observamos que:

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm2}{2}=\pm1.$$

Así, las dos raíces de la ecuación son $x = 1$ y $x = -1$. En la figura 10.1 podemos ver que estos dos puntos son donde la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 1$ corta al eje X.

En general, tenemos que una ecuación de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$ puede representarse como una parábola en el plano; es decir, un punto (x, y) del plano está en dicha parábola si los valores de x y y satisfacen esa ecuación, y recíprocamente.

Geométricamente, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ significa encontrar los puntos donde la gráfica de la parábola corta al eje X. Entonces:

- Si la ecuación tiene dos raíces distintas, significa que la gráfica de la parábola corta al eje X en dos puntos distintos.
- Si la ecuación tiene una sola raíz, significa que la gráfica de la parábola corta al eje X en un solo punto.
- Si la ecuación no tiene raíces, significa que la gráfica de la parábola no corta al eje X.

En lo que sigue, se dan ejemplos de estas situaciones.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Solución: Como vimos en el ejemplo 1 de la página 325, la solución de la ecuación es $x = \frac{1}{3}$. Geométricamente significa que la gráfica de la ecuación $y = 9x^2 - 6x + 1$ corta al eje X en un solo punto $\left(\frac{1}{3}\right)$.

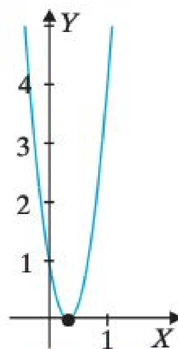


Figura 10.2

2. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución: Aplicamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado (10.4), con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

No podemos obtener un número real que sea $\sqrt{-3}$. Así, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene solución en los números reales.

Geométricamente significa que la gráfica de la función no corta al eje X.

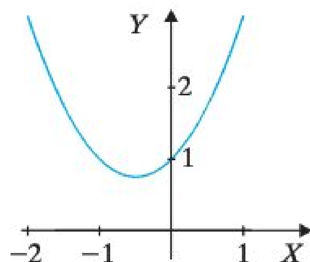


Figura 10.3

3. Resolver la ecuación $5x^2 - x - 6 = 0$.

Solución: Aplicamos la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado (10.4), con $a = 5$, $b = -1$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(-6)}}{2(5)} = \frac{1 + \sqrt{121}}{10} = \frac{1 + 11}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5},$$

o bien,

$$x = \frac{1 - \sqrt{121}}{10} = \frac{1 - 11}{10} = -\frac{10}{10} = -1.$$

Así, las raíces de la ecuación son $\frac{6}{5}$ y -1.
Geométricamente, significa que la gráfica de la función corta al eje X en dos puntos.

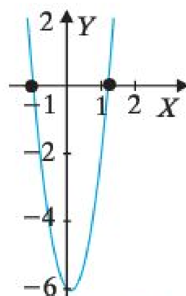


Figura 10.4

Comprobación: Sustituimos $x = \frac{6}{5}$ en la ecuación original:

$$5x^2 - x - 6 = 5\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{6}{5} - 6 = \frac{36}{5} - \frac{6}{5} - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Sustituimos $x = -1$ en la ecuación original:

$$5x^2 - x - 6 = 5(-1)^2 - (-1) - 6 = 5 + 1 - 6 = 0.$$

10.2.2 Algunos elementos de la parábola

Consideremos la ecuación de segundo grado

$$y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{17}{8}. \tag{10.5}$$

Pasamos el término independiente del lado izquierdo y factorizamos el coeficiente de x^2:

$$y-\frac{17}{8}=\frac{1}{8}\left(x^2+2x\right),$$

multiplicamos por 8 y completamos el cuadrado del lado derecho:

$$\begin{aligned}8y-17&=x^2+2x\\8y-17+1&=x^2+2x+1\\8(y-2)&=(x+1)^2\end{aligned}$$

ahora pensamos al coeficiente de $(y-2)$ como un múltiplo de 4.

$$\begin{aligned}(x+1)^2&=8(y-2)\\&=4(2)(y-2).\end{aligned}$$

Ésta es la forma estándar de la ecuación de la parábola.
En general, la forma estándar de una parábola vertical es:

$$(x-h)^2=\pm4p(y-k).$$

A partir de esta ecuación podemos identificar algunos elementos de ella:
El *vértice* V de la parábola es el punto (h,k).
El número p se llama *parámetro* .
Si a partir del vértice, nos movemos verticalmente p unidades (hacia arriba si el coeficiente de p es positivo y hacia abajo si es negativo), llegamos al *foco* F de la parábola. Las coordenadas del foco son:

- $F(h,k+p)$ si el coeficiente de p es positivo.
- $F(h,k-p)$ si el coeficiente de p es negativo.

Si desde el foco nos movemos horizontalmente $2p$ unidades hacia la izquierda y a la derecha obtenemos los puntos:

- $(h-2p,k+p)$ y $(h+2p,k+p)$ si el coeficiente de p es positivo.
- $(h-2p,k-p)$ y $(h+2p,k-p)$ si el coeficiente de p es negativo.

El segmento que une a estos dos puntos se llama *lado recto* de la parábola.
Conociendo el vértice y los extremos del lado recto, podemos dibujar la parábola.
En el ejemplo, el centro es $V(-1,2)$, el parámetro es $p=2$, el foco es $F(-1,2+2)=F(-1,4)$. Si desde el foco nos movemos horizontalmente $2p$ unidades hacia la izquierda y a la derecha obtenemos:

$$(-1+4,4)=(3,4)\quad \text{y} \quad (-1-4,4)=(-5,4),$$

que son los extremos del lado recto.
Observa que estos dos puntos satisfacen la ecuación de la parábola (10.5):

$$\text{Punto } (3,4):\ \frac{1}{8}(3)^2+\frac{1}{4}(3)+\frac{17}{8}=4.$$

$$\text{Punto } (-5,4):\ \frac{1}{8}(-5)^2+\frac{1}{4}(-5)+\frac{17}{8}=4.$$

La gráfica de la parábola del ejemplo es:

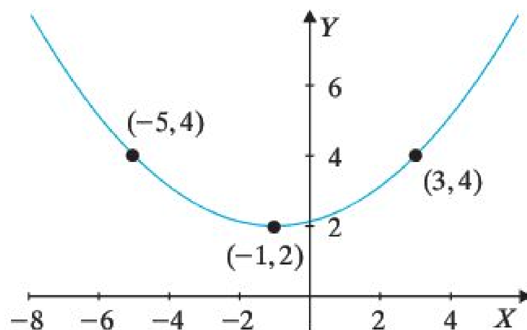


Figura 10.5

Ejemplo

- Dibujar la parábola vertical cuya ecuación es $9x^2 - 54x + 12y + 61 = 0$.

Solución: Escribimos la ecuación en la forma estándar:

$$9x^2 - 54x + 12y + 61 = 0$$

$$9x^2 - 54x = -12y - 61$$

$$9\left(x^2 - 6x\right) = -12y - 61$$

$$\left(x^2 - 6x\right) = \frac{-12y - 61}{9}$$

$$\left(x^2 - 6x + 9\right) = \frac{-12y - 61}{9} + 9$$

$$(x - 3)^2 = \frac{-12y + 20}{9}$$

$$(x - 3)^2 = -\frac{12}{9}\left(y - \frac{20}{12}\right)$$

$$(x - 3)^2 = -4\left(\frac{3}{9}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right)$$

$$(x - 3)^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right).$$

El vértice de la parábola es $V\left(3, \frac{5}{3}\right)$, $p = \frac{1}{3}$, el foco es $F\left(3, \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = F\left(3, \frac{4}{3}\right)$ y los extremos del lado recto son:

$$\left(3 - \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(3 + \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

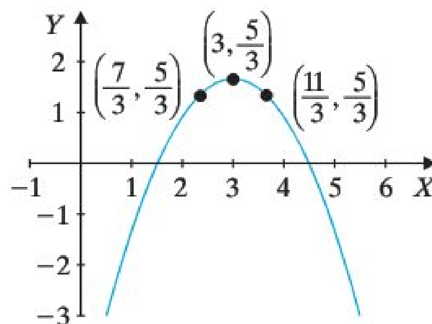


Figura 10.6

10.2.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 39, resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula de la solución general de la ecuación de segundo grado.

1. $x^2+4x-96=0$
2. $2y^2-3y+1=0$
3. $z^2-6=0$
4. $w^2-14w=-49$
5. $3s^2+s+1=0$
6. $5x^2-9x=-4$
7. $3y^2-30y+75=0$
8. $w^2-5w=-5$
9. $10y^2=7y+12$
10. $6z^2=-7z-2$
11. $7x^2-13x+6=0$
12. $3a^2+10a+7=0$
13. $4x^2+12x+9=0$
14. $9y^2-8y+10=0$
15. $4z^2+11z+45=0$
16. $28w^2+45w+18=0$
17. $12x^2-57x+40=0$
18. $25y^2-40y+16=0$
19. $y+3+\dfrac{1}{y+3}=1$
20. $\dfrac{5}{w-3}+\dfrac{1}{w-6}=\dfrac{3}{2}$
21. $\dfrac{10}{2s-4}=\dfrac{11}{10}-\dfrac{12}{s+8}$
22. $4z^2-3z-20=65$
23. $-7a^2+24a+55=0$
24. $x^2+\sqrt{2}x+4\sqrt{2}=0$
25. $18y^2+26y-20=0$
26. $40w^2+73w-33=0$
27. $2z^2+4\sqrt{3}z+6=0$
28. $\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{4}{x+8}=\dfrac{7}{9}$
29. $\dfrac{a+2}{a+6}+\dfrac{11}{3}=\dfrac{a+7}{a-3}$
30. $\dfrac{w+3}{w-6}+\dfrac{w+6}{w-4}=\dfrac{19}{4}$
31. $16w^2-80=0$
32. $63y^2+32y-63=0$
33. $40x^2+3\sqrt{6}x-6=0$
34. $2z^2+3\sqrt{3}z+3=0$
35. $90a^2+47a-77=0$
36. $60y^2-41y-3=0$
37. $8b^2+7b+2=0$
38. $48x^2+177x+70=0$
39. $6y^2-42y+71=0$

40. La suma de los cuadrados de dos números es igual a 157. El menor de ellos es igual a 6. ¿Cuál es el mayor?

41. Encuentra dos números cuya suma sea -2 y cuyo producto sea -48.

42. El papá de mi amigo vivió muchos años. Poco antes de morir, dijo: "Soy un hombre afortunado pues he logrado conocer tantos nietos que el número de ellos multiplicado por la cuarta parte del mismo número es igual a 256. Además, mi edad es ya el triple del número de nietos que tengo". ¿Cuántos nietos y qué edad tenía en ese momento?

43. A la hora del almuerzo, un profesor repartió entre sus alumnos los fondos que había reunido durante el año, que ascendían a \$200, asignando a cada uno cierta cantidad. Antes de terminar la repartición llegaron 5 alumnos más, por lo que repartió nuevamente, tocando a cada uno \$2 menos que en la primera repartición. ¿Cuántos alumnos eran inicialmente?

44. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 23 en dicho sistema sea 212?

45. Encuentra el número que sumado a 5 veces su raíz cuadrada es igual a 14.

46. ¿Qué base debe tener el sistema de numeración para que la representación del número 117 en dicho sistema sea 432?

47. La suma de dos números es 21 y la suma de sus cuadrados es 221. Encuentra dichos números.

48. Un grupo de más de 15 alumnos quiere realizar una excursión. Un cuarentavo del cuadrado del total quieren que el paseo sea al estado de Hidalgo, un quinto prefiere ir a Cuernavaca y 6 alumnos más no tienen preferencia. ¿Cuál es el número de alumnos en el grupo?

49. Una panadería reparte 120 piezas de pan que sobraron el día anterior entre cierto número de personas, y a cada una le toca una cantidad igual. Al ver la reacción de las familias del poblado, el dueño decide repartir al día siguiente igual número de piezas de pan, sólo que esta vez llegan 4 personas más y a todas las personas les tocan 5 piezas menos. ¿Cuántas personas llegaron cada día?

50. La cuarta parte de la suma de un número más 12 multiplicada por la tercera parte de la diferencia del doble del número menos 1 es igual a 25. ¿Cuál es dicho número?

51. Armando dice a Mariano: "Tengo ya muchos hijos, imagínate, si consideras 29 veces el número de hijos con que cuento y le restas 7, obtendrás 4 veces el cuadrado del número de hijos que tengo". ¿Cuántos hijos tiene Armando?

52. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus recíprocos sea $\frac{9}{20}$.

53. Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal es 4 unidades mayor que cualquiera de los lados.

54. Un vendedor de frutas compró cierto número de pencas de plátano por \$400. Cinco pencas estaban muy maduras y no pudo venderlas, así que aumentó \$10 al precio de cada una de las pencas sobrantes, y al venderlas todas obtuvo una ganancia de \$50. ¿Cuántas pencas compró inicialmente?

10.3 Aplicaciones

10.3.1 Geometría

El perímetro de un triángulo rectángulo mide 390 metros. La altura sobre la hipotenusa mide 60 metros. Calcula las longitudes de los lados del triángulo.

Solución:

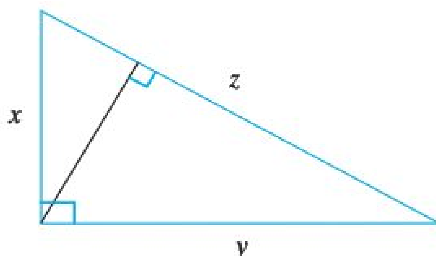


Figura 10.7

Llamamos x, y y z a los lados del triángulo, donde z es la hipotenusa. Puesto que tenemos tres incógnitas, debemos plantear tres ecuaciones.
Como conocemos el perímetro, entonces escribimos la ecuación:

$$x + y + z = 390. \tag{10.6}$$

Puesto que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{10.7}$$

Tomando como base la hipotenusa, el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}z(60) = 30z. \tag{10.8}$$

Si ahora tomamos a x como la base del triángulo, entonces y es la altura, de donde el área es

$$\frac{1}{2}xy. \tag{10.9}$$

Igualamos (10.8) y (10.9), obteniendo así la tercera ecuación:

$$xy = 60z. \tag{10.10}$$

Así, las tres ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 390 \\ x^2 + y^2 &= z^2 \\ xy &= 60z. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Escribimos la primera ecuación como:

$$x + y = 390 - z,$$

y elevando al cuadrado obtenemos:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (390 - z)^2, \tag{10.12}$$

multiplicamos por 2 la tercera ecuación de (10.11) y la sumamos a la segunda:

$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 120z.$$

Igualando esta última ecuación con (10.12) y resolviéndola respecto a z, tenemos:

$$\begin{aligned} z^2 + 120z &= (390 - z)^2 \\ z^2 + 120z &= 152100 - 780z + z^2 \\ 120z + 780z &= 152100 \\ 900z &= 152100 \\ z &= 169. \end{aligned}$$

Para hallar los valores de x y y sustituimos el valor de z en la primera y tercera ecuaciones de (10.11):

$$\begin{aligned} x + y &= 221 \\ xy &= 10140. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Despejamos x de la primera y la sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} (221 - y)\,y &= 10140 \\ 0 &= 10140 - 221\,y + y^2. \end{aligned}$$

Utilizando la solución de la ecuación general de segundo grado (10.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{221 + \sqrt{(-221)^2 - 4(10140)}}{2} = \frac{221 + \sqrt{48841 - 40560}}{2} \\ &= \frac{221 + 91}{2} = 156, \end{aligned}$$

o bien,

$$y = \frac{221 - 91}{2} = 65.$$

Sustituyendo los posibles valores de y en la primera ecuación de (10.13), obtenemos:

$$x = 221 - 156 = 65,$$

o bien,

$$x = 221 - 65 = 156.$$

Por tanto, las longitudes de los lados del triángulo son:

$$x = 65, \quad y = 156 \quad \text{y} \quad z = 169.$$

Considerando la otra posibilidad se obtiene:

$$x = 156, \quad y = 65 \quad y \quad z = 169.$$

Comprobación: Sustituimos $x = 65$, $y = 156$ y $z = 169$ en la ecuación (10.6):

$$x + y + z = 65 + 156 + 169 = 390.$$

En la ecuación (10.7):

Lado izquierdo: $x^2 + y^2 = (65)^2 + (156)^2 = 4225 + 24336 = 28561.$

Lado derecho: $z^2 = (169)^2 = 28561.$

En la ecuación (10.10):

Lado izquierdo: $xy = (65)(156) = 10140.$

Lado derecho: $60z = 60(169) = 10140.$

10.3.1.1 Razón de oro

La razón de oro aparece en muchos templos griegos, como en el Partenón. A partir del Renacimiento, cuando los europeos redescubrieron el arte griego, muchos artistas utilizaron la razón de oro en la pintura, la escultura y la arquitectura. Por ejemplo, todos los rectángulos que aparecen en la fachada de Notre Dame de París son rectángulos de oro. En "La Última Cena", de Leonardo Da Vinci, muchas de las razones que aparecen en el cuadro son razones de oro.

La razón de oro también aparece con frecuencia en la naturaleza, asociada con formas espirales, como el centro de la flor del girasol, y con formas pentagonales, como la estrella de mar.

Los antiguos griegos consideraban que los rectángulos más bellos eran aquellos a los que si se les quita un cuadrado de lado igual a su lado menor, las razones de los lados originales y los nuevos lados son iguales; es decir, si uno de dichos rectángulos tiene lado largo a y lado corto b y se le quita un cuadrado de lado b, el rectángulo resultante tiene un lado b y un lado $a - b$. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \tag{10.14}$$

decimos que el rectángulo es un *rectángulo de oro* y la razón de sus lados $r = \frac{a}{b}$ se llama *razón de oro.*

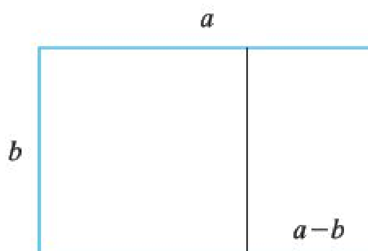


Figura 10.8 Rectángulo de oro

¿Cuánto vale la razón de oro?

Solución: Podemos escribir la expresión de la derecha de la ecuación (10.14) como:

$$\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1}.$$

Si llamamos r a la razón de los lados, $r = \frac{a}{b}$, la ecuación (10.14) queda como:

$$r = \frac{1}{r-1}. \tag{10.15}$$

Para resolverla, multiplicamos por $r-1$ para eliminar el denominador:

$$r(r-1)=1$$
$$r^2-r-1=0.$$

Tenemos una ecuación de segundo grado en la variable r; para resolverla, utilizamos la solución general de la ecuación general de segundo grado (10.4). Haciendo $a=1$, $b=-1$ y $c=-1$, obtenemos:

$$r=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618,$$

o bien,

$$r=\frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618.$$

La razón r es cociente de dos cantidades positivas, así que el valor que debemos tomar es el primero: $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comprobación: Veamos que $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisface la ecuación (10.15):

$$\frac{1}{r-1}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}.$$

Multiplicando por $1+\sqrt{5}$ el numerador y el denominador de la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=r.$$

Por tanto, r satisface la ecuación (10.15).

10.3.2 Física

La intensidad se mide en bujías. Por ejemplo, un foco de 100 watts equivale aproximadamente a 130 bujías.

La iluminación (E) de una superficie depende tanto de la intensidad (I) de la fuente de luz como de la distancia (d) entre la superficie y la fuente de luz.

La iluminación producida por una fuente de luz sobre un objeto varía en razón inversa al cuadrado de la distancia entre ellos.

$$E=\frac{I}{d^2}.$$

Supongamos que un foco está iluminando un objeto. Para aumentar la iluminación, se puede incrementar la intensidad del foco, o bien, acortar la distancia entre el foco y el objeto.

Ejemplo

- Hallar un punto igualmente iluminado por dos luces que están separadas 10 metros y cuyas intensidades son 16 y 9 bujías respectivamente.

Solución:



Figura 10.9

Llamemos A y B a los puntos en los que se ubican las luces y C al punto buscado. La distancia entre A y B es de 10 metros.

Llamemos x a la distancia entre A y C; entonces $CB = 10 - x$. Supongamos que la intensidad de A es de 16 bujías y la de B de 9.

La iluminación para el punto C debida a la luz A es:

$$\frac{16}{x^2}.$$

La iluminación para el punto C debida a la luz B es:

$$\frac{9}{(10-x)^2}.$$

Como las dos iluminaciones deben ser iguales, entonces:

$$\frac{16}{x^2} = \frac{9}{(10-x)^2}. \tag{10.16}$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 16(10-x)^2 &= 9x^2 \\ 16\left(100 - 20x + x^2\right) &= 9x^2 \\ 7x^2 - 320x + 1600 &= 0. \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula para ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{320 \pm \sqrt{(320)^2 - 4(7)(1600)}}{14} = \frac{320 \pm 240}{14},$$

de donde,

$$x = 40 \quad \text{o} \quad x = \frac{40}{7} \approx 5.71.$$

Hay dos puntos que satisfacen. Uno, C, está aproximadamente a 5.71 metros de A y a 4.29 metros de B. El otro, C', está sobre la prolongación de la recta en la dirección AB a 40 metros de A y 30 metros de B.

Comprobación: Sustituimos $x = \frac{40}{7}$ en la ecuación (10.16):

Lado izquierdo: $\dfrac{16}{x^2} = \dfrac{16}{\left(\frac{40}{7}\right)^2} = \dfrac{16(49)}{1600} = \dfrac{49}{100}.$

Lado derecho: $\dfrac{9}{(10-x)^2} = \dfrac{9}{\left(10-\frac{40}{7}\right)^2} = \dfrac{9(49)}{(30)^2} = \dfrac{49}{100}.$

Sustituimos $x = 40$ en la ecuación (10.16):

Lado izquierdo: $\frac{16}{x^2} = \frac{16}{(40)^2} = \frac{16}{1600} = \frac{1}{100}$.

Lado derecho: $\frac{9}{(10-x)^2} = \frac{9}{(10-40)^2} = \frac{9}{(-30)^2} = \frac{1}{100}$.

10.3.3 Ejercicios

1. El área de un triángulo rectángulo mide 24 m^2 y la hipotenusa mide 10 metros. Calcula las longitudes de los catetos.
2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden x y $2x-10$. La hipotenusa mide $2x-1$. ¿Cuánto mide cada cateto y cuánto mide la hipotenusa del triángulo?
3. Un terreno en forma de triángulo rectángulo tiene las siguientes dimensiones: uno de los lados mide 144 metros, y la hipotenusa es 9 metros más 8 veces el otro lado. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? ¿Qué área tiene?
4. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba a una velocidad de 14.7 m/seg. ¿En qué momento alcanza el proyectil una altura de 49 metros? ¿En qué momento toca el suelo?
5. Encuentra un punto igualmente iluminado por dos luces que están a una distancia de 12 metros y cuyas intensidades son 64 y 25 bujías respectivamente.
6. Si r es la razón de oro, prueba que el recíproco del doble de r satisface la ecuación $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
7. Prueba que la razón de oro satisface la ecuación $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{x}$.
8. En un círculo de radio 5 se inscribe un triángulo de manera que uno de sus lados coincida con el diámetro. Llama A, B y C a los vértices del triángulo, donde AC es el diámetro. Traza la perpendicular a AC que pasa por B y llama D al punto de intersección. Entonces:

   a. Prueba que $\Delta ABD \cong \Delta BDC$ y de ahí que $BD^2 = (AD)(DC)$.

   b. Usando el inciso anterior, prueba que $AB = \sqrt{2(5)(AD)}$ y $BC = \sqrt{2(5)(DC)}$.

   c. Suponiendo que $AB + BC = 14$ y llamando $x = AD$ y $y = DC$, observa que de las condiciones del problema se tienen las ecuaciones

$$x + y = 10$$
$$\sqrt{10x} + \sqrt{10y} = 14.$$

   Despeja una incógnita de la primera ecuación, sustituye en la segunda y prueba que $x = \frac{18}{5}$ y $y = \frac{32}{5}$, o bien, $x = \frac{32}{5}$ y $y = \frac{18}{5}$.

10.4 Desigualdades de segundo grado

Una vaca permanece atada a un poste que se encuentra en el centro de un terreno circular de 20 metros de diámetro. El terreno está sembrado de maíz. ¿Qué longitud debe tener la cuerda que ata a la vaca para que al menos 64π metros cuadrados de siembra no sean consumidos por ella?

Solución: El terreno mide 10 metros de radio; por tanto, tiene un área de 100π m^2. Si la cuerda que ata a la vaca tiene una longitud de r metros, la vaca consumirá un área de πr^2 metros cuadrados de siembra y entonces el anillo circular de terreno que no puede comerse tendrá un área $100\pi - \pi r^2$ metros cuadrados; entonces:

$$100\pi - \pi r^2 \geq 64\pi.$$

Resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} 100 - r^2 &\geq 64 \\ -r^2 &\geq 64 - 100 \\ r^2 &\leq 36 \\ |r| &\leq 6. \end{aligned}$$

De donde:

$$-6 \leq r \leq 6.$$

La cuerda que ata a la vaca debe medir a lo más 6 metros.

EJEMPLOS

1. Resolver la desigualdad $x^2 - 8x > 9$.

Solución:

- *Primer método.*

Para resolver esta desigualdad, lo que haremos será completar el cuadrado; es decir, buscamos un número que complete a $x^2 - 8x$ como trinomio cuadrado perfecto; dicho número es $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$, así que:

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2.$$

En la desigualdad original, sumamos 16 en ambos lados para que la desigualdad no se altere:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x &> 9 \\ x^2 - 8x + 16 &> 9 + 16 \\ (x-4)^2 &> 25. \end{aligned}$$

Ahora sumamos -25 para obtener una diferencia de cuadrados y factorizamos

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &> 25 \\ (x-4)^2 - 25 &> 0 \\ \big((x-4)-5\big)\big((x-4)+5\big) &> 0 \\ (x-9)(x+1) &> 0. \end{aligned}$$

Recuerda que para que el producto de dos factores sea positivo, ambos deben ser positivos o ambos negativos.

Si ambos son positivos:

$$\begin{matrix} x - 9 > 0 & y & x + 1 > 0 \\ x > 9 & & x > -1. \end{matrix} \tag{10.17}$$

Si por el contrario ambos son negativos:

$$\begin{matrix} x - 9 < 0 & y & x + 1 < 0 \\ x < 9 & & x > -1. \end{matrix} \tag{10.18}$$

De (10.17) obtenemos que x debe ser mayor que 9, y de (10.18) x debe ser menor que -1; es decir,

$$x > 9 \quad \text{o} \quad x < -1,$$

como muestra la figura (10.10).



Figura 10.10

- *Segundo método.*

Cambiamos el signo de desigualdad por el de igualdad y resolvemos la ecuación correspondiente utilizando cualquier método:

$$x^2 - 8x = 9$$
$$x^2 - 8x - 9 = 0$$
$$(x-9)(x+1) = 0.$$

Las raíces son:

$$x = 9, \qquad x = -1.$$

Estos puntos dividen a la recta en tres intervalos, como muestra la figura 10.11.



Figura 10.11

En cada uno de estos intervalos todos los puntos satisfacen la desigualdad original o ninguno la satisface. Esta afirmación puede justificarse algebraica o geométricamente, como haremos al terminar este ejercicio, por ahora simplemente la usamos.

♦ Elegimos cualquier punto menor que -1; por ejemplo, $x = -2$, y evaluamos el miembro izquierdo de la desigualdad original:

$$(-2)^2 - 8(-2) = 4 + 16 = 20$$

que sí es mayor que 9, así que en todos los puntos del intervalo $(-\infty, -1)$ se satisface la desigualdad.

♦ Ahora elegimos un punto entre -1 y 9; por ejemplo, $x = 0$, y evaluamos:

$$(0)^2 - 8(0) = 0$$

que no es mayor que 9, así que en ningún punto del intervalo $(-1, 9)$ se satisface la desigualdad.

♦ Finalmente, elegimos un punto mayor que 9; por ejemplo, $x = 10$, y evaluamos:

$$(10)^2 - 8(10) = 100 - 80 = 20$$

que sí es mayor que 9, así que en todos los puntos del intervalo $(9, \infty)$ se satisface la desigualdad.

Concluimos entonces que la solución es:

$$x \in (-\infty,-1) \cup (9,\infty).$$

Justificamos ahora nuestra afirmación.
Primero algebraicamente. Como vimos en la resolución del problema, se tiene

$$x^2 - 8x - 9 = (x-9)(x+1).$$

Si $x \in (-\infty,-1)$, entonces $x < -1 < 9$, es decir, $x+1 < 0$ y $x-9 < 0$; por tanto, por la regla de los signos:

$$x^2 - 8x - 9 = (x-9)(x+1) > 0.$$

Así, todos los puntos del intervalo $(-\infty,-1)$ satisfacen la desigualdad propuesta.

Si $x \in (-1,9)$, entonces $-1 < x < 9$, es decir, $x+1 > 0$ y $x-9 < 0$; por tanto,

$$x^2 - 8x - 9 = (x-9)(x+1) < 0.$$

Así, ningún punto del intervalo $(-1,9)$ satisface la desigualdad.

Si $x \in (9,\infty)$, entonces $-1 < 9 < x$, es decir, $x+1 > 0$ y $x-9 > 0$; por tanto,

$$x^2 - 8x - 9 = (x-9)(x+1) > 0.$$

Así, todos los puntos del intervalo $(-\infty,-1)$ satisfacen la desigualdad.

La justificación geométrica se basa en que si en alguno de esos tres intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,9)$ o $(9,\infty)$, un punto x_1 satisface la desigualdad y otro x_2 la desigualdad contraria, habría un punto x_3 entre ellos dos, y por tanto, dentro del mismo intervalo, en donde se satisface la igualdad, lo cual no es cierto, pues los únicos puntos donde se satisface son 9 y –1.

La justificación formal de este argumento, conocida como el *teorema del valor intermedio,* está fuera del alcance de este libro, ya que requiere del concepto de continuidad, que es un tema que se ve en el curso de cálculo diferencial e integral; sin embargo, podemos auxiliarnos de lo visto en la sección "Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado" y recordar que al resolver una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ estamos encontrando los puntos de intersección del eje X y la parábola que tiene por ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si hay dos intersecciones r y s, entonces se tiene alguna de las siguientes dos situaciones

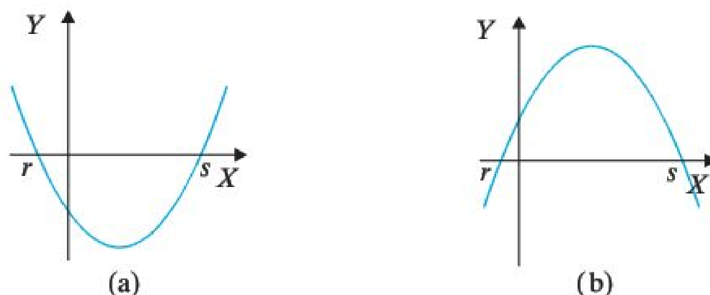


Figura 10.12

Observamos que en ambos casos ax^2+bx+c tiene el mismo signo en los intervalos $(-\infty,r)$ y (s,∞) y en (r,s) tiene el otro signo; por tanto, la desigualdad $ax^2+bx+c>0$, por ejemplo, se satisface en $(-\infty,r)\cup(s,\infty)$ en el caso de la figura 10.12(a) y la solución es (r,s) en el caso representado en la figura 10.12(b).

2. Resolver $6y^2+11<0$.

Solución:

$$\begin{aligned}6y^2+11&<0\\6y^2&<-11\\y^2&<-\frac{11}{6}.\end{aligned}$$

Recuerda que cualquier número real al cuadrado siempre es mayor o igual que cero, así que esta desigualdad no tiene solución.

3. Resolver $2w^2+12w+23\geq 0$.

Solución: Completamos el cuadrado:

$$\begin{aligned}2w^2+12w+23&\geq 0\\2w^2+12w&\geq -23\\w^2+6w&\geq -\frac{23}{2}\\\left(w^2+6w+9\right)&\geq -\frac{23}{2}+9\\(w+3)^2&\geq -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero, entonces esta desigualdad se cumple para cualquier número real.

En los siguientes dos ejemplos daremos otros métodos de solución distintos al del ejemplo 1.

4. Resolver $3y^2+5y-8<0$.

Solución: Para resolver esta desigualdad podemos obtener primero las soluciones de la ecuación:

$$3y^2+5y-8=0,$$

es decir, utilizando la solución general de la ecuación general de segundo grado, tenemos:

$$y=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(3)(-8)}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{6}=\frac{-5\pm 11}{6}.$$

De donde las soluciones de la ecuación de segundo grado son:

$$y=1;\quad y=-\frac{8}{3}.$$

Podemos ahora escribir:

$$3y^2+5y-8=(3y+8)(y-1).$$

Entonces, la desigualdad original es:

$$(3y+8)(y-1)<0.$$

Recuerda que para que el producto de dos factores sea menor que cero, uno debe ser positivo y el otro negativo. Por tanto, si:

$$\begin{aligned} 3y+8 &> 0 \\ 3y &> -8 \\ y &> -\frac{8}{3} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y-1 &< 0 \\ y &< 1, \end{aligned}$$

entonces podemos escribir:

$$-\frac{8}{3}<y<1.$$

Por otra parte, si

$$\begin{aligned} 3y+8 &< 0 \\ 3y &< -8 \\ y &< -\frac{8}{3} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} y-1 &> 0 \\ y &> 1, \end{aligned}$$

no hay ningún número real que cumpla con esta opción. Por tanto,

$$-\frac{8}{3}<y<1$$

es la solución.

5. Resolver $3x^2+5x\le x^2+x+22$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3x^2+5x &\le x^2+x+22 \\ 2x^2+4x &\le 22 \\ x^2+2x &\le 11 \\ x^2+2x+1 &\le 11+1 \\ (x+1)^2 &\le 12 \\ |x+1| &\le \sqrt{12}. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades del valor absoluto, resolvemos la última desigualdad:

$$\begin{aligned} -\sqrt{12} \le\; & x+1 \le \sqrt{12} \\ -1-\sqrt{12} \le\; & x \le -1+\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Entonces x es solución si $-1-\sqrt{12}\le x\le -1+\sqrt{12}$.

6. Resolver $\dfrac{x^2-28}{x^2-5x-6}>2$.

Solución: El objeto de haber introducido el Teorema del Valor Intermedio es atacar este tipo de desigualdades, que resultan sumamente laboriosas por el primero de los métodos.

Nos fijamos primero en los puntos donde no está definida la expresión del lado izquierdo. Para ello observamos dónde el denominador vale cero:

$$x^2-5x-6=0$$
$$(x+1)(x-6)=0$$

obtenemos que en $x=-1$ y $x=6$ el denominador vale cero y, por tanto, la fracción no está definida.

Ahora sustituimos el signo de mayor por el de igualdad en la desigualdad original y resolvemos la ecuación correspondiente:

$$\frac{x^2-28}{x^2-5x-6}=2$$
$$x^2-28=2x^2-10x-12$$
$$-x^2+10x-16=0$$
$$-(x-2)(x-8)=0$$

y obtenemos que las soluciones son $x=2$ y $x=8$.

Consideramos ahora los puntos donde no está definida la ecuación y donde se satisface la igualdad: $-1, 2, 6, 8$. Estos puntos dividen a la recta en cinco intervalos, en cada uno de los cuales se cumple la desigualdad original o la contraria.

Elegimos un punto en cada intervalo, por ejemplo:

$$-2\in(-\infty,-1),\ \frac{3}{2}\in(-1,2),\ 4\in(2,6),\ 7\in(6,8),\ 10\in(8,\infty).$$

Comprobamos si se cumple la desigualdad en estos puntos.

- En $x=-2$:

$$\frac{(-2)^2-28}{(-2)^2-5(-2)-6}=-3<2.$$

- En $x=\frac{3}{2}$:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-28}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)-6}=\frac{103}{45}>2.$$

- En $x=4$:

$$\frac{(4)^2-28}{(4)^2-5(4)-6}=\frac{6}{5}<2.$$

- En $x=7$:

$$\frac{(7)^2-28}{(7)^2-5(7)-6}=\frac{21}{8}>2.$$

- En $x=10$:

$$\frac{(10)^2-28}{(10)^2-5(10)-6}=\frac{18}{11}<2.$$

Así que la solución es la unión de los intervalos donde están los puntos en los que comprobamos que sí se satisface la desigualdad:

$$x\in(-1,2)\cup(6,8).$$

■

10.4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 39 resuelve las desigualdades.

1. $r^2+8<5$
2. $3w^2-1\geq -4$
3. $-5b^2-2\leq 10$
4. $y^2-6y>-10$
5. $a^2+a-2>0$
6. $w^2-3w<4$
7. $x^2-3>6$
8. $a^2-8a>-15$
9. $y^2-5y>-3$
10. $w^2+5<1$
11. $w^2+10w\leq 11$
12. $x^2+7x+12<0$
13. $y^2-20<-4$
14. $z^2+12z\leq -20$
15. $z^2-3z<-3$
16. $y^2-3y-40\geq 0$
17. $6x^2+x+1\leq 0$
18. $w^2+11w+18<0$
19. $3x^2-2>2x^2-x$
20. $2y^2-y<y^2-\frac{1}{4}$
21. $z^2+2z>-2z-4$
22. $5r^2+2r-16\leq 3r^2-2r+6$
23. $8t^2-7t-1\geq 2t^2+6t+4$
24. $7z^2+5z-13\leq 3z^2-5z-11$
25. $\dfrac{4x^2-3x+8}{x^2-1}\geq 4$
26. $\dfrac{3w^2+10w-27}{(w+2)^2}\leq 2$
27. $\dfrac{(2x-3)(x+1)}{x+5}<x-6$
28. $\dfrac{2x^2+10x-12}{x^2-x-30}<1$
29. $\dfrac{-10x^2-9x-28}{6x^2+x-1}>-2$
30. $\dfrac{3x^2+7x-31}{x^2-2x-8}>5$
31. $\dfrac{16x^2-19x-59}{3x^2-2x-8}<8$
32. $\dfrac{2x^2+2x-34}{x^2-7x+10}\leq -3$
33. $\dfrac{-52x^2+39x+22}{10x^2-7x-6}\geq -4$
34. $\left|t^2-2t\right|-3>1$
35. $\left|x^2+9x\right|<x+20$
36. $\left|z^2-3z\right|\geq z-2$
37. $\left|4z^2-5z+2\right|<4z^2+6$
38. $\left|3s^2-s+2\right|<2s^2+3s$
39. $\left|5w^2+12w-1\right|<3w^2-7$

40. Rosita pregunta a su mamá cuándo le permitirá ir al cine sola con sus amigos. La mamá le contesta: "Cuando el cuadrado de tu edad menos 17 veces la misma más 30 sea mayor o igual que cero, te lo permitiré". Rosita muy contenta, le dice: "Gracias mamá, iré al cine con mis amigos hoy por la tarde". ¿Qué edad tiene, al menos, Rosita?
41. Encuentra z un número tal que él menos su recíproco sea menor que 6.
42. Se quiere enmarcar un lienzo cuadrado de 30 cm de lado. ¿De qué ancho puede ser la marialuisa para que el área total no exceda 1.369 cm^2?
43. Se quiere construir un anillo formado por dos círculos concéntricos. Si el círculo exterior tiene un radio de 5 cm, ¿qué radio deberá tener el círculo pequeño para que el área del anillo sea por lo menos de 16π cm^2?

Resumen

- La solución general de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ está dada por $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$ significa encontrar los puntos donde la gráfica de la parábola corta al eje X Entonces:

1. Si la ecuación tiene dos raíces distintas, significa que la gráfica de la parábola corta al eje X en dos puntos distintos.
2. Si la ecuación tiene una sola raíz, significa que la gráfica de la parábola corta al eje X en un solo punto.
3. Si la ecuación no tiene raíces, significa que la gráfica de la parábola no corta al eje X.

10.5 EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 24, resuelve las ecuaciones utilizando el método más apropiado en cada caso.

1. $y^2 - 121 = 0$
2. $6y^2 - 48 = 3y^2$
3. $x^2 + 6x + 9 = 0$
4. $2z^2 + z - 3 = 0$
5. $8n^2 + n - 9 = 0$
6. $6y^2 + 13y - 63 = 0$
7. $10w^2 + 37w + 33 = 0$
8. $5w^2 + 4 = 0$
9. $18x^2 + 36x + 4 = 0$
10. $y + 2 + \frac{2}{y} = \frac{y-1}{2} + \frac{9}{y}$
11. $\frac{4}{z} + \frac{z}{4} = \left(\frac{12-z}{z}\right)\left(\frac{12+z}{4}\right)$
12. $\frac{12}{t} + \frac{12}{t-18} = 1$
13. $\frac{6}{r+2} + \frac{3}{r-1} = \frac{5}{6}$
14. $\frac{(z-2)^2}{(z+8)^2} = \frac{1}{81}$
15. $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{5}{2}$
16. $5y^2 + 12y = 8$
17. $9a^2 - 27a = 3$
18. $7z^2 - 28z + 30 = 0$
19. $(w-1)(w+2) + (w+1)(w-2) = \frac{17}{2}$
20. $(y+2)(y+5) + (y-2)(y-5) = 52$
21. $(y+5)(y-3) + (2y-1)(y+1) = -\frac{55}{4}$
22. $\frac{w-3}{w-4} - \frac{w-4}{w-5} = \frac{w-6}{w-7} - \frac{w-7}{w-8}$
23. $\frac{4x-3}{2x-1} + \frac{2x-5}{5x+1} = -2$
24. $\frac{3x-2}{x+4} + \frac{5x-2}{2x+2} = 2$

En los ejercicios 25 a 36, resuelve las desigualdades.

25. $y^2 - 3y - 40 \geq 0$
26. $\left|(2y-6)^2 - (y+2)^2\right| < 2y^2 - 4y - 48$
27. $6x^2 + x - 1 \leq 0$
28. $w^2 + 11w + 18 < 0$
29. $\left|z^2 - 12z\right| \leq 4z - 15$
30. $(3x-2)^2 + 3(x^2 - 5) < 25 - (2x-3)^2$
31. $\left|2w^2 + 7w\right| > w^2 + w + 7$
32. $\left|(z+5)^2 - (z-6)^2\right| > z^2 + 10z$
33. $\frac{x^2 + 2x + 2}{x+2} > -5$
34. $\frac{x-8}{x^2+1} < \frac{2}{x+6}$
35. $(s^2 - 4)(s-1) > s(s^2 - 10s + 16)$
36. $\left|\frac{z^2 - 16}{z^2 - 3z - 28}\right| > 3z - 1$

37. Encuentra un número que sumado a su cuadrado sea 240.
38. En un rancho se quiere bardear un corral cuadrado que tiene 625 m^2 de superficie. ¿Cuántos metros de tela de alambre se necesitarán?
39. La suma de los cuadrados de dos números es 274. Si uno de ellos es 15, ¿cuál es el otro número?
40. Encuentra dos números enteros consecutivos pares tales que la suma de sus recíprocos sea $\frac{7}{24}$.
41. El área de un círculo es 64 veces el área de otro de radio menor. Si el círculo pequeño tiene radio 6, ¿cuál es el diámetro del círculo grande?
42. Una pirámide de base cuadrada y 16 cm altura tiene un volumen igual a 256 cm^3. ¿Cuánto mide la longitud de la base de la pirámide?
43. Una cisterna que tiene forma de prisma rectangular con base cuadrada tiene una capacidad de 48,000 litros. Si mide 3 metros de profundidad, ¿cuánto mide de lado?
44. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la diferencia de la potencia quinta del mayor menos la potencia quinta del menor es igual a 1. ¿Cuáles son dichos números?
45. La suma de dos números es igual a 20. La suma de sus recíprocos es igual a $\frac{4}{15}$. ¿Cuáles son dichos números?
46. Dos números enteros son tales que uno es tres unidades mayor que el otro y su media armónica es igual a $\frac{80}{13}$. ¿Cuáles son dichos números?
47. El área de un rectángulo es 150 m^2. Si se aumentan 2 metros al largo y 2 metros al ancho del rectángulo, el área es de 204 m^2. Calcula el largo y el ancho del rectángulo.
48. Una señora compró cierto número de nardos por \$6. Si hubiera comprado 3 nardos más por el mismo dinero, habría pagado 10 centavos menos por cada uno. ¿Cuántos nardos compró y cuánto pagó por cada uno?
49. Un terreno rectangular mide de largo el triple del ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones si tiene una superficie de 2,352 m^2?

50. Un terreno de forma rectangular tiene una superficie de 375 m^2. Si su ancho es $\frac{3}{5}$ del largo, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

51. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado inscrito en un círculo de 4 cm de radio si una diagonal del cuadrado coincide con el diámetro del círculo?

52. Una clínica de belleza cobra \$65 por tratamiento. Tiene un promedio de 30 clientes a la semana. Por cada incremento de \$6 en la tarifa, la clínica pierde 2 clientes. ¿Qué precio deberá fijar la clínica de modo que los ingresos semanales no sean menores de los que obtiene con la tarifa de \$65?

53. Traduce el siguiente poema al lenguaje algebraico y resuelve la ecuación correspondiente:

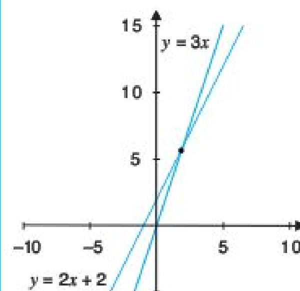
Para poder describir
las sensaciones que siento por ti,
he de contar
el número de estrellas
que en el cielo pueda observar.
Pero como he de describir
el significado de la inmensidad
he optado por pensar
en el tiempo de mi vida
que te he de recordar.
El inverso de tal número
tú lo puedes igualar
a un quinto de las 6 cartas
que te llegué a regalar,
menos el tiempo
que te voy a recordar.

Araceli Bernabé

capítulo

11

Sistemas de ecuaciones



11.1 Relación entre ecuaciones simultáneas e interseción de rectas
11.2 Método de igualación
11.3 Método de suma y resta
11.4 Método de sustitución
11.5 Otros sistemas de ecuaciones simultáneas
11.6 Método de Gauss
11.7 Determinantes
11.8 Balanceo de ecuaciones químicas
11.9 Sistema de una ecuación de primer grado y una de segundo grado en dos variables
11.10 Desigualdades
11.11 Ejercicios de repaso

Los determinantes se desarrollan a partir del estudio de las ecuaciones lineales. En 1750, Cramer presentó una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de determinantes. Por su parte, en 1800, Gauss desarrolló un método de eliminación para aplicarlo a problemas de mínimos cuadrados en cálculos astronómicos. Sin embargo, desde siglos antes, en China ya se usaba ese método para resolver sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

11.1 Relación entre ecuaciones simultáneas e intersección de rectas

Juan camina a 2 km/h y Ana a 3 km/h. Si Ana le da a Juan 2 km de ventaja, ¿cuánto tardará Ana en alcanzar a Juan?

Solución: Si llamamos x al tiempo transcurrido y y a la distancia recorrida en ese tiempo, con los datos de Ana podemos plantear la ecuación

$$y = 3x,$$

y con los datos de Juan obtenemos

$$y = 2 + 2x.$$

En el plano, identificamos el eje X con el tiempo transcurrido y el eje Y con la distancia recorrida.

Dibujemos la recta que corresponde al movimiento de Ana:

En el tiempo $x = 0$, Ana no ha avanzado, $y = 0$, así que el punto $(0,0)$ está en la recta de Ana. En el tiempo $x = 1$, Ana ha avanzado 3 km, $y = 3$, así que el punto $(1,3)$ está en la recta de Ana.

En el mismo plano, dibujemos la recta que representa los movimientos de Juan:

En el tiempo $x = 0$, Juan ha avanzado 2 km, distancia que Ana le dio de ventaja, $y = 2$. Así, el punto $(0,2)$ está en la recta de Juan. En el tiempo $x = 1$, Juan ha avanzado 2 km más, $y = 2 + 2 = 4$. El punto $(1,4)$ está en la recta de Juan.

Observemos el punto donde se cortan las dos rectas; es decir, en el punto $(2,6)$. La primera coordenada del punto corresponde al tiempo que tardaron en encontrarse, 2 horas, y la segunda coordenada es la distancia recorrida, 6 km.

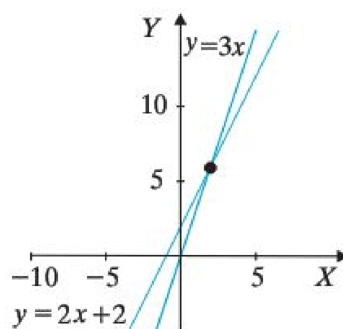


Figura 11.1

Observa que los valores $x = 2$, $y = 6$ satisfacen las ecuaciones del movimiento de Ana y de Juan.

$$6 = 3(2) \quad \text{y} \quad 6 = 2 + 2(2).$$

Cuando tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir, de la forma $ax + by + c = 0$, cada una de ellas representa una recta en el plano, y hemos visto que hay una infinidad de parejas (x, y) que satisfacen cada una de las ecuaciones. Resolver simultáneamente las dos ecuaciones significa encontrar una pareja (x, y) que satisfaga ambas ecuaciones. Geométricamente, significa encontrar un punto del plano que esté en ambas rectas; es decir, encontrar el punto donde se cortan las rectas, si lo hay.

Recordemos que para dos rectas en el plano, puede suceder que:

- Se corten en un punto.
- Sean la misma recta.
- Sean paralelas.

Respectivamente, dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden:

- Tener una única solución.
- Tener una infinidad de soluciones.
- No tener solución.

EJEMPLOS

1. Dibujar las rectas y señalar si existe un punto que resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0 \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

Solución: Dibujemos las rectas en el plano.

Para dibujar una recta, podemos dar dos puntos de ella y unirlos.

Si damos el valor de $y = 0$, el valor de x que satisface la primera ecuación es $x = 3$; así, el punto $(3,0)$ está en la recta determinada por ella; dando otro valor de y, por ejemplo, $y = 2$, obtenemos $x = -1$; así, $(-1, 2)$ también está en la recta. Uniendo estos puntos encontramos la recta que representa la primera ecuación.

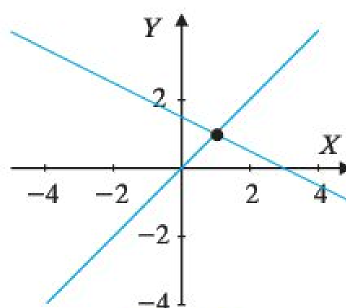


Figura 11.2

De manera similar, encontramos la recta que representa la segunda ecuación (véase la figura 11.2). En la gráfica vemos que el único punto que está en ambas rectas es $(1,1)$, así que la única solución al sistema de ecuaciones es $x=1$, $y=1$.

2. Dibujar las rectas y señalar si existe un punto que resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 6x+4y-4 &= 0 \\ 9x+6y-6 &= 0. \end{aligned}$$

Solución: Dibujamos las rectas en el plano como hicimos en el ejemplo anterior (véase la figura 11.3). Observemos que las rectas que representan a cada una de las dos ecuaciones son la misma recta. Esto significa que toda pareja (x,y) que satisface a una de esas ecuaciones, también satisface a la otra. Por tanto, hay una infinidad de soluciones.

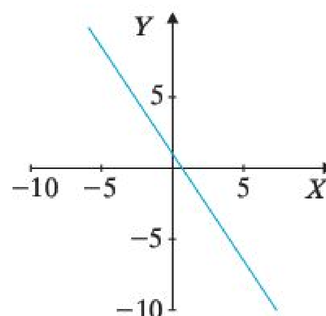


Figura 11.3

Si despejamos y de cualquiera de las ecuaciones, tenemos $y=-\frac{3}{2}x+1$, lo cual significa que por cada valor x, la pareja $\left(x,\, -\frac{3}{2}x+1\right)$ es solución del sistema.

3. Dibujar las rectas y señalar, si existe, el punto que resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 2x-y+1 &= 0 \\ 2x-y+2 &= 0. \end{aligned}$$

Solución: Dibujemos las rectas en el plano (véase la figura 11.4).

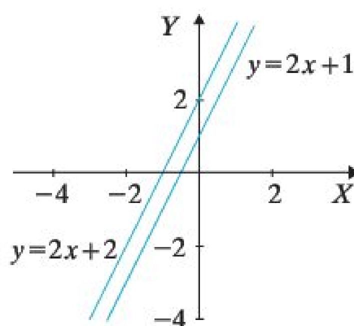


Figura 11.4

Observemos que las rectas son paralelas, por lo que si un punto está en una de las rectas, no está en la otra, lo cual quiere decir que no hay ninguna pareja (x, y) que sea solución de ambas ecuaciones.

En las siguientes secciones veremos diversos métodos para encontrar la solución, si la hay, de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En general, cualquier sistema puede resolverse mediante cualquiera de los métodos descritos, pero en la práctica, dependiendo de la forma que tengan las ecuaciones particulares, será más fácil aplicar un método que los otros; por ello es bueno dominarlos todos y saber sacarle partido a cada uno en los casos particulares.

11.1.1 Ejercicios

Dibuja las rectas y señala, si existe, el punto que resuelve el sistema.

1. $y = x - 6$, $y = -4$
2. $x - 3y = 0$, $x - y = 2$
3. $x + 2y = -1$, $y = -5$
4. $5x + y = 25$, $3x - 4y = -8$
5. $x + y = -4$, $x - y = -16$
6. $5x - 3y = 2$, $-10x + 6y = -4$
7. $2x + 6y = 10$, $x + 3y = 7$
8. $3x - 2y = 7$, $5x + 2y = -15$
9. $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$
10. $9x + 4y = -1$, $-18x - 8y = 2$
11. $10x + 5y = -5$, $4x + y = -5$
12. $y = 9$, $11x + 5y = -10$

11.2 Método de igualación

Lupita dijo a Natalia: "Si a mi edad le sumas 1, obtendrás el mismo número que si a la edad de Roberto le restas 1 y multiplicas el número obtenido por 2. Si a mi edad le restas 1, obtendrás la misma cantidad que si a la edad de Roberto le sumas 1. ¿Sabes qué edad tenemos Roberto y yo?"

Solución: Llamamos ℓ a la edad de Lupita y r a la de Roberto. De los datos del problema, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ell + 1 &= 2(r - 1) \\ \ell - 1 &= r + 1. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Reescribimos las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\ell - 2r = -3$$
$$\ell - r = 2.$$

Despejamos la variable ℓ de ambas ecuaciones:

$$\ell = -3 + 2r$$
$$\ell = 2 + r. \tag{11.2}$$

Igualamos las ecuaciones:

$$-3 + 2r = 2 + r.$$

Resolviendo para r obtenemos

$$r = 5.$$

Ahora sustituimos este valor de r en la segunda ecuación de (11.2) para obtener el valor de ℓ:

$$\ell = 2 + 5 = 7.$$

Así que Lupita tiene 7 años y Roberto tiene 5.

Comprobación: Sustituimos los valores $\ell = 7$ y $r = 5$ en las ecuaciones (11.1):
Primera ecuación:

Lado izquierdo: $\ell + 1 = 7 + 1 = 8.$
Lado derecho: $2(r - 1) = 2(5 - 1) = 8.$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $\ell - 1 = 7 - 1 = 6.$
Lado derecho: $r + 1 = 5 + 1 = 6.$

Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables por este método, seguimos estos pasos:

Paso 1 Despejamos la misma variable de ambas ecuaciones.

Paso 2 Igualamos las expresiones obtenidas para dicha variable y resolvemos para la otra variable.

Paso 3 Sustituimos el valor obtenido para esta variable en alguna de las ecuaciones del primer paso y obtenemos el valor de la otra variable.

Paso 4 Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema $\begin{matrix} a + 3b = 11 \\ a - 7b = -5. \end{matrix}$

Solución:

Paso 1 Despejamos la variable a de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= 11 - 3b \\ a &= -5 + 7b. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Paso 2 Igualamos las dos expresiones:

$$11 - 3b = -5 + 7b.$$

Paso 3 Resolvemos para b, con lo que obtenemos:

$$b = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}.$$

Ahora sustituimos este valor en la primera ecuación de (11.3) para encontrar el valor de a:

$$a = 11 - 3\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{31}{5}.$$

La solución es: $a = \frac{31}{5}$, $b = \frac{8}{5}$.

Paso 4

Comprobación: Sustituimos los valores $a = \frac{31}{5}$ y $b = \frac{8}{5}$ en las ecuaciones originales:

Primera ecuación: $a + 3b = \frac{31}{5} + 3\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{31+24}{5} = 11.$

Segunda ecuación: $a - 7b = \frac{31}{5} - 7\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{31-56}{5} = -5.$

2. Resolver el sistema: $\begin{aligned} 9x - 6y &= 11 \\ 5x + 2y &= 15. \end{aligned}$

Solución: Despejamos la variable x de ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{11+6y}{9} \\ x &= \frac{15-2y}{5}. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Igualamos las dos expresiones:

$$\frac{11+6y}{9} = \frac{15-2y}{5}$$

y resolvemos para y, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{11+6y}{9} &= \frac{15-2y}{5} \\ 5(11+6y) &= 9(15-2y) \\ 55 + 30y &= 135 - 18y \\ y &= \frac{80}{48} \\ y &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos este valor de y en la primera ecuación de (11.4) para encontrar el valor de x:

$$x = \frac{11 + 6\left(\frac{5}{3}\right)}{9} = \frac{7}{3}.$$

La solución es: $x = \frac{7}{3}$, $y = \frac{5}{3}$.

Comprobación: Sustituimos $x = \frac{7}{3}$ y $y = \frac{5}{3}$ en las ecuaciones originales:

Primera ecuación: $9x - 6y = 9\left(\frac{7}{3}\right) - 6\left(\frac{5}{3}\right) = 21 - 10 = 11.$

Segunda ecuación: $5x + 2y = 5\left(\frac{7}{3}\right) + 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{35+10}{3} = 15.$

3. Resolver el sistema: $\begin{aligned} 7c - 3d &= -4 \\ -14c + 6d &= 8. \end{aligned}$

Solución: Despejamos la variable d de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} d &= \frac{7c+4}{3} \\ d &= \frac{8+14c}{6}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Igualamos las dos ecuaciones:

$$\frac{7c+4}{3} = \frac{8+14c}{6} \tag{11.6}$$

y resolvemos la ecuación anterior para c, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{7c+4}{3} &= \frac{8+14c}{6} \\ 2(7c+4) &= 8 + 14c \\ 14c + 8 &= 8 + 14c \\ 8 &= 8. \end{aligned}$$

Hemos obtenido una identidad, así que para cualquier valor de c, la igualdad (11.6) es cierta (comprueba sustituyendo varios valores de c). Para cada valor de c que demos, utilizamos cualquiera de las ecuaciones de (11.5) para encontrar el valor correspondiente de d. Entonces este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones:

$$c \text{ arbitrario}, \quad d = \frac{7c+4}{3}.$$

11.2.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 39, resuelve los sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{aligned} 8x - y &= -9 \\ 6x - y &= 4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} -2a + y &= 1 \\ -a + 3y &= 4 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4r - s &= 8 \\ 4r - s &= -10 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5w + 3z &= -30 \\ 4w - 5z &= 13 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} r - s &= 3 \\ r + 2s &= 18 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -x + y &= -5 \\ 9x - 9y &= 36 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} -2c - d &= -84 \\ c + d &= 42 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3a + 6b &= -3 \\ 3a + 8b &= 7 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} -10w + 16z &= -38 \\ 5w - 8z &= 19 \end{aligned}$

10. $r+3s=-1$
$r+3s=4$

11. $-7a+4b=-3$
$6a-4b=8$

12. $x+y=-2$
$x+3y=12$

13. $2x+y=6$
$2x+y=-3$

14. $3w+z=21$
$-3w+z=-15$

15. $3w-4z=7$
$-6w+8z=-14$

16. $-6c+7d=-17$
$8c-12d=20$

17. $5a-4b=8$
$3a+b=15$

18. $3s+2r=42$
$3s-4r=24$

19. $t+w=15$
$\frac{t}{w}=4$

20. $\frac{w-7}{z+1}=\frac{3}{2}$
$2w+z=-3$

21. $\frac{a+1}{b}=\frac{5}{7}$
$2(b-5)=a$

22. $21a+10b=3$
$-9a+6b=15$

23. $2w+z=-11$
$11w-2z=-38$

24. $9x+4y=25$
$12x-6y=5$

25. $8r-15s=-12$
$8r-5s=0$

26. $3x-2y=-5$
$8y-2x=50$

27. $4a-6b=-8$
$-a+3b=-4$

28. $\frac{b}{4}+\frac{a}{6}=4$
$\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}=5$

29. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$
$\frac{15}{2}x-30=-5y$

30. $(c+d)+\frac{c-d}{3}=0=$
$\frac{10c-7d}{6}=-4$

31. $5t-3w=24$
$-4t+3w=-15$

32. $12r-9s=6$
$8r-27s=-24$

33. $2t+15w=-1$
$-3t-25w=1$

34. En un corral hay gallinas y borregos. Los animales tienen 60 cabezas y 150 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos borregos hay en el corral?

35. Dos hermanos trabajan en una misma empresa. La suma de sus salarios diarios es de \$177. El salario de uno de ellos menos \$61 es la tercera parte del salario del otro. ¿Cuál es el salario diario de cada uno?

36. Dos números enteros x y y satisfacen que, al formar el cociente del primero entre la suma del segundo más 5, se obtiene $\frac{1}{2}$. Si al primero se le suma 8, se obtiene 2 veces el segundo. Encuentra los números.

37. La diferencia de dos números es 58. El primero menos 24 es igual al segundo más 24. ¿Cuáles son los números?

38. Si al doble de mi edad le restas 5 años, obtienes la edad de mi papá. Si a mi edad le sumas 17 años y a la de mi papá le restas 17 años, obtienes el mismo número. ¿Puedes saber cuántos años tengo y cuántos tiene mi papá?

39. 10 kilos de huevo y 4 kilos de jitomate cuestan \$62. Tres kilos de huevo y 5 kilos de jitomate cuestan \$30. ¿Cuánto cuesta 1 kilo de jitomate? ¿Cuánto 1 kilo de huevo?

40. Un papá y su hijo de 6 años corren todos los fines de semana en un deportivo cercano a su casa. ¿Cuántas vueltas da cada uno a la pista, si se sabe que 6 veces el recorrido del papá más 5 veces el recorrido del hijo es igual a 63 vueltas y 3 veces el recorrido del papá es igual al recorrido del hijo más 21 vueltas?

41. Camino al mercado, una vendedora de flores planeaba comprar una licuadora con el producto de la venta del día. Pensaba: "Si vendo cada ramo en \$5, me faltarían \$16 para completar el costo de la licuadora. Si vendo cada ramo en \$7, podré comprar la licuadora y me sobrarán \$4". ¿Cuántos ramos llevaba y cuál es el costo de la licuadora?

42. Un paquete de huevo tiene cierto costo. Si se vende cada huevo en 40 centavos, vendiendo el paquete completo se obtendrá una ganancia de 90 centavos. Vendiendo cada uno en 35 centavos, la ganancia total será de sólo 30 centavos. ¿Cuál es el costo del paquete y cuántos huevos tiene?

43. Si a la base de un rectángulo le sumas 48 y multiplicas esta cantidad por la obtenida al restar 12 a la altura, obtienes el área del rectángulo. Si ahora sumas 16 a la base, restas 8 a la altura y multiplicas las cantidades obtenidas, vuelves a encontrar el área del rectángulo. ¿Cuánto mide la base y cuánto la altura? Sugerencia: escribe el área del rectángulo como el producto de la base por la altura.

44. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo si se sabe que uno de ellos mide 20°, y de los restantes el doble de uno menos el otro es igual a 50°?

45. En un criadero de perros hay 523 cachorros. Si hay 67 machos menos que hembras, ¿cuántos hay de cada sexo?

46. Escribe el número 49 en dos sumandos de tal manera que un cuarto de uno de ellos más un tercio del otro es igual a 14.

47. La suma de dos números es 3,015 y su cociente es 14. ¿Cuáles son estos números?

48. Con una barrica de 110 litros de vinagre se quiere llenar 168 botellas, unas de $\frac{1}{2}$ litro y otras de $\frac{3}{4}$. ¿Cuántas botellas de cada clase se utilizarán?

11.3 Método de suma y resta

Si en $\frac{x}{y}$ le restamos uno al numerador y le sumamos tres al denominador, el resultado es $\frac{2}{5}$. En cambio, si al numerador le sumamos uno y al denominador le restamos 3, el resultado es $\frac{3}{2}$. ¿Cuál es el valor del numerador y del denominador de la fracción original?

Solución: $\frac{x}{y}$ es la fracción buscada. Ahora planteamos el problema siguiendo las indicaciones:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{y+3}&=\frac{2}{5}\\ \frac{x+1}{y-3}&=\frac{3}{2}.\end{aligned} \tag{11.7}$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones, debemos escribirlas en una forma más sencilla, suprimiendo los denominadores. Multiplicamos la primera ecuación primero por 5 y después por $y+3$, con lo que obtenemos la ecuación:

$$5(x-1)=2(y+3).$$

Análogamente, multiplicamos la segunda ecuación de (11.7), primero por 2 y después por $y-3$:

$$2(x+1)=3(y-3).$$

Ahora agrupamos los términos en x y y, poniendo los términos con variables de un lado de la ecuación y el término constante del otro.

$$\begin{aligned}5x-2y&=11\\ 2x-3y&=-11.\end{aligned} \tag{11.8}$$

Resolvemos el sistema obtenido en (11.8) de la siguiente manera:

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 5 para que el coeficiente de x sea igual en ambas ecuaciones, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}10x-4y&=22\\ 10x-15y&=-55.\end{aligned}$$

Ahora restamos la segunda ecuación de la primera, con lo que obtenemos:

$$11y=77.$$

Resolviendo para y obtenemos:

$$y=7.$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación de (11.8) y despejamos x para encontrar su valor:

$$\begin{aligned}5x-2(7)&=11\\ 5x&=25\\ x&=5.\end{aligned}$$

Entonces la fracción buscada es:

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{7}.$$

Comprobación: Sustituimos los valores $x=5$ y $y=7$ en las ecuaciones (11.7):

$$\text{Primera ecuación:}\quad \frac{x-1}{y+3}=\frac{5-1}{7+3}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

$$\text{Segunda ecuación:}\quad \frac{x+1}{y-3}=\frac{5+1}{7-3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Método de suma y resta

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables utilizando este método, seguimos estos pasos:

Paso 1 Multiplicamos cada ecuación por aquellos números que hagan que, en ambas ecuaciones, los coeficientes de una de las variables sean iguales, excepto tal vez por el signo.

Paso 2 Sumamos o restamos las ecuaciones para eliminar esa variable.

Paso 3 Resolvemos la ecuación resultante para la variable que quedó.

Paso 4 Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Paso 5 Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

A este método también se le conoce como el *método de reducción.*

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema:
$$\begin{aligned} 3r+3s &= 1\\ r-s &= 3. \end{aligned}$$

Solución:

Paso 1 Para resolver el sistema, multiplicamos la segunda ecuación por 3 para que el coeficiente de la s en ambas ecuaciones difiera sólo en el signo.

$$\begin{aligned} 3r+3s&=1\\ 3r-3s&=9. \end{aligned}$$

Paso 2 Sumamos las ecuaciones:

$$6r=10.$$

Paso 3 Resolvemos para r:

$$r=\frac{5}{3}.$$

Paso 4 Sustituimos este valor en la segunda ecuación del sistema original para encontrar el valor de s:

$$\frac{5}{3}-s=3$$

$$s=-\frac{4}{3}.$$

La solución es: $r=\frac{5}{3}$, $s=-\frac{4}{3}$.

Paso 5

Comprobación: Sustituimos los valores $r = \frac{5}{3}$ y $s = -\frac{4}{3}$ en el sistema original:

$$\text{Primera ecuación:} \quad 3r + 3s = 3\left(\frac{5}{3}\right) + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = 1.$$

$$\text{Segunda ecuación:} \quad r - s = \frac{5}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = 3.$$

2. Resolver el sistema:
$$\begin{aligned} 6x + 5y &= 28 \\ 10x + 7y &= 52. \end{aligned}$$

Solución: Para resolver el sistema, multiplicaremos cada una de las ecuaciones por un factor, de tal manera que los coeficientes de x coincidan en ambas ecuaciones. Observa que una posibilidad es multiplicar la primera por 10 y la segunda por 6; sin embargo, puesto que tanto 6 como 10 tienen el 2 como factor común, basta con multiplicar la primera por 5 y la segunda por 3:

$$\begin{aligned} 30x + 25y &= 140 \\ 30x + 21y &= 156. \end{aligned}$$

Ahora restamos la segunda ecuación de la primera y resolvemos para y:

$$\begin{aligned} 4y &= -16 \\ y &= -4. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor obtenido en la primera ecuación original para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} 6x + 5(-4) &= 28 \\ 6x &= 48 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

La solución es: $x = 8$, $y = -4$.

Comprobación: Sustituimos los valores $x = 8$ y $y = -4$ en el sistema original:

$$\text{Primera ecuación:} \quad 6x + 5y = 6(8) + 5(-4) = 28.$$
$$\text{Segunda ecuación:} \quad 10x + 7y = 10(8) + 7(-4) = 52.$$

3. La suma de los dígitos de un número x de dos cifras es 12. El número dividido entre 6 es igual al triple del dígito de las unidades, más 2. Encuentra el número x.

Solución: Llamamos d al dígito de las decenas de x, y u al de las unidades. Entonces

$$x = 10d + u.$$

La suma de los dígitos de x es 12; es decir,

$$d + u = 12.$$

x dividido entre 6 es igual al triple del dígito de las unidades, más 2; es decir,

$$\frac{x}{6} = 3u + 2, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{10d + u}{6} = 3u + 2.$$

Planteemos el sistema:

$$\begin{aligned} d+u&=12 \\ \frac{10d+u}{6}&=3u+2. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Simplificando la segunda ecuación de (11.9) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} d+u&=12 \\ 10d-17u&=12. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Multiplicamos por -10 la primera ecuación de (11.10):

$$\begin{aligned} -10d-10u&=-120 \\ 10d-17u&=12. \end{aligned}$$

Sumamos estas dos ecuaciones, con lo que obtenemos:

$$-27u=-108.$$

Resolvemos para u la ecuación anterior:

$$u=\frac{-108}{-27}=4.$$

Ahora sustituimos este valor de u en la primera ecuación de (11.9) y despejamos d para encontrar su valor:

$$d=12-u=12-4=8.$$

Entonces el número buscado es 84.

Comprobación: Sustituyendo los valores $d=8$ y $u=4$ en la primera ecuación de (11.9) tenemos:

$$d+u=8+4=12.$$

Sustituyéndolos en la segunda ecuación de (11.9):

Lado izquierdo: $\frac{10d+u}{6}=\frac{10(8)+4}{6}=14.$

Lado derecho: $3u+2=3(4)+2=14.$

Por tanto, los dos lados de la segunda ecuación son iguales.

11.3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 39, resuelve los sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{aligned} 2x-y&=19 \\ -x&=-5-2y \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} a+6b&=11 \\ 5a-15b&=10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 7x+21w&=10 \\ 14x-7w&=-1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} -3c+5d&=21 \\ c-d&=-5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 6x+2y&=14 \\ -2x+y&=7 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 8r-3s&=3 \\ 16r&=18-2s \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2t+u&=3 \\ t+2u&=3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2w+2z&=10 \\ 2w-z&=4 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} w-5z&=-9 \\ -2w+15z&=1 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 9x-y&=0 \\ 6x+2y&=8 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 3y-2x&=11 \\ y+4x&=6 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 4a+2d&=9 \\ 2a-d&=1 \end{aligned}$

13. $10w - 17z = -76$
$15w - 4z = 0$

14. $2x - 2y = 14$
$x + y = 1$

15. $7a + 7b = 4$
$-2a + 3b = 1$

16. $x + 2y = 15$
$3x - y = 0$

17. $3c + 3d = 15$
$2c - 2d = 14$

18. $8w - 15y = -56$
$w + y = -7$

19. $t - u = -1$
$-3t + 4u = -2$

20. $5x + y = 10$
$6x - 2y = -4$

21. $5x + y = 0$
$x + 5y = 0$

22. $3x + 2y = 13$
$9x - 4y = -21$

23. $45c - 8d = -11$
$3c - d = 3$

24. $5x + 3y = 8$
$10x - 5y = -14$

25. $15a - 2b = 21$
$5a + 4b = 35$

26. $14t + 5u = 35$
$-17t - 3u = 22$

27. $7x - 23y = 13$
$-16x + 59y = 4$

28. $x - y = -6$
$11x + 11y = 121$

29. $3r - 2s = 50$
$2r - s = 0$

30. $2w + 3z = 5$
$3w + 2z = 5$

31. $\dfrac{x}{4} - \dfrac{3z}{4} = -20$
$\dfrac{x}{7} + \dfrac{z}{6} = 10$

32. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{w}{3} = 0$
$2x + \dfrac{w}{2} = -15$

33. $\dfrac{3}{4}a - b = 8$
$a + \dfrac{2}{5}b = 2$

34. $12w + 11z = -13$
$\frac{16}{3}w + 3z = -2$

35. $c + d = \frac{1}{4}$
$c - d = 4$

36. $2x - y = 6$
$x - y = \frac{1}{6}$

37. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{5}y = 5$
$-\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3}y = -4$

38. $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{8}{7}y = 0$
$\dfrac{4}{3}x - \dfrac{3}{4}y = 0$

39. $\dfrac{2a - 3b}{3} = \dfrac{b + 1}{2}$
$\dfrac{4a + 3b}{7} = a - 3$

40. Si en $\frac{a}{b}$ le sumas 5 al numerador y le restas 2 al denominador, el resultado es $\frac{8}{5}$. Si al numerador le sumas 1 y al denominador le restas 3, el resultado es $\frac{1}{2}$. ¿Cuáles son los valores del numerador y del denominador de la fracción?

41. La temperatura mínima tomada en la Ciudad de México en dos días distintos fue tal que 5 veces la del primer día más 6 veces la del segundo es igual a 121 grados. Seis veces la del primer día más 5 veces la del segundo también es 121 grados. ¿Cuáles fueron las temperaturas mínimas en cada uno de los días?

42. Encuentra dos números cuya diferencia es 1 y cuya suma es $\frac{5}{2}$.

43. Si en $\frac{w}{z}$ le sumas el denominador al numerador, obtienes $\frac{13}{7}$. Si le restas 4 al numerador y le sumas 3 al denominador, el resultado es $\frac{1}{5}$. ¿Cuáles son los números?

44. Si en $\frac{x}{y}$ le sumas 7 al numerador y le restas 1 al denominador, obtienes 1. Si le restas 4 al numerador y 11 al denominador, obtienes $\frac{3}{2}$. ¿Cuáles son los números?

45. Si al numerador y al denominador de $\frac{z}{w}$ le restas 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Si al numerador y al denominador de la fracción le sumas 3, la fracción es $\frac{3}{4}$. Encuentra la fracción.

46. La suma de dos números es 133. Si al menor de ellos le sumas 95, obtienes el mayor. Encuentra los números.

47. Dos amigos deciden hacerse socios, y aportan para la sociedad cantidades x y y respectivamente. Juntos reúnen \$27,120. Sin embargo, antes de emprender el negocio, uno gasta $\frac{3}{4}$ partes de la cantidad que tenía y el otro gasta \$7,745, y en ese momento a ambos les queda la misma cantidad. ¿Cuáles eran las cantidades iniciales?

48. Luis tiene 17 monedas. Solamente tiene monedas de 10 y de 20 centavos. Si en total tiene \$2.40, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 20 tiene?

49. Rosa y Julia tienen \$75 entre las dos. Si Rosa tiene el triple de la suma de lo que tiene Julia más \$1, ¿cuánto dinero tiene cada una?

50. Si un cuarto de gruesa de naranjas, es decir, 36 naranjas, y una docena de toronjas cuestan \$18, y si 4 toronjas cuestan igual que una docena de naranjas, ¿cuánto cuesta cada naranja y cuánto cada toronja?

51. Encuentra un número de dos cifras que satisfaga las siguientes condiciones. Al sumar las cifras se obtiene 14, y si sumas 13 unidades al número buscado, el resultado es 90.

52. Encuentra un número de dos cifras que satisfaga las siguientes condiciones: 4 veces la cifra de las decenas menos 5 veces la de las unidades es igual a −8. El doble de la cifra de las decenas menos 8 es igual a la cifra de las unidades.

53. Dos números suman $\frac{245}{4}$. Si restamos $\frac{1}{8}$ al mayor y se lo sumamos al menor obtenemos dos cantidades iguales. ¿Cuáles son dichos números?

Arquímedes (287-212 a. C.)
Arquímedes, considerado uno de los más grandes pensadores de la Antigüedad, nació y murió en Siracusa (Sicilia). Se cuenta la anécdota de que el rey Herón sospechaba que un joyero había adulterado la corona de oro puro que le había encargado fabricar, y le pidió a Arquímedes que confirmara o desechara su sospecha. Un día tomando un baño, Arquímedes reflexionó que el agua que se desbordaba de la tina tenía que ser igual al volumen de su cuerpo que estaba sumergido y salió desnudo por las calles gritando "¡Eureka, eureka!" (¡Lo encontré!). Con base en esta idea pudo determinar el volumen de la corona. Al hacerlo comprobó que la corona tenía un volumen mayor que el de un objeto de oro del mismo peso y, por tanto, no era de oro puro.

11.4 Método de sustitución

Tomando iguales volúmenes de materiales distintos, en general obtendremos pesos distintos. El peso depende justamente del material utilizado; en esto consiste el llamado *peso específico* o *densidad* de un material y se expresa en kg/dm^3. Por ejemplo, si un bloque de cristal pesa 30 kilos y el mismo volumen de agua pesa 9 kilos, entonces la densidad del cristal en relación con el agua, o simplemente la densidad, es $\frac{30}{9} = 3.33$.

La suma de las densidades del acero y del oro es 27.08. La densidad del oro es mayor que la del acero, pero si restamos 5.72 a la densidad del oro y le sumamos 5.72 a la del acero, obtenemos dos cantidades iguales. ¿Cuál es la densidad de cada material?

Solución: Llamamos o a la densidad del oro y a a la del acero. Entonces, con los datos del problema, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} o + a &= 27.08 \\ o - 5.72 &= a + 5.72. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Despejamos a de la primera ecuación:

$$a = 27.08 - o. \tag{11.12}$$

Sustituimos este valor de a en la segunda ecuación de (11.11):

$$o - 5.72 = (27.08 - o) + 5.72.$$

Resolviendo esta ecuación para o obtenemos:

$$\begin{aligned} 2o &= 27.08 + 5.72 + 5.72 \\ o &= 19.26. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en (11.12) encontramos el valor de a:

$$a = 27.08 - 19.26 = 7.82.$$

Así, la densidad del oro es de 19.26 y la densidad del acero es de 7.82.

Comprobación: Sustituimos los valores $o = 19.26$ y $a = 7.82$ obtenidos, en las ecuaciones (11.11):

Primera ecuación:

$$o + a = 19.26 + 7.82 = 27.08.$$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $o - 5.72 = 19.26 - 5.72 = 13.54.$
Lado derecho: $a + 5.72 = 7.82 + 5.72 = 13.54.$

Por tanto, ambas ecuaciones se satisfacen.

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables mediante el método de sustitución, seguimos los pasos indicados a continuación:

Paso 1 Despejamos una de las variables de una de las ecuaciones.

Paso 2 Sustituimos en la otra ecuación la expresión encontrada y la resolvemos para encontrar el valor de la variable.

Paso 3 Sustituimos dicho valor en la ecuación del paso 1 y resolvemos para obtener el valor de la otra variable.

Paso 4 Comprobamos, sustituyendo los valores en ambas ecuaciones.

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema $2x+2y=-5$
$$9x+6y=-15.$$

Solución:

Paso 1 Despejamos y de la primera ecuación del sistema:

$$y=\frac{-5-2x}{2}. \tag{11.13}$$

Paso 2 Sustituimos este valor en la segunda ecuación del sistema y resolvemos la ecuación:

$$9x+6\left(\frac{-5-2x}{2}\right)=-15$$
$$9x+3(-5-2x)=-15$$
$$9x-6x=-15+15$$
$$3x=0$$
$$x=0.$$

Paso 3 Sustituimos el valor de x en la ecuación (11.13) para obtener el valor de y:

$$y=\frac{-5-2(0)}{2}=-\frac{5}{2}.$$

La solución es $x=0$ y $y=-\frac{5}{2}$.

Paso 4

Comprobación: Sustituimos $x=0$ y $y=-\frac{5}{2}$ en el sistema original:

Primera ecuación: $2x+2y=2(0)+2\left(-\frac{5}{2}\right)=-5.$

Segunda ecuación: $9x+6y=9(0)+6\left(-\frac{5}{2}\right)=-15.$

2. Entre 4 primos tienen 256 canicas. Si a las canicas del primero se le suman 3 canicas, a las canicas del segundo se le restan 3, las del tercero se multiplican por 3 y las del cuarto se dividen entre 3, todos los primos tendrán la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas tiene cada primo?

Solución: Llamamos x, y, z y w al número de canicas de cada uno de los primos en el orden del enunciado. Entonces,

$$x+y+z+w=256. \tag{11.14}$$

Como el número de canicas del primero más 3 es igual al número de canicas del segundo menos 3, tenemos:

$$x+3=y-3.$$

De las otras dos condiciones dadas en el problema tenemos:

$$x+3=3z$$
$$x+3=\frac{w}{3}.$$

Aunque en este problema tenemos más de dos ecuaciones e incógnitas, también podemos utilizar el método de sustitución enunciado, ya que podemos ver que en las tres últimas ecuaciones, las variables y, z, w dependen sólo de x. Así que despejamos y, z y w de dichas ecuaciones respectivamente, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= x+6 \\ z &= \frac{x+3}{3} \\ w &= 3(x+3). \end{aligned} \tag{11.15}$$

Ahora, sustituyendo en (11.14) obtenemos:

$$x+x+6+\frac{x+3}{3}+3(x+3)=256.$$

Simplificando y resolviendo para x:

$$\begin{aligned} x+x+6+\frac{x+3}{3}+3(x+3) &= 256 \\ \frac{16x+48}{3} &= 256 \\ x &= 45. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (11.15) encontramos todos los valores:

$$\begin{aligned} y &= 51 \\ z &= 16 \\ w &= 144. \end{aligned}$$

El primer primo tiene 45 canicas, el segundo 51, el tercero 16 y el cuarto 144 canicas.

Comprobación: Si $x = 45$, $y = 51$, $z = 16$ y $w = 144$, entonces:

Primera ecuación:

$$x+y+z+w=45+51+16+144=256.$$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $x+3=45+3=48$. Lado derecho: $y-3=51-3=48$.

Tercera ecuación:

Lado izquierdo: $x+3=45+3=48$. Lado derecho: $3z=3(16)=48$.

Cuarta ecuación:

Lado izquierdo: $x+3=45+3=48$. Lado derecho: $\frac{w}{3}=\frac{144}{3}=48$.

3. Encuentra el número a de dos cifras que satisface las siguientes condiciones: la cifra de las decenas es 4 unidades mayor que la de las unidades. Si inviertes las cifras y restas la cantidad obtenida del número buscado, se obtiene 45.

Solución: Llamamos d a la cifra de las decenas y u a la de las unidades. Entonces el número buscado a es:

$$a = 10d + u.$$

Como la cifra de las decenas es 4 unidades mayor que la de las unidades entonces

$$d = u + 4.$$

De los otros datos del problema obtenemos la siguiente ecuación:

$$10d + u - (10u + d) = 45.$$

Ahora sustituimos d:

$$10(u+4) + u - (10u + (u+4)) = 45.$$

De donde obtenemos:

$$\begin{aligned} 10u + 40 + u - 11u - 4 &= 45 \\ 36 &= 45. \end{aligned}$$

Como no es cierto que $36 = 45$, ningún valor de u satisface la última ecuación, así que el sistema no tiene solución.

No es posible encontrar un número de dos cifras que satisfaga las condiciones especificadas.

11.4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 33, resuelve los sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

1. $\begin{aligned} 3x + 5 &= 3 \\ 2x + 5y &= 5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} -2x + y &= 1 \\ -x + 3y &= 4 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 5a - 2b &= -23 \\ -8a + 3b &= 18 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3.5r - 4s &= -9 \\ 7r + 3s &= 4 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 7a + b &= 3 \\ -14a - 2b &= -6 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3w - 6z &= 12 \\ w + 2z &= 4 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - y &= -6 \\ -9x + 9y &= 54 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 5x - 3y &= -2 \\ 9x - 5y &= 4 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 3x + 22y &= 31 \\ 7x - 11y &= 30 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 6a + b &= 0 \\ -11a - 2b &= -14 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 9r + 4t &= 15 \\ 13r + 8t &= 5 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3s + t &= 6 \\ -27s - 8t &= -49 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 18w + 12z &= 0 \\ -14w + 16z &= 19 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} -10x - 17y &= 9 \\ 25x + 30y &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} -18r + 9t &= -15 \\ 33r - 11t &= 11 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 2x + 2y &= -5 \\ 9x + 6y &= -15 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 19a + 14b &= 95 \\ 3a - b &= -15 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 21x - 14y &= 7 \\ 4x + 3y &= -44 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 32r + 12t &= -12 \\ 6r + 5t &= 17 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 49x + 10y &= 2 \\ -31x - 5y &= 12 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} -10a + 11b &= 2 \\ 5a - 4b &= 2 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 13x + 13y &= 0 \\ -11x - 17y &= \tfrac{42}{5} \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 45w + 21z &= -\tfrac{3}{2} \\ 88w + 37z &= -7 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} r + t &= \tfrac{1}{5} \\ 15r + 3t &= 5 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 9a - 8b &= -6 \\ 23a + 11b &= 79 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} -15x - 8y &= -96 \\ 27x + y &= 12 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 17w + 14t &= 25 \\ 19w + 3t &= -19 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 5s - t &= -4 \\ 19s - 4t &= -25 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} a - b &= 11 \\ 51a - 73b &= -121 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 9c + 3d &= -48 \\ 4c - 6d &= -58 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} &= \frac{15}{4} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} \frac{x}{6} + \frac{y}{7} &= 0 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{7} &= -4 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} \frac{3x}{2} - \frac{y}{5} &= \frac{29}{5} \\ \frac{3x}{4} + \frac{9y}{5} &= \frac{6}{5} \end{aligned}$

34. La densidad del vino de Borgoña es menor que la de la leche. La diferencia entre las densidades de ambos líquidos es 0.039 mientras que la suma es 2.021. Encuentra la densidad de cada uno.

35. El perímetro de un triángulo es 12 metros. Sus lados x, y y z satisfacen las siguientes igualdades $z-3=y-2=x-1$. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

36. Un rectángulo de perímetro 18 cm es tal que uno de sus lados es 3 cm mayor que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

37. Encuentra un número w de dos cifras que satisface las siguientes condiciones: la cifra de las decenas es 4 unidades mayor que la de las unidades. La suma de w más el número que se obtiene al invertir sus cifras es 88. ¿Cuál es el número?

38. En una empresa laboran x personas que reciben como salario $30 diarios cada una, y y personas que reciben $35 cada una. Si en total trabajan en la empresa 75 personas y el monto total de los salarios diarios es $2,415, ¿cuántas reciben $30 y cuántas $35?

39. La densidad del plomo menos la densidad de la plata es igual a 0.88. Si al doble de la densidad de la plata le restamos 9.59, obtenemos la densidad del plomo. Encuentra las densidades del plomo y la plata.

40. Los lados de un rectángulo miden 8 y 6 metros, respectivamente. Encuentra las medidas de los lados de un rectángulo cuyos lados están en la misma razón que el rectángulo dado y que tiene 16 metros de diferencia entre el semiperímetro y su diagonal.

41. Si a la densidad del aceite de linaza le restamos 2 centésimos, obtenemos la densidad del aceite de oliva. Si restamos la densidad del aceite de oliva al quíntuple de la densidad del aceite de linaza, obtenemos 3.78. ¿Cuál es la densidad de cada uno de los aceites?

42. Un número de dos cifras cumple con las siguientes condiciones: la cifra de las unidades es 3 unidades menor que la de las decenas. Cinco veces la cifra de las decenas menos 5 veces la de las unidades es igual a 0. Encuentra el número.

43. Un número de dos cifras es tal que la cifra de las decenas es 2 unidades mayor que la cifra de las unidades. Si se resta al número buscado el número obtenido al invertir las cifras disminuido en 4 unidades, el resultado es 22. ¿Cuál es el número?

44. Cuatro veces la densidad del vidrio menos 3 veces la densidad del cristal es igual a 21 centésimos. La densidad del vidrio más 30 centésimos es igual a la densidad del cristal menos 48 centésimos. ¿Cuál es la densidad del vidrio y cuál la del cristal?

45. La densidad del corcho es un número menor que 1. Si la expresamos con dos decimales, el dígito de los décimos es dos unidades menor que el de los centésimos. La suma de ambos dígitos es 6. ¿Cuáles son los dígitos? ¿Cuál es la densidad del corcho?

11.5 Otros sistemas de ecuaciones simultáneas

Encuentra el área del trapecio de altura 3 cuyas bases satisfacen las siguientes condiciones: 10 veces la base mayor menos 7 veces la base menor es igual al producto de las bases. 14 veces la base menor menos 5 veces la base mayor es igual también al producto de las bases. Todas las dimensiones deberán estar dadas en centímetros.

El área de un trapecio

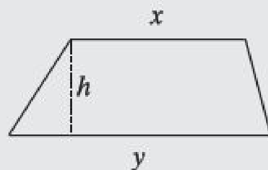


Figura 11.5

es la mitad de la altura (h) por la suma de las bases ($x + y$).

Solución: Llamemos x a la base menor y y a la mayor. Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -7x+10y &= xy \\ 14x-5y &= xy. \end{aligned} \tag{11.16}$$

Es posible dividir entre xy ya que dicho producto no es cero. Entonces:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{y}+\frac{10}{x} &= 1 \\ \frac{14}{y}-\frac{5}{x} &= 1. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Estas ecuaciones no son lineales; sin embargo, podemos resolver estos sistemas sin suprimir los denominadores. Para ello, utilizamos el método de suma y resta.

Multiplicamos por 2 la primera ecuación de (11.17):

$$-\frac{14}{y}+\frac{20}{x}=2$$
$$\frac{14}{y}-\frac{5}{x}=1,$$

sumando las ecuaciones:

$$\frac{15}{x}=3.$$

Resolviendo para x la ecuación anterior, obtenemos:

$$x=5.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación de (11.17) y resolvemos para y:

$$-\frac{7}{y}+\frac{10}{5}=1$$
$$\frac{7}{y}=-1+2$$
$$y=7.$$

El área del trapecio es:

$$\frac{1}{2}(3)(5+7)=18.$$

Así, el área del trapecio es de 18 cm^2.

Comprobación: Sustituimos los valores de $x=5$ y $y=7$ en (11.16):

Primera ecuación:

Lado izquierdo: $-7x+10y=-7(5)+10(7)=35.$

Lado derecho: $xy=5(7)=35.$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $14x-5y=14(5)-5(7)=35.$

Lado derecho: $xy=5(7)=35.$

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema: $\frac{9}{x}+\frac{8}{y}=-1$

$$\frac{12}{x}-\frac{7}{y}=\frac{15}{2}.$$

Solución: Para resolver este sistema, multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por 8, con lo que obtenemos:

$$\frac{63}{x}+\frac{56}{y}=-7$$
$$\frac{96}{x}-\frac{56}{y}=60.$$

Ahora las sumamos para eliminar a la y:

$$\frac{159}{x}=53.$$

Resolvemos para x:

$$x = \frac{159}{53} = 3.$$

Sustituimos este valor de x en la segunda ecuación del sistema original y resolvemos para y:

$$\frac{12}{x} - \frac{7}{y} = \frac{15}{2}$$
$$\frac{12}{3} - \frac{7}{y} = \frac{15}{2}$$
$$y = -2.$$

Comprobación: Sustituimos los valores $x = 3$ y $y = -2$ en el sistema original:

$$\text{Primera ecuación: } \frac{9}{x} + \frac{8}{y} = \frac{9}{3} + \frac{8}{-2} = 3 - 4 = -1.$$

$$\text{Segunda ecuación: } \frac{12}{x} - \frac{7}{y} = \frac{12}{3} - \frac{7}{-2} = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}.$$

2. Resolver el sistema

$$\frac{4}{x+5} - \frac{6}{y-2} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{3}{x+5} + \frac{18}{y-2} = \frac{7}{2}.$$

Solución: Para resolver este sistema, multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{3}$, con lo que obtenemos:

$$\frac{4}{x+5} - \frac{6}{y-2} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{x+5} + \frac{6}{y-2} = \frac{7}{6}.$$

Ahora las sumamos para eliminar el término que tiene a $y - 2$ como denominador:

$$\frac{5}{x+5} = \frac{15}{6}.$$

Resolvemos para x:

$$\frac{5(6)}{15} = x + 5$$
$$2 - 5 = x$$
$$-3 = x.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación del sistema original y resolvemos para y:

$$\frac{4}{x+5} - \frac{6}{y-2} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{4}{2} + \frac{6}{y-2} = \frac{4}{3}$$
$$2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{y-2}$$
$$y - 2 = 9$$
$$y = 11.$$

Comprobación: Sustituimos los valores $x = -3$ y $y = 11$ en el sistema original:

Primera ecuación: $\frac{4}{x+5} - \frac{6}{y-2} = \frac{4}{-3+5} - \frac{6}{11-2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Segunda ecuación: $\frac{3}{x+5} + \frac{18}{y-2} = \frac{3}{-3+5} + \frac{18}{11-2} = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

11.5.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 24, resuelve los sistemas de ecuaciones.

1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{c} - \frac{1}{d} = 0$; $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{5}$

3. $\frac{13}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{3}$; $\frac{9}{x} - \frac{7}{y} = \frac{13}{2}$

4. $\frac{5}{x} - \frac{6}{y} = -\frac{7}{4}$; $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$

5. $\frac{12}{w} - \frac{21}{z} = -1$; $\frac{30}{w} - \frac{14}{z} = 3$

6. $\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = -12$; $\frac{-8}{6x} + \frac{7}{y} = -18$

7. $\frac{4}{a} + \frac{8}{c} = -5$; $\frac{7}{a} - \frac{5}{c} = \frac{3}{4}$

8. $\frac{25}{x} + \frac{49}{y} = 71$; $\frac{20}{4x} - \frac{21}{3y} = -5$

9. $\frac{6}{r} - \frac{5}{s} = \frac{9}{2}$; $\frac{9}{r} - \frac{8}{s} = 7$

10. $\frac{12}{a} + \frac{15}{b} = 0$; $\frac{64}{a} + \frac{25}{b} = -11$

11. $\frac{3}{8w} + \frac{7}{12z} = \frac{1}{4}$; $\frac{9}{20w} - \frac{6}{15z} = -3$

12. $\frac{21}{c} - \frac{42}{d} = 4$; $\frac{35}{c} - \frac{18}{d} = -2$

13. $\frac{3}{y} - \frac{1}{x} = -1$; $\frac{6}{y} - \frac{1}{x} = 4$

14. $\frac{5}{x-2} - \frac{2}{y+3} = 12$; $\frac{-2}{x-2} + \frac{5}{y+3} = 12$

15. $\frac{15}{r-3} - \frac{16}{s-5} = 7$; $\frac{25}{r-3} + \frac{24}{s-5} = -1$

16. $\frac{9}{w+6} + \frac{7}{z+1} = -2$; $\frac{16}{w+6} + \frac{9}{z+1} = \frac{5}{6}$

17. $\frac{12}{x+2} - \frac{15}{y+8} = -\frac{3}{5}$; $\frac{-7}{x+2} - \frac{10}{y+8} = -\frac{17}{5}$

18. $\frac{18}{r-4} + \frac{20}{s+7} = 13$; $\frac{16}{r-4} - \frac{15}{s+7} = 5$

19. $\frac{8}{w+9} - \frac{4}{z-3} = \frac{4}{3}$; $\frac{6}{w+9} + \frac{8}{z-3} = \frac{17}{6}$

20. $\frac{11}{x+5} - \frac{56}{y+11} = 3$; $\frac{13}{x+5} - \frac{14}{y+11} = 11$

21. $\frac{21}{r-12} - \frac{48}{s-15} = 5$; $\frac{17}{r-12} - \frac{22}{s-15} = -\frac{1}{6}$

22. $\frac{24}{w+20} + \frac{16}{z-1} = 4$; $\frac{15}{w+20} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} = \frac{8}{7}$

23. $\frac{20}{x+2} + \frac{30}{y-17} = -2$; $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{y-17} = -\frac{1}{5}$

24. $\frac{10}{a-5} + \frac{20}{b+6} = -4$; $\frac{4}{a-5} - \frac{1}{b+6} = -15$

25. La suma de los recíprocos de dos números es $\frac{5}{6}$. La suma del doble del recíproco del primer número más el triple del recíproco del segundo es igual a 2. Encuentra dichos números.

26. El producto de los dos términos de una fracción es 80. Obtendríamos una fracción con términos iguales si al numerador de la fracción original le sumáramos 1 y restáramos 1 al denominador. Encuentra los términos de la fracción original.

27. La suma de dos fracciones, ambas con numerador igual a 1, es 3 y su diferencia es 1. Encuentra las fracciones.

28. La suma de los recíprocos de dos números es $\frac{13}{40}$. Cinco veces el recíproco del primer número, más 4 veces el recíproco del segundo es igual a $\frac{3}{2}$. Encuentra dichos números.

29. Dos dígitos satisfacen las siguientes condiciones. 6 veces el primero más 15 veces el segundo es igual a 8 veces el producto de ambos. Veintiún veces el segundo menos 12 veces el primero es igual al producto de los números. Encuentra los dígitos.

30. Los lados de un rectángulo satisfacen las siguientes condiciones: 4 veces el largo más 3 veces el ancho es igual al triple del área. El área es igual a 8 veces el largo menos 9 veces el ancho. Encuentra las dimensiones del rectángulo.

31. Juan y Ricardo ponen a competir a sus perros una distancia de 350 metros. Como el perro de Ricardo es más chico, deciden darle 12 metros de ventaja y gana el perro de Juan por 2 segundos. Deciden la revancha, pero esta vez le dan al perro de Ricardo 25 metros de ventaja y llegan empatados. ¿Cuántos metros por segundo recorre cada perro?

32. Un triángulo rectángulo satisface que 5 veces el cateto menor menos el triple del cateto mayor es igual a un sexto del área. El doble del área es igual al triple del cateto menor más el doble del cateto mayor. Encuentra la dimensiones del triángulo.

33. Un número de dos cifras satisface las siguientes condiciones. El producto de sus cifras es igual a 5 veces la cifra de las decenas más 5. El doble de la cifra de las unidades es igual a 14 menos 10 veces el recíproco de la cifra de las decenas. Encuentra el número.

34. Un prisma rectangular de base cuadrada es tal que el quíntuple del lado de la base es igual a 6 metros más el producto de ese lado por la altura. Setenta y ocho metros más el triple del lado de la base es igual a 4 veces el área de una de las caras rectangulares. ¿Cuál es el volumen del prisma?

11.6 Método de Gauss

Karl Friedrich Gauss
Matemático, físico y astrónomo alemán, nació en la ciudad de Brunswick en 1777. Sus trabajos fueron notables; sus obras, escritas en 14 volúmenes, están casi todas en latín.

Al resolver el sistema de ecuaciones que definen las siguientes condiciones, es posible conocer el año de la muerte de Gauss. El número que desconocemos tiene cuatro cifras, la primera es 1. El número de tres cifras que falta, satisface que: 5 veces la cifra de las unidades, más 10 veces la cifra de las decenas, menos 5 veces la de las centenas es igual a 35. La cifra de las unidades menos la cifra de las decenas, más 5 veces la de las centenas es igual a 40. El doble de la cifra de las centenas, menos la de las unidades, más el doble de la de las decenas es igual a 21.

Solución: Llamemos x, y y z a las cifras de las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente.
Escribimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x+10y-5z&=35\\ x-y+5z&=40\\ -x+2y+2z&=21. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Observemos que el coeficiente de x en la segunda ecuación es 1, así que escribimos primero esta ecuación. Si ninguna ecuación tuviera coeficiente 1 en la primera variable, multiplicamos por el número que corresponda para que ello suceda en la primera ecuación. Así:

$$\begin{aligned} x-y+5z&=40\\ 5x+10y-5z&=35\\ -x+2y+2z&=21. \end{aligned} \tag{11.19}$$

Multiplicamos por (–5) la primera ecuación de (11.19) y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{r} -5x+5y-25z=-200 \\ 5x+10y-5z=\quad 35 \\ \hline 15y-30z=-165, \end{array}$$

simplificamos dividiendo el resultado entre 15 y obtenemos $y-2z=-11$; ahora sustituimos en el sistema la segunda ecuación por la que acabamos de obtener:

$$\begin{array}{r} x-y+5z=40 \\ y-2z=-11 \\ -x+2y+2z=21. \end{array} \tag{11.20}$$

Ahora repetimos el procedimiento usando las ecuaciones primera y tercera de este sistema, para eliminar x en la tercera ecuación de (11.20). Como en este caso el coeficiente de x en la última ecuación es -1, no hace falta multiplicar la primera por algún factor, sólo sumamos la primera y la tercera:

$$\begin{array}{r} x-y+5z=40 \\ -x+2y+2z=21 \\ \hline y+7z=61. \end{array}$$

Sustituimos la tercera ecuación de (11.20) por la resultante y obtenemos:

$$\begin{array}{r} x-y+5z=40 \\ y-2z=-11 \\ y+7z=61. \end{array} \tag{11.21}$$

En la segunda ecuación y tiene coeficiente 1; si no es así, multiplicamos por el factor que haga falta para lograrlo. Ahora multiplicamos por -1 la segunda ecuación del sistema obtenido y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{r} -y+2z=11 \\ y+7z=61 \\ \hline 9z=72. \end{array}$$

Sustituimos la tercera ecuación de (11.21) por la resultante y obtenemos:

$$\begin{array}{r} x-y+5z=40 \\ y-2z=-11 \\ 9z=72. \end{array} \tag{11.22}$$

Dividiendo entre 9 la última ecuación de (11.22) obtenemos:

$$z=8.$$

Entonces, sustituyendo este valor de z en la segunda ecuación de (11.22) y despejando y, tenemos:

$$\begin{aligned} y-16&=-11 \\ y&=-11+16 \\ y&=5. \end{aligned}$$

Por último, sustituimos el valor de z y el de y en la primera ecuación de (11.22) para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} x-5+5(8)&=40 \\ x+35&=40 \\ x&=5. \end{aligned}$$

Así, el número buscado es 855. Gauss murió en 1855.

Comprobación: Sustituimos los valores $x=5$, $y=5$ y $z=8$ en el sistema (11.18):

Primera ecuación: $5x+10y-5z=5(5)+10(5)-5(8)=35.$

Segunda ecuación: $x-y+5z=5-5+5(8)=40.$

Tercera ecuación: $-x+2y+2z=-5+2(5)+2(8)=21.$

El método que utilizamos para resolver el problema anterior se llama método de Gauss o eliminación gaussiana. En realidad, este método es una aplicación sistemática y repetitiva del método de suma y resta, y se puede utilizar en sistemas de ecuaciones con mayor número de incógnitas. Se debe precisamente a Karl F. Gauss.

Método de Gauss

En general, para resolver un sistema de 3 ecuaciones por eliminación gaussiana, seguimos estos pasos.

Paso 1 Si el coeficiente de x, la primera variable, es 1 en por lo menos una ecuación, elegimos alguna de éstas y la colocamos en el primer lugar. Si no sucede así, multiplicamos alguna ecuación por el número adecuado para que el coeficiente de la primera variable sea 1 y la colocamos como la primera ecuación.

Paso 2 Multiplicando por los factores correspondientes y sumando, eliminamos el término en x de las ecuaciones restantes.

Paso 3 En la segunda ecuación (primera de las obtenidas en el paso 2) multiplicamos, si es necesario, por el número que haga que el coeficiente de la segunda variable (y) sea 1.

Paso 4 Multiplicando por el número correspondiente y sumando, eliminamos el término en y en la tercera ecuación.

Paso 5 Dividimos entre el coeficiente de la variable en la tercera ecuación, obteniendo así el valor de la última variable.

Paso 6 Para obtener los valores restantes, sustituimos el valor encontrado para la última variable en la ecuación anterior. Repitiendo el procedimiento se obtienen uno a uno los valores de las variables.

El procedimiento anterior es válido para sistemas con mayor número de ecuaciones y variables. Para ello, basta proceder de manera análoga con las variables restantes.

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} 3x+9y+6z&=27 \\ 2x-y+5z&=12 \\ 2x+20y+2z&=30. \end{aligned}$$

Solución:

- Multiplicamos la primera ecuación por $\frac{1}{3}$ para que x tenga coeficiente 1:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=9\\ 2x-y+5z&=12\\ 2x+20y+2z&=30. \end{aligned} \tag{11.23}$$

- Eliminamos el término en x de la segunda y tercera ecuaciones.
  Multiplicamos por -2 la primera ecuación de (11.23) y la sumamos a la segunda:

$$\begin{array}{r} -2x-6y-4z=-18\\ 2x-\ y+5z=\ 12\\ \hline -\ 7y+\ z=-6. \end{array}$$

Sustituimos la segunda ecuación de (11.23) con esta última:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=9\\ -7y+z&=-6\\ 2x+20y+2z&=30. \end{aligned} \tag{11.24}$$

Ahora multiplicamos la primera ecuación de este sistema por -2 y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{r} -2x-\ 6y-4z=-18\\ 2x+20y+2z=\ 30\\ \hline 14y-2z=\ 12. \end{array}$$

Sustituimos la tercera ecuación en (11.24) con esta última:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=9\\ -7y+z&=-6\\ 14y-2z&=12. \end{aligned} \tag{11.25}$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{7}$ la segunda ecuación del sistema (11.25):

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=9\\ y-\frac{1}{7}z&=\frac{6}{7}\\ 14y-2z&=12. \end{aligned} \tag{11.26}$$

- Eliminamos el término en y de la tercera ecuación.
  Multiplicamos por -14 la segunda ecuación de (11.26) y la sumamos a la tercera:

$$\begin{array}{r} -\ 14y+2z=-12\\ 14y-2z=\ 12\\ \hline 0=\ \ 0. \end{array}$$

Sustituimos la tercera ecuación de (11.26):

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=9\\ y-\frac{1}{7}z&=\frac{6}{7}\\ 0&=0. \end{aligned} \tag{11.27}$$

En este caso tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas; entonces podemos dar cualquier valor a una de las variables y resolver este sistema. El sistema tiene una infinidad de soluciones; obtendremos una eligiendo, por ejemplo, $z = 0$. Así, de la segunda ecuación de (11.27) tenemos:

$$y = \frac{6}{7},$$

sustituyendo ambos valores en la primera ecuación de (11.27) obtenemos:

$$x + 3\left(\frac{6}{7}\right) + 2(0) = 9,$$

de donde,

$$x + \frac{18}{7} = 9$$
$$x = \frac{45}{7}.$$

Por supuesto, para cada valor de z se pueden encontrar los correspondientes valores de x y de y.

Comprobación: Si $x = \frac{45}{7}$, $y = \frac{6}{7}$ y $z = 0$, entonces, sustituyendo estos valores en el sistema original, tenemos:

Primera ecuación: $3x + 9y + 6z = 3\left(\frac{45}{7}\right) + 9\left(\frac{6}{7}\right) + 6(0) = 27.$

Segunda ecuación: $2x - y + 5z = 2\left(\frac{45}{7}\right) - \frac{6}{7} + 5(0) = 12.$

Tercera ecuación: $2x + 20y + 2z = 2\left(\frac{45}{7}\right) + 20\left(\frac{6}{7}\right) + 2(0) = 30.$

2. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ x + y - z &= 4 \\ -4x - 9y + 8z &= 20. \end{aligned}$$

Solución: Reescribimos el sistema poniendo en primer lugar la ecuación en que x tiene coeficiente 1:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ 3x - 2y + z &= 1 \\ -4x - 9y + 8z &= 20. \end{aligned} \tag{11.28}$$

Multiplicamos la primera ecuación por -3 y la sumamos a la segunda:

$$\begin{aligned} -3x - 3y + 3z &= -12 \\ 3x - 2y + z &= 1 \\ \hline -5y + 4z &= -11. \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera por 4 y la sumamos a la tercera:

$$\begin{aligned} 4x + 4y - 4z &= 16 \\ -4x - 9y + 8z &= 20 \\ \hline -5y + 4z &= 36. \end{aligned}$$

El sistema que obtenemos al sustituir las dos últimas ecuaciones en (11.28) es:

$$\begin{aligned} x+y-z&=4\\ -5y+4z&=-11\\ -5y+4z&=36. \end{aligned} \tag{11.29}$$

Multiplicamos la segunda ecuación de (11.29) por $-\frac{1}{5}$ para que el coeficiente de la y sea 1:

$$\begin{aligned} x+y-z&=4\\ y-\frac{4}{5}z&=\frac{11}{5}\\ -5y+4z&=36. \end{aligned} \tag{11.30}$$

En (11.30) multiplicamos por 5 la segunda ecuación y la sumamos a la tercera:

$$\begin{aligned} 5y-4z&=11\\ \underline{-5y+4z}&\underline{=36}\\ 0&=47. \end{aligned}$$

Puesto que esto no es posible, el sistema no tiene solución.

11.6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 15, resuelve los sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

1. $\begin{aligned} x+3y-2z&=7\\ 3x+5y+z&=-4\\ -2x-6y-z&=1 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x+2y-2z&=1\\ 2x-y-10z&=-5\\ x+4y+8z&=1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x+5y-z&=1\\ -3x-4y+z&=-10\\ 4x+7y+2z&=-5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 6x+8y+2z&=0\\ 5x-4y+6z&=-2\\ 7x-3y+2z&=-1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x-6y+z&=3\\ -3x+7y+9&=-9\\ -4x+8y+5z&=9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x-y-z&=-4\\ x+y-z&=6\\ x+y+z&=20 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 4x-2y+z&=-4\\ x+3y-2z&=7\\ 10x-y+z&=12 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 11x-5y-3z&=1\\ 6x+6y+4z&=0\\ 8x-4y-4z&=4 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 9x-8y+3z&=0\\ 6x+4y+z&=0\\ -9x-12y-6z&=0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ x-2y-3z&=2\\ x+3y-2z&=3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 3x+3y+z&=3/5\\ 2x+10y+4z&=1/3\\ 6x-5y-z&=1/2 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 6x+3y+z&=31/6\\ x+y+2z&=3/2\\ 3x+2y-5z&=2 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} -3x-4y+z&=0\\ 6x+2z&=0\\ 3x-4y+3z&=0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 2x+y-z&=5\\ -x-y+z&=2\\ -x-2y+2z&=1 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 5x+y+4z&=-12\\ 7x+2y-z&=6\\ -2x-y+5z&=5 \end{aligned}$

16. Encuentra el área del triángulo rectángulo que satisface las siguientes condiciones: su perímetro es igual a 24 cm. El doble de la hipotenusa es igual al doble del cateto menor más el mayor. Seis veces el cateto menor más 8 veces el mayor menos 10 veces la hipotenusa es igual a 0.

17. La distancia oficial del maratón, 42.195 kilómetros fue fijada por el Comité Olímpico Británico. La primera vez que se recorrió esa distancia, sucedió algo curioso: el italiano Dorando Pietri, entró al estadio en primer lugar, pero se desplomó antes de llegar a la meta, y como recibió ayuda en los últimos 100 metros, fue descalificado. Para saber en qué año ocurrió esta anécdota, basta saber que la primera cifra es 1 y resolver el sistema que definen las siguientes ecuaciones para encontrar el número de tres cifras que falta. El triple de la cifra de las unidades, más 8 veces la de las decenas menos la de las de las centenas es igual a 15. El doble de la cifra de las unidades menos la de las decenas menos el triple de la de las centenas es igual a -11. La cifra de las centenas más la de las decenas menos la de las unidades es igual a 1.

18. Calcula el volumen del prisma rectangular cuyos lados satisfacen las siguientes condiciones: 5 veces el largo más

2 veces el ancho menos 3 veces la altura es igual a 8 cm. El doble de la altura, más el largo, menos el ancho es igual a 13 cm. Tres veces el ancho, menos 2 veces la altura más el doble del largo es igual a 5 cm.

19. Si α, β y γ son los ángulos de un triángulo y se sabe que el doble de α más γ es igual a 145° y el ángulo γ es igual a β más 5°, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo?

20. Encuentra el número de tres cifras que satisface las siguientes condiciones: la suma de la cifra de las unidades más la de las decenas es igual a 15. La cifra de las unidades menos 4 es igual al quíntuple de la diferencia de la cifra de las decenas menos la de las centenas. La cifra de las centenas es una unidad menor que la de las decenas.

21. Un número de tres cifras satisface las siguientes condiciones. La suma de las cifras del número es igual a 17. La diferencia del doble de la cifra de las decenas menos la cifra de las unidades es igual a 1. La cifra de las centenas más la cifra de las decenas más 10 es igual al doble de la cifra de las unidades. Encuentra el número.

22. Rubén le dijo a Lucrecia: "Mi agenda se cayó al agua y solamente puedo leer las primeras cifras de tu número telefónico, que son 6728; las tres faltantes se borraron". Lucrecia le respondió: "Te falta un número de tres cifras; para encontrarlo, resuelve el sistema que definen las siguientes condiciones: la cifra de las unidades menos la de las decenas más la de las centenas es igual a 2. El triple de la cifra de las unidades más la de las decenas es igual a la de las centenas más 4. La cifra de las decenas menos la de las centenas más 11 veces la de las unidades es igual a 0".

23. Encuentra el área de la superficie del prisma rectangular que satisface las siguientes condiciones. El doble del largo más la altura es igual al ancho más 18 cm. El ancho es igual a la suma del largo más la altura menos 9 cm. Cinco veces el largo menos 4 veces el ancho menos la altura es igual a 0.

Galileo Galilei
Logró ver la superficie lunar en 1609 usando el telescopio. Galileo nació en el siglo XVI y murió en el siglo XVII.

11.7 Determinantes

¿Cuál es el año del nacimiento de Galileo y cuál el de su muerte, si se sabe que el triple del número formado por las dos últimas cifras del año de su muerte más dos unidades es igual al doble del número formado por las dos últimas cifras del año de su nacimiento, y que el doble del número formado por las dos últimas cifras del año de su muerte menos 20 es igual al número formado por las dos últimas cifras del año de su nacimiento?

Solución: Llamamos x al número de las dos últimas cifras del año de la muerte de Galileo y y al número de las dos últimas cifras del año de su nacimiento.

Planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x+2&=2y \\ 2x-20&=y. \end{aligned} \tag{11.31}$$

Reescribimos las ecuaciones como:

$$\begin{aligned} 3x-2y&=-2 \\ 2x-y&=20. \end{aligned} \tag{11.32}$$

Multiplicamos por -2 la primera ecuación de (11.32) y la segunda por 3, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} -6x+4y&=4 \\ 6x-3y&=60. \end{aligned}$$

Sumamos las ecuaciones anteriores:

$$y=64.$$

Sustituyendo este valor de y en la segunda ecuación de (11.31), y despejando x:

$$\begin{aligned} 2x - 20 &= 64 \\ 2x &= 84 \\ x &= 42. \end{aligned}$$

Entonces Galileo nació en 1564 y murió en 1642.

Comprobación: Sustituimos los valores $x = 42$ y $y = 64$ en las ecuaciones (11.31):

Primera ecuación:

Lado izquierdo: $3x + 2 = 3(42) + 2 = 128.$

Lado derecho: $2y = 2(64) = 128.$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $2x - 20 = 2(42) - 20 = 64.$

Lado derecho: $y = 64.$

El método que seguimos en el ejemplo anterior es el siguiente:

Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s, \end{aligned} \qquad (11.33)$$

donde x y y son las incógnitas y a, b, c, d, r y s son números reales, multiplicamos la primera ecuación por $-c$ y la segunda por a; es decir,

$$\begin{aligned} -acx - bcy &= -cr \\ acx + ady &= as. \end{aligned}$$

Ahora las sumamos:

$$(ad - bc)y = as - cr.$$

Despejamos y:

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc} \quad \text{si } ad - bc \neq 0.$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación de (11.33):

$$ax + b\left(\frac{as - cr}{ad - bc}\right) = r.$$

Despejamos x y simplificamos:

$$\begin{aligned} ax + b\left(\frac{as - cr}{ad - bc}\right) &= r \\ ax &= r - b\left(\frac{as - cr}{ad - bc}\right) \\ x &= \frac{r(ad - bc) - b(as - cr)}{a(ad - bc)} = \frac{rd - bs}{ad - bc}. \end{aligned}$$

Una manera fácil de obtener el mismo resultado es observando el arreglo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que consta de los coeficientes de las variables. El denominador de las soluciones obtenidas para ambas variables es el resultado de multiplicar, en cruz, los números del arreglo y hacer la resta $ad - bc$ de los productos. El número obtenido se llama el *determinante* del arreglo y es fácil de recordar el procedimiento si usamos símbolos:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Es decir, para calcular el determinante, efectuamos los productos señalados por las flechas que aparecen en el diagrama, asignando a la flecha hacia abajo el signo positivo y a la flecha hacia arriba el signo negativo y sumando los resultados obtenidos.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & & b \\ & \times & \\ c & & d \end{vmatrix}.$$

En el contexto que estamos trabajando:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se llama el determinante del sistema. Con la notación anterior observamos que la solución del sistema (11.33) es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Conviene observar, para recordar la solución, que el denominador es, en ambos casos, el determinante del sistema, y el numerador en la expresión correspondiente a cada variable es el determinante obtenido al sustituir los términos independientes en la columna de la variable.

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema $\begin{matrix} 5x + 6y = -10 \\ 2x + 3y = -1, \end{matrix}$ utilizando determinantes.

Solución: Calculamos primero el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} 5 & & 6 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{vmatrix} = 5\,(3) - 2\,(6) = 3.$$

Ahora calculamos el valor de x sustituyendo los valores de la primera columna del determinante del sistema por los términos independientes y dividiendo entre el determinante del sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10 & & 6 \\ & \times & \\ -1 & & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-10\,(3) - (-1)\,(6)}{3} = -8.$$

Para calcular el valor de y, sustituimos los valores de la segunda columna del determinante del sistema por los términos independientes, y dividimos entre el determinante del sistema:

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & -10\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{3}=\frac{5\,(-1)-(2)\,(-10)}{3}=5.$$

Comprobación: Sustituimos los valores $x=-8$ y $y=5$ en las ecuaciones originales:

Primera ecuación: $5x+6y=5(-8)+6(5)=-10.$

Segunda ecuación: $2x+3y=2(-8)+3(5)=-1.$

2. Resolver el sistema $\begin{aligned}\frac{w}{4}-\frac{z}{5}&=2\\ \frac{w}{6}+2z&=-4,\end{aligned}$ utilizando determinantes.

Solución: Calculamos el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(2)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}.$$

Ahora calculamos el valor de w sustituyendo los valores de la primera columna del determinante del sistema por los términos independientes y dividiendo entre el determinante del sistema:

$$w=\frac{\begin{vmatrix}2 & -\frac{1}{5}\\ -4 & 2\end{vmatrix}}{\frac{8}{15}}=\frac{2(2)-(-4)(-\frac{1}{5})}{\frac{8}{15}}=6.$$

Para calcular el valor de z, sustituimos los valores de la segunda columna del determinante del sistema por los términos independientes y dividimos entre el determinante del sistema:

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & 2\\ \frac{1}{6} & -4\end{vmatrix}}{\frac{8}{15}}=\frac{\frac{1}{4}(-4)-(\frac{1}{6})(2)}{\frac{8}{15}}=-\frac{5}{2}.$$

Comprobación: Sustituimos los valores $w=6$ y $z=-\frac{5}{2}$ en las ecuaciones originales:

Primera ecuación: $\frac{w}{4}-\frac{z}{5}=\frac{1}{4}(6)-\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{5}=2.$

Segunda ecuación: $\frac{w}{6}+2z=\frac{1}{6}(6)+2\left(-\frac{5}{2}\right)=-4.$

3. Un número de tres cifras x es tal que la suma de sus dígitos es 14. Dos veces el dígito de las centenas es igual al doble del dígito de las decenas

más el de las unidades. El número x es igual a 180 más el número obtenido, intercambiando el dígito de las decenas con el de las centenas. Encontrar el número x.

Solución: Llamamos c, d, u a los dígitos de las centenas, las decenas y las unidades del número x, de donde:

$$x = 100c + 10d + u. \tag{11.34}$$

Escribimos las ecuaciones

$$\begin{aligned} c + d + u &= 14 \\ 2c &= 2d + u \\ 100c + 10d + u &= 180 + 100d + 10c + u. \end{aligned} \tag{11.35}$$

Reescribimos las ecuaciones para tener los términos independientes del lado derecho de las igualdades:

$$\begin{aligned} c + d + u &= 14 \\ 2c - 2d - u &= 0 \\ 90c - 90d &= 180. \end{aligned}$$

Dividimos la última ecuación entre 90 para simplificar las operaciones:

$$\begin{aligned} c + d + u &= 14 \\ 2c - 2d - u &= 0 \\ c - d &= 2. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema podemos proceder de manera análoga al caso de dos ecuaciones con dos incógnitas; en este caso, el determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo la primera columna por los términos independientes obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Entonces,

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}.$$

De la misma manera obtenemos d y u:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}, \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Ahora, para obtener cada uno de los determinantes, procedemos de la siguiente manera: por ejemplo, para calcular el determinante del sistema, copiamos los dos primeros renglones a continuación del tercero, y multiplicamos en diagonal siguiendo las flechas hacia abajo y sumamos los resultados de las diagonales,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

es decir,

$$(1)(-2)(0)+(2)(-1)(1)+(1)(1)(-1)=-3.$$

Después multiplicamos en diagonal siguiendo las flechas hacia arriba y sumamos los opuestos de estos productos, obteniendo

$$-(2)(1)(0)-(1)(-1)(-1)-(1)(-2)(1)=1.$$

Ahora sumamos el primer resultado al segundo:

$$-3+1=-2.$$

Así, el valor del determinante del sistema es -2. Para calcular los valores de las incógnitas sólo nos falta determinar en cada caso el determinante del numerador. Al hacerlo, obtenemos

$$c=\frac{-12}{-2}=6, \quad d=\frac{-8}{-2}=4, \quad u=\frac{-8}{-2}=4.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (11.34) para obtener el valor de x, así:

$$x=100c+10c+u=100(6)+10(4)+4=644.$$

El número buscado es 644.

Comprobación: Sustituimos los valores $c=6$, $d=4$ y $u=4$ en las ecuaciones (11.35).

Primera ecuación:

$$c+d+u=6+4+4=14.$$

Segunda ecuación:

Lado izquierdo: $2c=2(6)=12.$

Lado derecho: $2d+u=2(4)+4=12.$

Tercera ecuación:

Lado izquierdo: $100c+10d+u=100(6)+10(4)+4=644.$

Lado derecho: $180+100d+10c+u=180+100(4)+10(6)+4=644.$

11.7.1 Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando determinantes.

1. $18x + 15y = 9$
$21x - 30y = 1$

2. $4x - 7y = 10$
$-9x + 10y = 12$

3. $5x + 9y = -18$
$6x + 8y = -2$

4. $7x + 3y = -6$
$3x + 7y = 26$

5. $2x - y + 7z = 8$
$3x + 5y + 10z = -21$
$9x - 4y - 2z = 0$

6. $x + y + z = 4$
$2x + 3y + 2z = 1$
$3x + 4y - 4z = -23$

7. $2x - 8y - 4z = -10$
$-5x + 10y + 5z = 0$
$-4x + 15y + 2z = 1$

8. $9x + 5y + 6z = -6$
$11x - 7y - 8z = 10$
$7x + 8y + 9z = -12$

9. $x + y - 6z = 3$
$x - y + 5z = 11$
$-2x + 3y - 4z = -5$

10. $2x + 3y - 6z = -5$
$x + 4y - 8z = 5$
$3x + 5y + z = 5$

11. $10x + 9y - 10z = 0$
$8x - 6y + 5z = -7$
$6x + 3y + 20z = -6$

12. $2x - y + 4z = -15$
$-4x + 2y + z = 3$
$x + 4y - 2z = -36$

13. $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = -\frac{11}{6}$
$\frac{5x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 0$
$\frac{2x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{4z}{3} = -\frac{9}{2}$

14. $\frac{3y}{2} + z = -4$
$x + \frac{3z}{5} = -\frac{1}{5}$
$x - \frac{y}{2} = 2$

15. $\frac{3x}{5} - \frac{2y}{3} + \frac{4z}{5} = \frac{2}{5}$
$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{3} - \frac{4z}{5} = 14$
$\frac{3x}{2} + \frac{5y}{3} + \frac{6z}{5} = 5$

16. Luis, Pedro y Ernesto fueron a comer pizza. Entre Luis y Ernesto comieron el doble que Pedro. Pedro comió el doble que Ernesto. Entre los tres se terminaron una pizza. ¿Qué porción de pizza comió cada uno?

17. Al comprar 1 kilo de plátanos, 1 kilo de papas y 1 litro de aceite, pagué \$12. El kilo de papas cuesta \$2 menos que el litro de aceite. El litro de aceite cuesta \$4 más que el kilo de plátanos. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

18. Los lados de un triángulo satisfacen las siguientes condiciones: la suma de las longitudes del primero y el segundo lados es igual a 22 metros. El doble de la longitud del primer lado menos el tercero es igual a 11 metros. La longitud del segundo más el doble del tercero es igual a 33 metros. ¿Qué dimensiones tiene el triángulo?

19. Tres dígitos satisfacen las siguientes condiciones: la suma de los tres es igual a 12. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero menos 16 unidades es igual a 10. El primero más el triple del segundo más 4 veces el tercero es igual a 35. Encuentra los dígitos.

20. Los lados de un triángulo rectángulo satisfacen las siguientes condiciones: la hipotenusa menos la suma de los catetos es igual a -2. La suma de los catetos más 3 cm es igual al doble de la hipotenusa. El doble de la diferencia de los catetos más 2 cm es igual a 0. Encuentra las dimensiones del triángulo.

21. Encuentra el número de tres cifras que satisface las siguientes condiciones: la cifra de las unidades es igual a la suma de la cifra de las centenas más la de las decenas. El doble de la cifra de las decenas menos la de las unidades es igual a la de las centenas. La suma de todas las cifras es igual a 18.

22. Escribe el número 11 en tres sumandos enteros de tal manera que el doble del primero más el tercero menos el segundo menos 5 sea igual a 0, y el triple del primero más el doble del segundo más el tercero sea igual a 24.

23. Arquímedes fue un famoso científico griego que vivió en Sicilia antes de Cristo. Para saber en qué año nació, sigue las instrucciones. Se trata de un número de tres cifras. La mitad de la cifra de las centenas más la cuarta parte de la de las decenas es igual a 3. La cifra de las centenas más la de las unidades suma 4. La cifra de las unidades más la de las decenas menos 10 es igual a 0.

24. Jaime dijo a su hijo: "Si me dices la cantidad de dinero que he ahorrado en las tres últimas semanas, te daré la mitad. Voy a darte tres pistas. Un tercio del monto de la primera semana más un quinto del de la segunda, más dos séptimos del de la tercera es igual a 254. Cinco cuartos del ahorro de la primera semana más un sexto del de la segunda, más un tercio del de la tercera es igual a 315. Un medio del de la primera menos un quinto del de la segunda, más siete cuarentavos del de la tercera es igual a 153". ¿Cuánto recibirá el hijo de Jaime si resuelve el problema?

25. El monte Everest es el más alto del mundo. Para encontrar su altitud en metros, basta consultar una enciclopedia y buscar el dato, o bien resolver el sistema de ecuaciones que definen las siguientes condiciones: se trata de un número de cuatro cifras. La cifra de las unidades es cero. El doble de la cifra de las decenas, menos la suma de la de las centenas más la de los millares es igual a la de las unidades. La suma de la cifra de los millares más la de las centenas es igual a la de las decenas más 8. La suma de la cifra de las centenas más la de las decenas es igual a 16.

11.8 Balanceo de ecuaciones químicas

Las ecuaciones químicas representan reacciones en las que ciertas sustancias se combinan entre sí, algunas veces en presencia de ciertos catalizadores o por efectos de la temperatura, y producen otras sustancias.

Balancear una ecuación significa determinar cuántas moléculas de cada sustancia deben mezclarse y cuántas moléculas de cada sustancia se obtienen como resultado.

En los cursos de química normalmente se enseña a los alumnos el método de tanteo, que sirve para ecuaciones suficientemente simples, así como el método de oxidación-reducción, pero a veces no se enseña el método algebraico, que explicamos a continuación.

Ejemplos

1. Si se combinan hidrógeno y oxígeno se obtiene agua.



$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

La ecuación anterior no está bien balanceada, pues mientras en el lado izquierdo hay 2 átomos de oxígeno, del lado derecho sólo hay 1. Balancearla significa determinar cuántas moléculas de hidrógeno, oxígeno y agua debe haber para que haya exactamente la misma cantidad de átomos de cada elemento en ambos lados de la ecuación. Es decir, debemos encontrar x, y y z para que en:



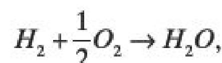
$$xH_2 + yO_2 \to zH_2O$$

haya la misma cantidad de átomos de hidrógeno y oxígeno en cada lado.

Planteamos una ecuación por cada elemento químico, escribiendo la cantidad de átomos que hay en cada lado de la ecuación química:

$$\begin{aligned} &(H)\ \text{hidrógeno:}\ 2x = 2z \\ &(O)\ \text{oxígeno:}\quad 2y = z. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, así que podemos dar un valor arbitrario a una de las variables y resolver para las otras dos; por ejemplo, si $x = 1$, entonces $z = 1$ y $y = \frac{1}{2}$. Esto nos llevará a la ecuación



$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \to H_2O,$$

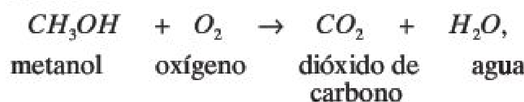
que no tiene sentido, pues no se puede tener media molécula de O_2, pero si multiplicamos por 2 todos los coeficientes, es decir, por el mínimo común múltiplo de los denominadores de x, y y z, obtenemos:



$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O,$$

que es el balanceo correcto.

2. Balancear la reacción:



$$CH_3OH + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O,$$

metanol — oxígeno — dióxido de carbono — agua

que corresponde a quemar metanol obteniendo dióxido de carbono y agua.

Solución: Buscamos los coeficientes de la ecuación:



$$xCH_3OH + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O.$$

Planteamos una ecuación por cada elemento químico:

$$\begin{aligned} (C)\ \text{carbono:} &\quad x = z \\ (H)\ \text{hidrógeno:} &\quad 4x = 2w \\ (O)\ \text{oxígeno:} &\quad x + 2y = 2z + w. \end{aligned}$$

Así, tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, y nuevamente podemos darle un valor arbitrario a una de ellas y obtener los valores de las otras, haciendo, por ejemplo, $z = 1$, con lo que obtenemos $x = 1, w = 2, y = \frac{3}{2}$.

Como en el caso anterior, necesitamos soluciones enteras, así que podemos multiplicar por 2 todos los valores encontrados y obtenemos como resultado:



$$2CH_3OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 4H_2O.$$

3. Antoine de Lavoisier planteó la primera ecuación de una reacción química, que correspondía a la fermentación del mosto de la uva, en la que el azúcar en forma de glucosa se transforma en alcohol etílico y dióxido de carbono. Balancear la ecuación correspondiente.

Solución: La ecuación es:



$$xC_6H_{12}O_6 \rightarrow yC_2H_5OH + zCO_2.$$

Planteamos una ecuación por cada elemento químico:

$$\begin{aligned} (C)\ \text{carbono:} &\quad 6x = 2y + z \\ (H)\ \text{hidrógeno:} &\quad 12x = 6y \\ (O)\ \text{oxígeno:} &\quad 6x = y + 2z. \end{aligned}$$

Igualando la primera y la tercera obtenemos:

$$\begin{aligned} 2y + z &= y + 2z \\ y &= z. \end{aligned}$$

Con esta última ecuación y la del hidrógeno obtenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} y &= z \\ 2x &= y. \end{aligned}$$

Podemos dar un valor a una de las variables y resolver para las otras dos; por ejemplo, $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$. Así, la ecuación balanceada es:



$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2.$$

4. Algunas veces, los químicos dicen que el método algebraico no funciona para algunas reacciones, pues en ellas hay que considerar a veces los cambios de valencias; por ejemplo, balancear:



$$Zn^0 + H_3O^{+1} \rightarrow Zn^{+2} + H_2 + H_2O.$$

Solución: Planteamos la ecuación:



$$xZn^0 + yH_3O^{+1} \to zZn^{+2} + wH_2 + uH_2O.$$

Escribimos una ecuación por cada elemento:

$$\begin{array}{ll} (Zn)\ \text{zinc:} & x = z \\ (H)\ \text{hidrógeno:} & 3y = 2w + 2u \\ (O)\ \text{oxígeno:} & y = u. \end{array}$$

En este caso, la respuesta no se obtiene resolviendo el sistema anterior, de hacerlo así les daríamos la razón a los químicos, sino que tenemos que plantear una ecuación más que relacione la cantidad de valencias positivas. Por consiguiente, para dar la respuesta correcta debemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{ll} (Zn)\ \text{zinc:} & x = z \\ (H)\ \text{hidrógeno:} & 3y = 2w + 2u \\ (O)\ \text{oxígeno:} & y = u \\ (+)\ \text{valencias:} & y = 2z. \end{array}$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, así hay un grado de libertad; es decir, podemos dar un valor arbitrario a una de las incógnitas; por ejemplo, hagamos $u = 2$, y entonces $y = 2$, por la ecuación del oxígeno.
De la ecuación de las valencias obtenemos:

$$z = \frac{y}{2} = 1.$$

De las primera y segunda ecuaciones se sigue que:

$$x = z = 1,$$
$$w = \frac{3y - 2u}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1.$$

El balanceo correcto es:



$$Zn^0 + 2H_3O^{+1} \to Zn^{+2} + H_2 + 2H_2O.$$

11.8.1 Ejercicios

1. Balancea la reacción que transforma el cloruro férrico y el hidróxido de sodio en hidróxido férrico y cloruro de sodio:



$$FeCl_3 + NaOH \to Fe(OH)_3 + NaCl$$

2. Balancea la reacción que describe el enmohecimiento del hierro



$$Fe + O_2 \to Fe_2O_3$$

3. Balancea la reacción que transforma en acetileno y el oxígeno en dióxido de carbono y agua.



$$C_2H_2 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

4. Si al bicarbonato de sodio $NaHCO_3$ le añadimos dihidrofosfato de sodio NaH_2PO_4, obtenemos polvo para hornear. Los pasteles se inflan cuando, debido al calor, se libera agua, lo cual humedece la mezcla y produce dióxido de carbono. Balancea la ecuación:



$$NaHCO_3 + NaH_2PO_4 \to Na_2HPO_4 + H_2O + CO_2$$

5. Para obtener fierro, es suficiente hacer reaccionar el óxido férrico añadiendo hidrógeno; durante la transformación se obtiene también agua. Balancea la ecuación:



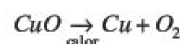
$$H_2 + Fe_2O_3 \to Fe + H_2O$$

6. Una manera de obtener hidrógeno es mezclar zinc con ácido clorhídrico. Balancea la ecuación que describe la reacción:



$$Zn + HCl \to ZnCl_2 + H_2$$

7. Al aplicar calor al óxido de cobre es posible separar el cobre y el oxígeno. Balancea la ecuación:



$$CuO \underset{\text{calor}}{\to} Cu + O_2$$

8. Sin necesidad de mezclar, poniendo dos recipientes uno cerca del otro, uno con amoniaco NH_3 y otro con ácido

clorhídrico HCl, se obtiene cloruro de amonio. Balancea la ecuación:



$$NH_3 + HCl \rightarrow NH_4Cl$$

9. Uno de los componentes del jugo gástrico es el ácido clorhídrico HCl. Cuando en el estómago hay exceso de este ácido, se tienen molestias que comúnmente llamamos agruras o acidez estomacal. Hay en el mercado medicamentos a base de magnesio; uno eficaz es el que contiene óxido de magnesio MgO y carbonato de magnesio $MgCO_3$. La reacción producida al ingerirlo es la siguiente:



$$HCl + MgO + MgCO_3 \rightarrow MgCl_2 + H_2O + CO_2$$

Balancea la ecuación.

10. El llamado plomo rojo es una preparación que protege de la oxidación a las estructuras metálicas. El plomo rojo se puede preparar de la siguiente manera:



$$Pb^0 + O_2 \rightarrow Pb_3O_4$$

Balancea la ecuación.

11. En las infecciones renales, tradicionalmente se utiliza un medicamento que al combinarse con el agua produce un compuesto que elimina un gran número de bacterias. Balancea la ecuación que representa la reacción:



$$C_6H_{12}N_4 + H_2O \rightarrow H_2CO + NH_3$$

12. Balancea la ecuación de la reacción que transforma el carbonato de calcio en óxido de calcio y dióxido de carbono:



$$CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$$

13. Al combinar clorato de potasio $KClO_3$ con ácido clorhídrico HCl se obtiene agua, cloro y cloruro de potasio. Balancea la ecuación de la reacción:



$$KClO_3 + HCl \rightarrow H_2O + Cl_2 + KCl$$

14. Para obtener óxido de sodio Na_2O, a partir hidróxido de sodio $NaOH$; balancea la ecuación:



$$NaOH \rightarrow Na_2O + H_2O$$

El hidróxido de sodio es lo que comúnmente llamamos sosa.

15. Al combinar sodio con agua, se puede obtener sosa con liberación de hidrógeno. Balancea la ecuación:



$$Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$$

11.9 Sistema de una ecuación de primer grado y una de segundo grado en dos variables

Encontrar los puntos de la recta $3x + 2y - 1 = 0$ que distan 5 unidades del origen.

Solución: Los puntos que distan 5 unidades del origen son los puntos del círculo de radio 5, así que debemos encontrar la intersección del círculo con la recta.

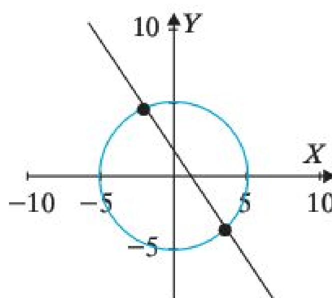


Figura 11.6

Resolvemos el sistema

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 2y - 1 = 0.$$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}. \tag{11.36}$$

La sustituimos en la primera y resolvemos la ecuación obtenida:

$$x^2+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2=25$$

$$x^2+\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}=25$$

$$\frac{13}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{99}{4}=0.$$

Así,

$$x=\frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4\left(\frac{13}{4}\right)\left(-\frac{99}{4}\right)}}{2\left(\frac{13}{4}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{324}}{\frac{13}{2}}=\frac{\frac{3}{2}\pm 18}{\frac{13}{2}},$$

de donde:

$$x=\frac{\frac{3}{2}+18}{\frac{13}{2}}=3 \quad \text{o} \quad x=\frac{\frac{3}{2}-18}{\frac{13}{2}}=-\frac{33}{13}.$$

Ahora sustituimos estos valores de x en la ecuación (11.36):

$$y=-\frac{3}{2}(3)+\frac{1}{2}=-4; \qquad y=-\frac{3}{2}\left(-\frac{33}{13}\right)+\frac{1}{2}=\frac{56}{13}.$$

Por tanto, la recta corta al círculo en los puntos $(3,-4)$ y $\left(-\frac{33}{13},\frac{56}{13}\right)$ y esos son los puntos de la recta que distan 5 del origen.

En la figura siguiente observamos que, dados un círculo y una recta, puede suceder que:

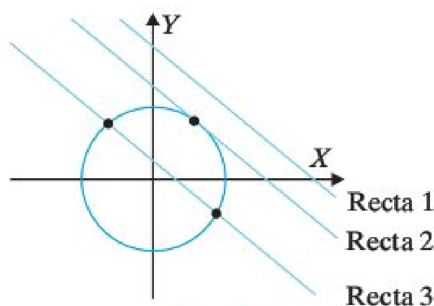


Figura 11.7

- No se corten (recta 1).
- La recta corte el círculo en un punto (recta 2); es decir, la recta es tangente al círculo.
- La recta corte el círculo en dos puntos (recta 3).

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera: si consideramos las ecuaciones de la recta y del círculo y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución (no se cortan).
- Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).
- Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

EJEMPLOS

1. Encontrar los puntos en donde se cortan la recta $2x - y - 10 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

Solución: Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y - 10 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25. \end{aligned}$$

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 2x - 10, \qquad (11.37)$$

la sustituimos en la segunda y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 10)^2 &= 25 \\ x^2 + 4x^2 - 40x + 100 &= 25 \\ 5x^2 - 40x + 75 &= 0, \end{aligned}$$

de donde:

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4(5)(75)}}{2(5)} = \frac{40 \pm \sqrt{100}}{10} = \frac{40 \pm 10}{10} = 4 \pm 1.$$

Así,

$$x = 5 \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

Ahora sustituimos estos valores de x en la ecuación (11.37):

$$y = 2(5) - 10 = 0 \qquad y = 2(3) - 10 = -4.$$

Por tanto, la recta corta al círculo en los puntos $(5, 0)$ y $(3, -4)$.

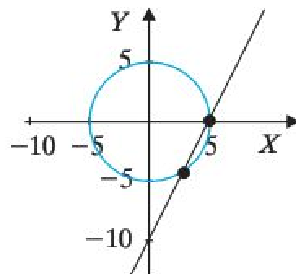


Figura 11.8

2. Encontrar la intersección de la recta $x + y + 5 = 0$ con el círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Despejamos x de la primera ecuación:

$$x = -y - 5,$$

la sustituimos en la segunda y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned}(-y-5)^2 + y^2 &= 4\\ y^2 + 10y + 25 + y^2 &= 4\\ 2y^2 + 10y + 21 &= 0,\end{aligned}$$

de donde:

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(2)(21)}}{2(2)} = \frac{-10 \pm \sqrt{-68}}{4}.$$

Entonces la ecuación no tiene solución. Por tanto, la recta no corta al círculo.

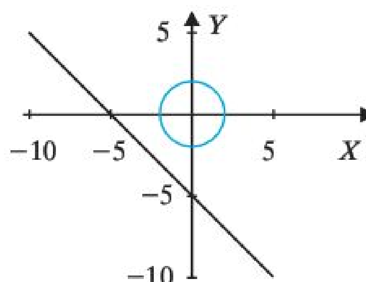


Figura 11.9

3. Encontrar los puntos donde se cortan la recta $2x - y + 10 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 = 20$.

Solución: Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}2x - y + 10 &= 0\\ x^2 + y^2 &= 20.\end{aligned}$$

Para ello, despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 2x + 10, \tag{11.38}$$

la sustituimos en la segunda y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned}x^2 + (2x+10)^2 &= 20\\ x^2 + 4x^2 + 40x + 100 &= 20\\ 5x^2 + 40x + 80 &= 0.\end{aligned}$$

Así,

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4(5)(80)}}{2(5)} = \frac{-40 \pm 0}{10} = -4.$$

Ahora sustituimos este valor en la ecuación (11.38):

$$y = 2(-4) + 10 = 2.$$

Por tanto, el círculo y la recta sólo se cortan en el punto $(-4, 2)$.

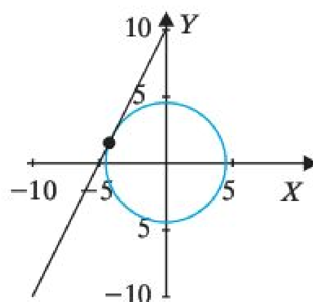


Figura 11.10

En general, las ecuaciones cuadráticas en dos variables representan curvas en el plano; por ejemplo, ya hemos visto la parábola $y = x^2$.

Para encontrar las intersecciones de una recta con una curva de este tipo, debemos resolver un sistema de dos ecuaciones. Para ello, lo usual es despejar una de las variables de la ecuación de la recta y sustituir su valor en la cuadrática.

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema $3x - 8y + 1 = 0$
$y = x^2$.

Solución: Despejamos y de la ecuación de la recta:

$$8y = 3x + 1$$
$$y = \frac{3x+1}{8}. \tag{11.39}$$

Sustituimos este valor en la ecuación cuadrática y resolvemos la ecuación obtenida:

$$\frac{3x+1}{8} = x^2$$
$$3x + 1 = 8x^2$$
$$0 = 8x^2 - 3x - 1,$$

de donde:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(8)(-1)}}{2(8)} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{16}.$$

Así,

$$x = \frac{3 + \sqrt{41}}{16} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{41}}{16}.$$

Ahora sustituimos estos valores de x en la ecuación (11.39):

$$y = \frac{3\left(\frac{3+\sqrt{41}}{16}\right)+1}{8} = \frac{25 + 3\sqrt{41}}{128} \qquad y = \frac{3\left(\frac{3-\sqrt{41}}{16}\right)+1}{8} = \frac{25 - 3\sqrt{41}}{128}.$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = \frac{3+\sqrt{41}}{16}$, $y = \frac{25+3\sqrt{41}}{128}$, o bien, $x = \frac{3-\sqrt{41}}{16}$, $y = \frac{25-3\sqrt{41}}{128}$.

2. Resolver el sistema $x - 5y - 6 = 0$
$x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución: Despejamos x de la ecuación de la recta:

$$x = 5y + 6. \tag{11.40}$$

Sustituimos este valor en la ecuación cuadrática y resolvemos la ecuación obtenida

$$\begin{aligned}(5y+6)^2 + 9y^2 &= 1\\ 25y^2 + 60y + 36 + 9y^2 &= 1\\ 34y^2 + 60y + 35 &= 0,\end{aligned}$$

de donde:

$$y = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4(34)(35)}}{2(34)} = \frac{-60 \pm \sqrt{-1160}}{2(34)}.$$

Por tanto, el sistema no tiene solución.

11.9.1 Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x - y = 4$
$x^2 + y^2 = 16$

2. $x + 2y = 3$
$x^2 + y^2 = 25$

3. $-3x + 5y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 = 9$

4. $x - 3y + 5 = 0$
$x^2 - y^2 = -1$

5. $3x + 6y - 2 = 0$
$-x^2 + y = 0$

6. $2x + y + 1 = 0$
$-x^2 + y = 0$

7. $2x + 5y - 10 = 0$
$4x^2 + 9y^2 = 25$

8. $3x - y + 4 = 0$
$8x^2 - y^2 = 4$

9. $x + 7y - 3 = 0$
$2x^2 - 3y^2 = 2$

11.10 Desigualdades

11.10.1 Sistema de una ecuación y una desigualdad

Las dimensiones de un rectángulo son números enteros. Los lados satisfacen las siguientes condiciones: el triple del largo más el doble del ancho es mayor que 8 metros. El doble del largo más el triple del ancho es igual a 9 metros. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Solución: Llamamos x al largo y y al ancho del rectángulo.
Escribimos en lenguaje algebraico las condiciones del problema:

$$\begin{aligned}3x + 2y &> 8\\ 2x + 3y &= 9.\end{aligned} \tag{11.41}$$

Multiplicamos por 3 la desigualdad y por -2 la igualdad:

$$\begin{aligned}9x + 6y &> 24\\ -4x - 6y &= -18.\end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro:

$$5x > 6.$$

Así,

$$x > \frac{6}{5}.$$

Ahora multiplicamos por 2 la desigualdad de (11.41), y la igualdad por -3, con lo que obtenemos:

$$6x + 4y > 16$$
$$-6x - 9y = -27.$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$-5y > -11.$$

Despejando y:

$$y < \frac{11}{5}.$$

Ahora tenemos:

$$x > \frac{6}{5}$$
$$y < \frac{11}{5}.$$

Es decir, x es un entero mayor que 1 y $y = 1$ o $y = 2$ pues éstos son los únicos enteros positivos menores que $\frac{11}{5}$.

Si tomamos $y = 1$ y lo sustituimos en la ecuación (11.41), obtenemos:

$$2x + 3 = 9.$$

De donde,

$$x = 3$$

y obtenemos como solución al problema

$$x = 3, \qquad y = 1.$$

Si tomamos $y = 2$ y sustituimos en la ecuación (11.41), obtenemos:

$$2x + 6 = 9.$$

De donde,

$$x = \frac{3}{2}$$

y x no es entero.

Así, la única posibilidad es

$$x = 3$$
$$y = 1.$$

Comprobación: Sustituimos $x = 3$ y $y = 1$ en el sistema (11.41):

$$3x + 2y = 3(3) + 2(1) = 11 > 8.$$
$$2x + 3y = 2(3) + 3(1) = 9.$$

EJEMPLOS

1. Resolver el sistema $5x-6y>6$
$x+2y=6.$

Solución: Multiplicamos la igualdad por 3 obteniendo:

$$5x-6y>6$$
$$3x+6y=18$$

Sumándolas obtenemos:

$$8x>24$$

Despejando x:

$$x>3.$$

Multiplicamos la igualdad por -5, obteniendo:

$$5x-6y>6$$
$$-5x-10y=-30.$$

Sumándolas obtenemos:

$$-16y>-24.$$

Despejando y:

$$y<\frac{-24}{-16}$$
$$y<\frac{3}{2}.$$

Las soluciones son $x>3$, $y<\frac{3}{2}$.

2. Resolver el sistema $2x-5y=-2$
$4x+3y<-5.$

Solución: Multiplicamos la igualdad por 3 y la desigualdad por 5, con lo que obtenemos:

$$6x-15y=-6$$
$$20x+15y<-25.$$

Sumándolas obtenemos:

$$26x<-31.$$

Despejando x:

$$x<-\frac{31}{26}.$$

Multiplicamos la igualdad por -2

$$-4x+10y=4$$
$$4x+3y<-5.$$

Sumándolas obtenemos

$$13y < -1$$

$$y < -\frac{1}{13}.$$

Las soluciones son $x < -\frac{31}{26}$, $y < -\frac{1}{13}$.

11.10.2 Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas.

1. $2x + 5y = 6$
   $-3x + y > 7$
2. $-x - 6y < 5$
   $x + 5y = -2$
3. $5x + 2y = -11$
   $x - y < -5$
4. $2x + 5y = 7$
   $6x + 10y > 24$
5. $8x + 3y = 5$
   $6x - 9y < 0$
6. $6x - 4y = 20$
   $2x + 3y < 11$
7. $3x + 12y = 10$
   $12x + 4y < 7$
8. $6x - y = 0$
   $9x + 2y > 21$
9. $7x + 4y < 6$
   $2x - 3y = -10$

10. ¿Cuántos rectángulos pueden formarse de tal manera que las longitudes de sus lados sean números enteros, la diferencia del lado mayor menos el menor sea 6 y su perímetro sea menor o igual que 30?
11. Julia ha reunido 65 monedas, cada una de ellas es de 5 o 10 centavos. En total tiene más de $4.50. ¿Cuál es el menor número de monedas de 10 centavos que puede tener?
12. Encuentra todos los números de dos cifras que satisfagan las siguientes propiedades: la suma de sus dígitos es igual a 8. La cifra de las decenas es mayor o igual que el doble de la cifra de las unidades.
13. En un triángulo rectángulo cuyas longitudes de los lados son números enteros, la hipotenusa mide 17 cm. El doble del cateto menor, menos una unidad, es igual a la longitud del cateto mayor. El perímetro es mayor que 37 cm. Encuentra las longitudes de los catetos.
14. Encuentra las dimensiones de todos los triángulos isósceles no equiláteros de tal manera que las longitudes de sus lados sean números enteros, su perímetro sea 15 y la suma de dos lados distintos sea menor o igual que 8.
15. Hace 10 años un hombre tenía 10 veces la edad de su hijo. Si actualmente la suma de la edad del padre más el doble de la del hijo es menor o igual que 60, ¿qué edad tiene cada uno?
16. En un laboratorio se han reproducido camarones de río y ranas, que serán utilizados posteriormente en experimentos. En total hay 155 animales. Si la diferencia entre el 5% de camarones y el 20% de ranas es mayor o igual que 25, ¿cuántos ejemplares puede haber de cada tipo?
17. El semiperímetro de un rectángulo es igual a 8. La diferencia entre el doble del ancho y el largo es menor que 2. Las dimensiones de los lados son números enteros. Encuentra las dimensiones de todos los rectángulos que puedan satisfacer las condiciones anteriores.

11.10.3 Método gráfico de un sistema de dos desigualdades

Un fabricante de radios tiene costos fijos de $140 diarios más $72 por concepto de mano de obra y materiales por cada radio fabricado. Si cada aparato se vende en $107, ¿cuántos radios debe producir y vender cada día para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias?

Solución: El costo total de producción de x radios al día es:

$$\text{costo total } = 72x + 140.$$

Puesto que cada aparato se vende en $107, los ingresos correspondientes son:

$$\text{ingresos } = 107x.$$

Para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias, el costo total y los ingresos deben ser iguales; es decir,

$$107x = 72x + 140.$$

La solución de esta ecuación es $x = 4$.

De lo anterior deducimos que, para que no haya pérdidas debe producir y vender por lo menos 4 radios.

Dibujando las rectas que representan el costo total y los ingresos, observamos que se cortan en el punto $x = 4$.

En la figura 11.11 podemos observar que si $x > 4$, la recta $y = 107x$ está arriba de la recta $y = 72x + 140$, es decir, los ingresos son mayores que los costos. De lo anterior deducimos que si $x > 4$, hay ganancias.

Si $x < 4$, entonces la recta $y = 107x$ está abajo de la recta $y = 72x + 140$; es decir, los ingresos son menores que los costos y, por consiguiente, hay pérdidas.

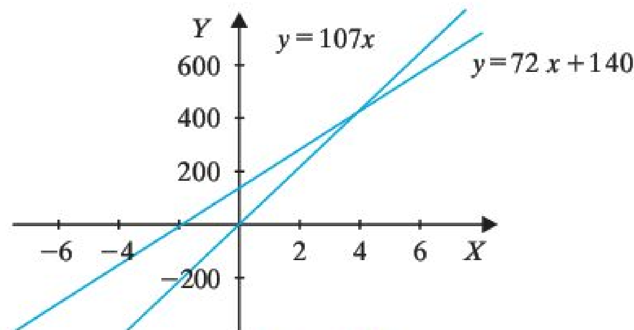


Figura 11.11

En los siguientes ejemplos utilizamos lo visto en la página 154.

EJEMPLOS

1. Describir mediante desigualdades la región sombreada en la figura 11.12, limitada por las rectas cuyas ecuaciones son $y = x - 6$ y $y = \frac{1}{4}(3x - 8)$.

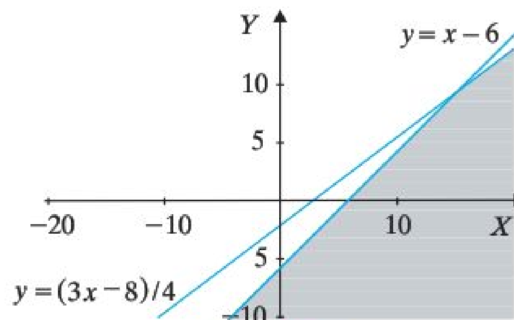


Figura 11.12

Solución: Los puntos que están en la zona sombreada están abajo de la recta $y = x - 6$; es decir,

$$y < x - 6$$

y están debajo de la recta $y = \frac{3}{4}x - 2$, así que satisfacen

$$y < \frac{3}{4}x - 2.$$

Por tanto, la zona sombreada consiste en los puntos (x, y) que satisfacen ambas desigualdades:

$$y < x - 6 \text{ y } y < \frac{3}{4}x - 2.$$

2. Dibujar la región que consta de los puntos que se encuentran arriba de la recta $5x - y = 0$ y debajo de la recta $2x + 3y - 3 = 0$, y escribir las desigualdades correspondientes.

Solución: Primero escribimos las ecuaciones en la forma acostumbrada; es decir,

$$y = 5x$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 1.$$

Los puntos del plano que están arriba de la recta $y = 5x$ son los que satisfacen la desigualdad:

$$y > 5x,$$

y los que están debajo de $y = -\frac{2}{3}x + 1$ son los que satisfacen:

$$y < -\frac{2}{3}x + 1.$$

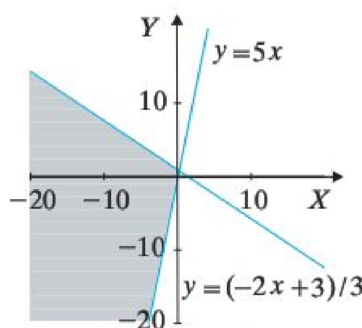


Figura 11.13

3. Dibujar la región determinada por las desigualdades $y < -2x - 3$ y $6x + y - 1 \geq 0$.

Solución: Primero dibujamos las rectas:

$$y = -2x - 3$$
$$y = -6x + 1.$$

Ahora localizamos la región que se encuentra debajo de la recta $y = -2x - 3$ y arriba de la recta $y = -6x + 1$. Como tenemos que $y \geq -6x + 1$, entonces la recta está incluida en la región.

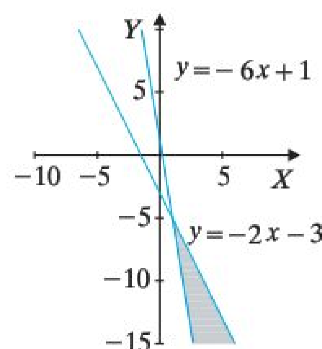


Figura 11.14

4. Dibujar la región determinada por las desigualdades $y > 3x - 2$, $y < -x + 5$, $y > -8x - 2$.

Solución: La región que determina la desigualdad $y > 3x - 2$ son los puntos que están arriba de la recta $y = 3x - 2$. La región que determina la desigualdad $y < -x + 5$ son los puntos que están debajo de la recta $y = -x + 5$. La región que determina la desigualdad $y > -8x - 2$ son los puntos que están arriba de la recta $y = -8x - 2$.

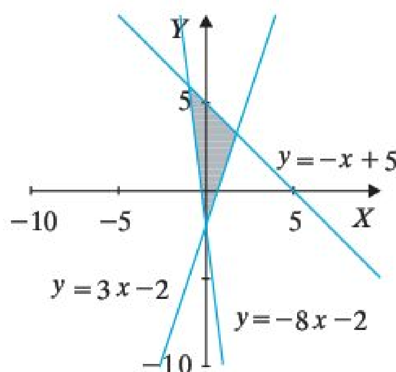


Figura 11.15

11.10.4 Ejercicios

Dibuja la región que se pide en cada caso y escribe las desigualdades correspondientes.

1. Debajo de la recta $3x - y - 6 = 0$ y arriba de la recta $3y = -4x - 8$.
2. Arriba de la recta $4x + 7y = -4$ y debajo de la recta $x - y = 0$.
3. Debajo de la recta $y = 9$ y arriba de la recta $y = -1$.
4. Debajo de las rectas $y = 10x - 20$ y $y = -\frac{5}{2}x + 25$.
5. Arriba de la recta $y = -6x - 1$ y en la recta $y = x$.
6. Debajo de la recta $y = 8x - 1$ y no en la recta $y = -x + 5$.
7. Dibuja la región que consta de los puntos que se encuentran arriba de las rectas $y = x - 4$ y $y = -2x + 8$ y debajo de la recta $x - y - 1 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
8. Dibuja la región que consta de los puntos que se encuentran arriba de las rectas $5y = 6x + 15$ y $x + y = 2$ y debajo de la recta $y = 7$. Escribe las desigualdades correspondientes.
9. Dibuja la región encerrada por todas las rectas: $-x + 2y = 0$, $2x + y = 2$, $y = -\frac{5}{2}x + 7$, $y + 8 = 2x$. Escribe las desigualdades correspondientes.

11.10.5 Introducción a la programación lineal

Un fabricante de muebles fabrica dos tipos de sillas para escritorio: normal y de lujo. Para cubrir la demanda, él sabe que en una semana debe fabricar al menos 100 sillas normales y 25 de lujo, pero su taller no puede fabricar más de 200 sillas semanales. Por cada silla normal obtiene una utilidad de $150 y por cada silla de lujo obtiene $250. ¿Cuántas sillas de cada tipo debe fabricar en una semana para optimizar su ganancia?

Solución: Llamemos x al número de sillas normales y y al número de sillas de lujo que fabrica en una semana.
Las condiciones del problema dicen que:

$$100 \le x$$
$$25 \le y$$
$$x + y \le 200$$

La utilidad por fabricar las sillas es:

$$U = 150x + 250y. \tag{11.42}$$

Lo que debemos buscar es para qué valores de x y y, que satisfagan las condiciones del problema, la utilidad U es máxima.

Dibujemos la región determinada por las condiciones del problema y varias rectas de la forma (11.42) para distintos valores de U.

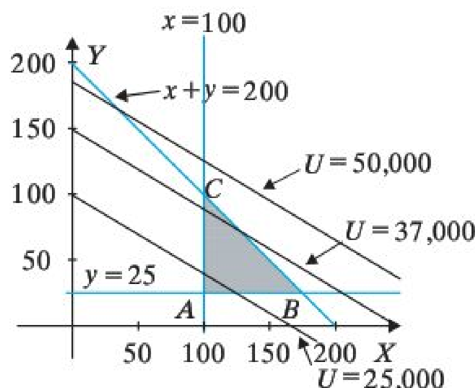


Figura 11.16

Observemos que:

- La región determinada por el problema es un triángulo con vértices en $(100,25)$, $(175,25)$ y $(100,100)$.
- Todas las rectas $U = 150x + 250y$ son paralelas, ya que todas tienen pendiente

$$-\frac{150}{250} = -\frac{3}{5}$$

  y están más arriba conforme U es mayor.
- Por lo anterior, para resolver el problema debemos encontrar aquella de dichas rectas que toque al triángulo en al menos un punto y se encuentre encima del resto de esas rectas. En este caso, es aquella que pasa por el punto $C(100,100)$.

Evaluamos $U = 150x + 250y$ en $(100,100)$ y obtenemos:

$$U = 150(100) + 250(100) = 40{,}000.$$

Esto quiere decir que se obtiene una utilidad máxima de $40,000 cuando se fabrican 100 sillas de cada tipo.

Un problema de programación lineal es aquel en el que hay que optimizar (encontrar el máximo o el mínimo) una función lineal de dos o más variables, llamada *función objetivo,* sujetas a varias condiciones, llamadas *restricciones,* dadas por desigualdades lineales.

Cuando el problema es de dos variables, las restricciones determinan un polígono en el plano, como el triángulo del ejemplo anterior, y la función objetivo es una familia de rectas paralelas.

El problema se resuelve encontrando la recta que toca al polígono en el punto más alto o más bajo posible, dependiendo de si queremos encontrar el máximo o el mínimo.

El resultado principal de la programación lineal nos dice que este punto será un vértice del polígono. Así que lo que debemos hacer en general para resolver un problema de este tipo es evaluar la función objetivo en los vértices del polígono y fijarnos en el que la función alcance un valor máximo o mínimo, según el caso.

Ejemplo

- Un fabricante tiene tres máquinas, M_1, M_2 y M_3, con las que puede fabricar dos tipos de productos, P_1 y P_2. Con los productos P_1 tiene una utilidad de $20 y con los productos P_2 la utilidad es de $30.
- La máquina M_1 puede trabajar a lo más 70 horas a la semana, la máquina M_2, 60 horas y la M_3, 40 horas.
- Para fabricar cualquiera de los productos, es necesario usar parte del tiempo de cada una de las tres máquinas. En la siguiente tabla se muestra cuántas horas de cada máquina M_i se necesitan para fabricar el producto P_j.

	P_1	P_2
M_1	2	1
M_2	1	2
M_3	1	1

¿Cuántos productos de cada tipo debe producir a la semana para maximizar su ganancia?

Solución: Llamamos x al número de unidades de P_1 que debe producir a la semana, y y al número de unidades de P_2.

Las restricciones de tiempo muestran que:

$$2x * y' \; 70$$
$$x * 2y' \; 60$$
$$x * y' \; 40.$$

Además, como x y y representan unidades producidas, no pueden ser negativas.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0.$$

La utilidad por fabricar x unidades de P_1 y y unidades de P_2 es:

$$U = 20x + 30y$$

y ésta es la función que debemos maximizar.

Para resolver el problema, dibujamos la región determinada por las restricciones del problema, que es un polígono.

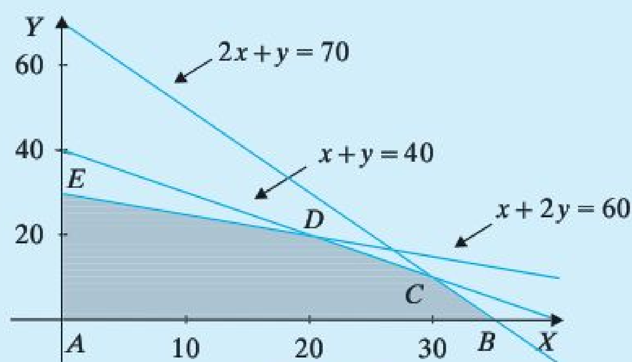


Figura 11.17

Encontramos los vértices del polígono: $A(0,0)$, $B(35,0)$, $C(30,10)$, $D(20,20)$ y $E(0,30)$ y evaluamos la función de utilidad en ellos:

Vértice	Utilidad
$A(0,0)$	0
$B(35,0)$	700
$C(30,10)$	900
$D(20,20)$	**1000**
$E(0,30)$	900

De acuerdo con el resultado de programación lineal, se obtiene una utilidad máxima fabricando 20 artículos de cada tipo.

Observamos además que en el punto $(20,20)$ se están usando al máximo las máquinas M_2 y M_3, ya que

$$(20) \quad 2(20) \quad 60 \qquad \text{y} \qquad (20) \quad (20) \quad 40,$$

pero de la máquina M_1 sólo se usan

$$2(20) \quad (20) \quad 60$$

horas de las 70 posibles.

11.10.6 Ejercicios

1. Encuentra el máximo de la función objetivo $u = x + 3y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2, 2x + y \leq 3$.
2. En el problema inicial de la lección, ¿cuántas sillas de cada tipo deben fabricarse si la función de utilidad es $U = 150x + 100y$?
3. En el problema de las tres máquinas, encuentra la utilidad máxima si la máquina M_1 sólo puede trabajar 35 horas a la semana.
4. En el problema de las tres máquinas, ¿qué sucede si la función de utilidad es $U = 20x + 20y$?

Resumen

Método de igualación

- Despejamos una de las variables de ambas ecuaciones.
- Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos para la variable que en ellas aparece.
- Sustituimos el valor de esta variable en alguna de las ecuaciones obtenidas en el primer paso y resolvemos para la otra variable.
- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Método de suma y resta

- Multiplicamos las ecuaciones por aquellos números que hagan que, en ambas ecuaciones, los coeficientes de una de las variables sean iguales, excepto tal vez por el signo.
- Sumamos o restamos las ecuaciones para eliminar esa variable.
- Resolvemos la ecuación resultante para la variable que quedó.
- Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.
- Comprobamos la solución sustituyendo los valores en las ecuaciones originales.

Método de sustitución

- Despejamos una de las variables de una de las ecuaciones.
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión encontrada y resolvemos para encontrar el valor de la variable que ahí aparece.
- Sustituimos dicho valor en la ecuación del paso 1 y resolvemos para obtener el valor de la otra variable.
- Comprobamos sustituyendo los valores en ambas ecuaciones.

Método de Gauss

- Si el coeficiente de x, la primera variable, es 1 en por lo menos una ecuación, elegimos alguna de éstas y la colocamos en el primer lugar. Si no sucede así, multiplicamos alguna ecuación por el número adecuado, para que el coeficiente de la primera variable sea 1 y la colocamos como la primera ecuación.
- Multiplicando por los factores correspondientes y sumando, eliminamos el término en x de las ecuaciones restantes.
- Multiplicamos, si es necesario, por el número que haga que el coeficiente de la segunda variable (y), sea 1, en la segunda ecuación.
- Multiplicando por el número correspondiente y sumando, eliminamos el término en y en la tercera ecuación.
- Se divide entre el coeficiente de la variable en la tercera ecuación, obteniendo así el valor de la tercera variable.
- Para obtener los valores restantes procedemos en retroceso: se sustituye el valor obtenido en la ecuación anterior, encontrando así, uno a uno, los valores de las variables.

11.11 EJERCICIOS DE REPASO

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando cualquiera de los métodos estudiados en este capítulo.

1. $\begin{aligned} 2x - 4y &= -\tfrac{83}{6} \\ 12x - 16y &= -53 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} w - y &= \tfrac{7}{12} \\ 12w + 12y &= 25 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} -7a + 3b &= -\tfrac{19}{2} \\ 6a - 4b &= \tfrac{13}{3} \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x - y &= -c \\ -2x + y &= -a - c \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 9a \\ 8x - 4y &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 7r - 5s &= 7 \\ 5r - 7s &= -19 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 5t + w &= -8 \\ 5t + w &= 3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 8r + 6t &= -16 \\ 3r - 2t &= -23 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 10w - 9z &= -11 \\ -7w + 9z &= 5 \end{aligned}$

10. $6x+12y=54$
$-3x-6y=-27$

11. $6a-5b=-13$
$-9a+10b=2$

12. $9r+10s=8$
$10s+12r=9$

13. $8x+3y+10z=5$
$-4x+9y-5z=1$
$12x-12y-15z=-4$

14. $x+3y+2z=-6$
$2x+y-3z=3$
$3x-2y+z=9$

15. $6x-3y+2z=21$
$-2x+y+z=-2$
$x-y+3z=9$

16. $x+2y+z=6$
$2x-y+3z=17$
$5x+9y-z=0$

17. $x+2y-3z=0$
$2x-y-z=0$
$x+y-z=6$

18. $4x-5y=11$
$x-y+3z=10$
$6x-7y-10z=-9$

19. La suma de las cifras de un número de dos dígitos es 14. Si dividimos el número entre dicha suma, el cociente es 6 y el residuo es 11. Encuentra el número.

20. En un número de dos cifras, el dígito de las decenas es el triple del dígito de las unidades y la suma de sus dígitos es 12. Encuentra el número.

21. Si en una fracción le sumas 2 al numerador y le restas 3 al denominador, el resultado es $\frac{5}{3}$. Si al numerador le restas 2 y al denominador le sumas 1, el resultado es $\frac{3}{5}$. ¿Cuál es el valor del numerador y del denominador de la fracción?

22. La suma de dos números es 25. El cociente del primero entre 2 veces el segundo es $\frac{7}{11}$. ¿Cuáles son los números?

23. Se tienen dos disoluciones que contienen cloro, una al 6% y otra al 4%. ¿Qué cantidad hay que tomar de cada una para obtener 600 mililitros al 5% ?

24. Balancea la ecuación que representa la transformación del fosfato de calcio $Ca_3(PO_4)_2$ por acción del ácido sulfúrico H_2SO_4 en ácido fosfórico H_3PO_4 y sulfato de calcio $CaSO_4$:



$$Ca_3(PO_4)_2 + H_2SO_4 \rightarrow H_3PO_4 + CaSO_4$$

25. En ciertas condiciones de temperatura, el anhídrido sulfuroso SO_2 reacciona con el oxígeno del aire para transformarse en anhídrido sulfúrico SO_3. Balancea la ecuación:



$$SO_2 + O_2 \rightarrow SO_3$$

26. Albert Einstein, físico alemán, es considerado un genio de todos los tiempos. Su mayor logro fue probar que una porción insignificante de materia puede producir una inmensa cantidad de energía; con ello sentó las bases de la energía nuclear, pero manifestó su desacuerdo en su uso para fines bélicos. Einstein nació a finales del siglo XIX, y murió en el siglo XX. Puedo decirte que el número cuyas tres cifras coinciden con las tres últimas cifras del año de su muerte, satisfacen las siguientes condiciones: la suma de las tres cifras es igual a 19. La cifra de las unidades más la de las decenas, menos la de las centenas es igual a 1. El doble de la cifra de las centenas es igual a la diferencia del cuádruple de la de las unidades menos 2. ¿En qué año murió?

27. Tres obreros pueden hacer un trabajo en $6\frac{2}{3}$ días. Juntos, el primer obrero y el segundo lo harían en 10 días, y el segundo junto con el tercero lo harían en 12 días. ¿En cuántos días lo haría cada persona sola?

28. Si se conectan en paralelo 4 resistencias de la misma capacidad y 2 iguales de otra, se obtiene una resistencia total de 2.4 ohms. Si en otro circuito conectamos también en paralelo 3 resistencias de la primera capacidad que usamos en el circuito anterior y 4 resistencias de la segunda, obtenemos una resistencia total de 3 ohms. ¿De qué capacidad fueron las resistencias usadas? Recuerda que si conectamos en paralelo 2 resistencias de capacidad R_1 y R_2, y R es la resistencia total, entonces,

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}.$$

29. El largo y ancho de un rectángulo están en razón $\frac{1}{6}$. Si el área es igual a 150 cm^2, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

30. Un veterinario compró unos gatos por $750. En la primera semana se le murieron 5 gatos y vendió cada uno de los restantes a $6 más de lo que le costaron. En este negocio perdió $30. ¿Cuántos gatos compró el veterinario? ¿Cuánto le costó cada gato?

31. El producto de dos números es 8640, y uno de ellos es cinco doceavos del otro. ¿Cuáles son dichos números?

32. Un número de dos dígitos satisface las siguientes propiedades: el producto de la suma de sus dígitos por la diferencia del dígito de las unidades menos el dígito de las decenas es igual a 0. El producto de la suma de los dígitos por sí mismo es igual a 256. ¿Cuál es dicho número?

Respuestas a los ejercicios seleccionados

Capítulo 1 Conjuntos

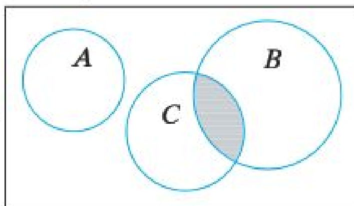
Ejercicios de la página 8 (sección 1.3.1)

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}\right\}$. **2.** $\{-1, 0, 1\}$. **3.** $\{-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$. **4.** $\{-1, 1\}$.
5. $\{x \in \mathbb{Z} | x \neq -2\}$. **6.** $\{3, 5\}$. **7.** $\left\{-7, \frac{3}{2}\right\}$. **8.** $-6 \in \{-10, -9, -6, -3, 0, 5\}$. **9.** $\{7, -11, 16\} \not\subset \{1, -7, 11, -14, 16\}$.
10. $\{-3, 0\} \subset \{0, -1, -3, 1, 3\}$. **11.** $\frac{3}{5} \notin \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}\right\}$. **12.** $\{-4, 4\} \subset \mathbb{Z}$. **13.** $\mathbb{Z} \not\subset \{-1, -2, -3, -4\}$.
14. $-\pi \notin \{2\pi, \pi^2, -2\pi, \pi, 6\pi\}$. **15.** $8 \in \mathbb{Z}$. **16.** $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
17. $A \setminus B = \{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **18.** $A \setminus B = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$.
19. $A \setminus B = \{-5, -4, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$. **20.** $A^c = \left\{\frac{2}{3}, 2, \frac{8}{9}, b\right\}$. **21.** $A^c = \left\{-11, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, 2, \frac{8}{7}, a\right\}$.
22. $A^c = \left\{\frac{5}{6}, b\right\}$. **23.** $A^c = \left\{\frac{5}{6}, 0, \frac{8}{9}, b\right\}$. **24.** $A \not\subset B; B \subset A; C \subset A; A \not\subset C; B \not\subset C; C \not\subset B$.

Ejercicios de la página 17 (sección 1.7.1)

1. Falso. **2.** Falso. **3.** Verdadero. **4.** Verdadero. **5.** Verdadero. **6.** Verdadero. **7.** $A \cup B = \{1, 5, 9, a, b, c\}$.
8. $B \cap C = \{a\}$. **9.** $A \cap B = \{5\}$. **10.** $A \cup B \cup C = \{a, b, c, 1, -2, 3, 5, 9\}$. **11.** $(B \cap C) \cup A = \{a, 1, 5, 9\}$.
12. $(A \cap B) \cup C = \{-2, 3, 5, a, 9\}$. **13.** $(A \cap C) \cup B = \{a, b, c, 5, 9\}$. **14.** $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 5, 9, a\}$.

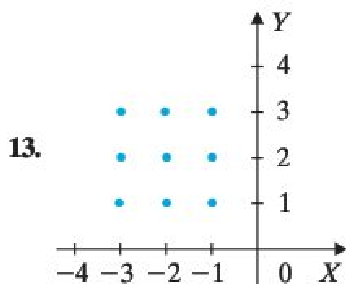
15. $A \cap B \cap C = \varnothing$. **17.**



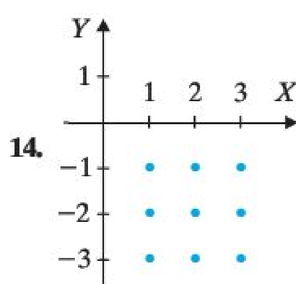
Ejercicios de la página 19 (sección 1.8.1)

1. $A \times B = \{(-1,1), (-1,2), (-1,3), (1,1), (1,2), (1,3), (0,1), (0,2), (0,3)\}$.
2. $B \times A = \{(1,-1), (1,1), (1,0), (2,-1), (2,1), (2,0), (3,-1), (3,1), (3,0)\}$.
3. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1,1)\}$.
4. $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(-1,1), (-1,2), (-1,3), (1,1), (1,2), (1,3), (0,1), (0,2), (0,3), (1,-1), (1,0), (2,-1), (2,1), (2,0), (3,-1), (3,1), (3,0)\}$.
5. $A \times B = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c)\}$. **6.** $A \times C = \{(a,a), (a,c), (b,a), (b,c)\}$.
7. $A \times (B \setminus C) = \{(a,b), (b,b)\}$. **8.** $(A \times B) \setminus (A \times C) = \{(a,b), (b,b)\}$.
9. $C \times A = \{(a,a), (a,b), (c,a), (c,b)\}$. **10.** $B \times A = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,a), (c,b)\}$.
11. $B \times (C \cup A) = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$.
12. $A \times (B \cup C) = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c)\}$.

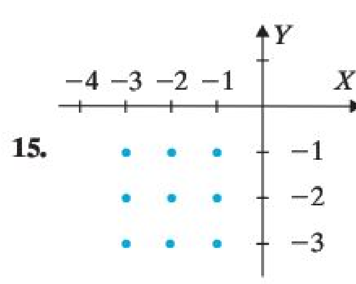
13.

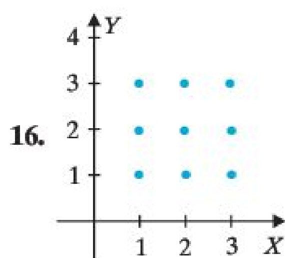


14.



15.



16. 

18. La cardinalidad de $A\times B$ es 27.

Ejercicios de la página 20 (sección 1.9)

1. $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. **2.** $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** $\{37, 41, 43, 47, 53, 59\}$. **4.** $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$. **5.** {Sinaloa, Sonora, San Luis Potosí}. **6.** $\{11, 101, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 211\}$. **7.** $9.4 \notin \{1.2, 3.75, 9.3, 12, 13.7, 20\}$. **8.** $\frac{1}{32} \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right\}$. **9.** $\{2, 4, 6, 8\} \subset \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. **10.** $0 \in \{6, 22, 3, 0, 8, 1\}$. **11.** $\{-5, -21, 93\} \subset \{\text{números enteros impares}\}$. **12.** $\{5, 10, 12\} \not\subset \{5, 10, 15, 20, 25\}$. **13.** $A\cup B = \{x, y, z\}$. **14.** $A\cup C = \{x, y, z\}$. **15.** $B\cup C = \{y, z\}$. **16.** $(A\cup B)\cup C = \{x, y, z\}$. **17.** $(A\setminus B)\cup C = \{x, z\}$. **18.** $(A\setminus C)\cup B = \{x, y, z\}$. **19.** $(A\cup B)\setminus C = \{x, y\}$. **20.** $(A\cup C)\setminus B = \{x\}$. **21.** $A\setminus(B\setminus C) = \{x, z\}$. **22.** $A\setminus(A\cup C) = \varnothing$. **23.** $A\setminus(B\cap C) = \{x, y\}$. **24.** $(A\setminus B)\cup(A\setminus C) = \{x, y\}$. **25.** $A\cap B = \{0, \pi\}$. **26.** $B\cap C = \{0\}$. **27.** $A\cap C = \{-\pi, 0\}$. **28.** $(A\cap B)\cap C = \{0\}$. **29.** $D\setminus(A\cap C) = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, 2\pi\}$. **30.** $D\setminus(A\cup B) = \{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.
31. $A\times B = \{(-\pi,0), (-\pi,\frac{\pi}{2}), (-\pi,\pi), (0,0), (0,\frac{\pi}{2}), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\frac{\pi}{2}), (\pi,\pi)\}$.
32. $B\times C = \{(0,-\pi), (0,0), (0,\frac{3\pi}{2}), (\frac{\pi}{2},-\pi), (\frac{\pi}{2},0), (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}), (\pi,-\pi), (\pi,0), (\pi,\frac{3\pi}{2})\}$.
33. $(G\times G)\setminus((A\times F)\cup(B\times E)\cup(C\times D)) = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$.

Capítulo 2 Sistemas de numeración

Ejercicios de la página 30 (sección 2.3.1)

1. La representación del número 89 es 155 en base 7. **2.** La representación del número 546 es 202020 en base 3. **3.** La representación del número 638 es 778 en base 9. **4.** La representación del número 2309 es 4405 en base 8. **5.** La representación del número 98374 es 2035234 en base 6. **6.** La representación del número 71248 es 2234443 en base 5. **7.** La representación del número 2536 es 100111101000 en base 2. **8.** La representación del número 3746 es 322202 en base 4. **9.** La representación del número 32635 es 164101 en base 7. **10.** La representación del número 5657 es 13031 en base 8. **11.** La representación del número 55555 es 3234210 en base 5. **12.** La representación del número 11111 es 10101101100111 en base 2. **13.** La representación decimal de $6105847_{(9)}$ es 3252031. **14.** La representación decimal de $11001101_{(2)}$ es 205. **15.** La representación decimal de $24535132_{(6)}$ es 790400. **16.** La representación decimal de $30201130_{(4)}$ es 51292. **17.** La representación decimal de $124003422_{(5)}$ es 609862. **18.** La representación decimal de $112020211_{(3)}$ es 10390. **19.** La representación decimal de $13242365_{(7)}$ es 1220588. **20.** La representación decimal de $578476128_{(9)}$ es 253252520. **21.** La representación decimal de $3201023_{(4)}$ es 14411. **22.** La representación decimal de $41202253_{(6)}$ es 1182489. **23.** La representación decimal de $121046503_{(7)}$ es 7541446. **24.** La representación decimal de $101010100_{(2)}$ es 340. **25.** La representación del número 67 es 1000011 en base 2. La representación del número 67 es 2111 en base 3. La representación del número 67 es 232 en base 5. La representación del número 67 es 124 en base 7. La representación del número 67 es 74 en base 9.

Ejercicios de la página 34 (sección 2.4.1)

1. $1111101_{(2)}$. **2.** $10000010_{(2)}$. **3.** $11101110_{(2)}$. **4.** $101101011_{(2)}$. **5.** $1101000001_{(2)}$. **6.** $1001011011_{(2)}$. **7.** $101010101000_{(2)}$. **8.** $100111011_{(2)}$. **9.** $10000000010_{(2)}$. **10.** $101111010_{(2)}$. **11.** $10111_{(2)}$. **12.** $110_{(2)}$. **13.** $11_{(2)}$. **14.** $111111_{(2)}$. **15.** $100_{(2)}$. **16.** $1011_{(2)}$. **17.** $100110_{(2)}$. **18.** $100000000_{(2)}$. **19.** $10101_{(2)}$. **20.** $10010_{(2)}$. **21.** $111100_{(2)} < 1110000_{(2)}$. **22.** $1110010_{(2)} < 1110100_{(2)}$. **23.** $1000110_{(2)} < 1001110_{(2)}$. **24.** $1110011_{(2)} < 11001011_{(2)}$. **25.** $1000101_{(2)} < 1100100_{(2)}$. **26.** $10010101_{(2)} < 10101010_{(2)}$. **27.** $11101111_{(2)} < 11110111_{(2)}$. **28.** $1111100_{(2)} < 11111100_{(2)}$.

Ejercicios de la página 39 (sección 2.5.3)

1.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

;

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

2.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	20

;

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	9	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

3. $2001100_{(3)}$. **4.** $10220011_{(3)}$. **5.** $211112021_{(3)}$. **6.** $4555145440_{(6)}$.

7. $24302213_{(5)}$. **8.** $17633518_{(9)}$. **9.** $130302006666_{(7)}$. **10.** $727676054_{(8)}$. **11.** $30322_{(4)}$. **12.** $10102_{(3)}$. **13.** $2212013_{(5)}$. **14.** $881020_{(9)}$. **15.** $102254_{(6)}$. **16.** $116453_{(9)}$. **17.** $32515540_{(7)}$. **18.** $1666670_{(8)}$. **19.** $10034_{(5)} < 100234_{(5)}$. **20.** $657342_{(8)} < 657432_{(8)}$. **21.** $100101011_{(2)} < 101001011_{(2)}$. **22.** $3012013_{(4)} < 3013023_{(4)}$. **23.** $12435687_{(9)} < 13425687_{(9)}$. **24.** $340011022_{(7)} < 3400110022_{(7)}$. **25.** $201201002_{(3)} < 201202002_{(3)}$. **26.** $40320010_{(6)} = 40320010_{(6)}$. **27.** $123400_{(5)} = 20066_{(7)}$. **28.** $332123_{(4)} = 3995_{(10)}$. **29.** $5460012_{(7)} = 1021000220200_{(3)}$. **30.** $10231_{(9)} = 1101001011111_{(2)}$. **31.** $101111_{(2)} = 233_{(4)}$. **32.** $211012_{(3)} = 4344_{(5)}$. **33.** $342112_{(6)} = 70474_{(8)}$. **34.** $1762533_{(8)} = 15031403_{(6)}$. **35.** $256104_{(7)} = 72423_{(9)}$. **36.** $3928762 = 3BF2BA_{(16)}$. **37.** $1736548 = 1A7F64_{(16)}$. **38.** $85798767 = 51D2F6F_{(16)}$. **39.** $48763456 = 2E81240_{(16)}$. **40.** $2784645 = 2A7D85_{(16)}$. **41.** $7564289 = 736C01_{(16)}$. **42.** $57562432 = 36E5540_{(16)}$. **43.** $4294967296 = 100000000_{(16)}$.

Capítulo 3 El campo de los números reales

Ejercicios de la página 49 (sección 3.2.2)

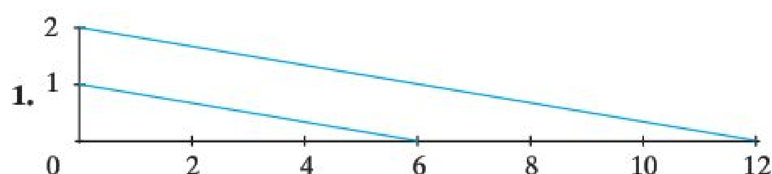
1. −93 m. **2.** +4° C. **3.** +6 m. **4.** +35 pesos. **5.** −15° C. **6.** −36 m. **7.** +18° C. **8.** −200 pesos. **9.** −1 m. **10.** −5° C. **11.** −14 pesos. **12.** +805 pesos. **13.** +1500 m. **14.** +2303 m. **15.** +1650 m. **16.** −32° C. **17.** 47. **18.** −81. **19.** 13 **20.** 3. **21.** −175. **22.** 0. **23.** −3 kg. **24.** −200 calorías. **25.** −153 puntos. **26.** +5 m. **27.** +5 cm. **28.** +5 latidos por minuto. **29.** −17° C. **30.** −100 gr. **35.** 9. **36.** −17. **37.** 12. **38.** 124. **39.** −29. **40.** −136. **41.** −7. **42.** 88. **43.** 1. **44.** 104. **45.** 11. **46.** −7. **47.** 34. **48.** −723.

Ejercicios de la página 52 (sección 3.2.4)

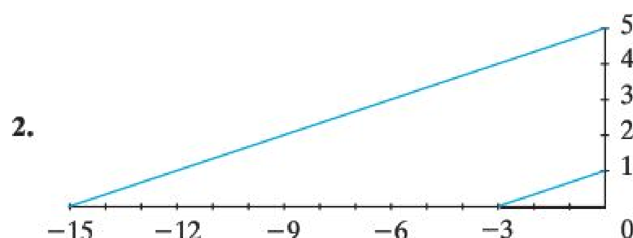
1. 10. **2.** −15. **3.** 15. **4.** −6. **5.** 0. **6.** 7. **7.** 124. **8.** 4. **9.** −64. **10.** −12. **11.** 4. **12.** −22. **13.** $(92-(-13))-(-25)=130$. **14.** $-62+(38-(-11))=-13$. **15.** $(-47+20)-15=-42$. **16.** La temperatura en la noche era de 12° C. **17.** El submarino se encuentra a 234 metros bajo el nivel del mar o a −234 metros. **18.** El avión llevaba una altitud de 9 133 metros. **19.** El elevador se encuentra en el piso 18. **20.** Ricardo tiene un saldo de −116 pesos o debe $116. **21.** La diferencia entre las altitudes a las que se encuentran los dos alpinistas es de 4 084 metros. **22.** El helicóptero se encuentra a 2 501 metros sobre el nivel del mar.

Ejercicios de la página 56 (sección 3.2.6)

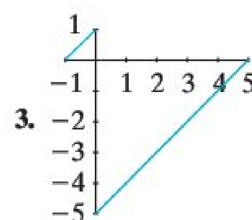
1.



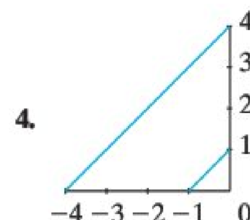
2.



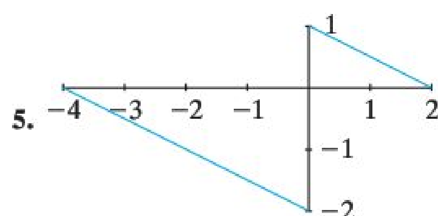
3.



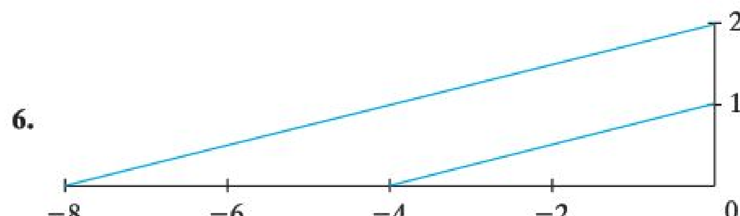
4.



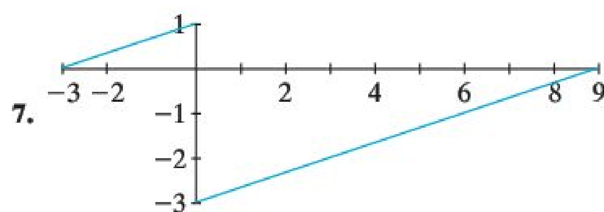
5.



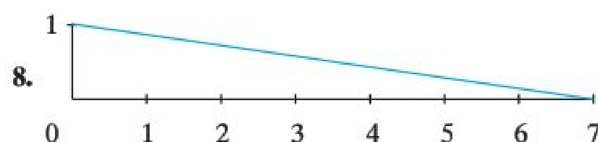
6.



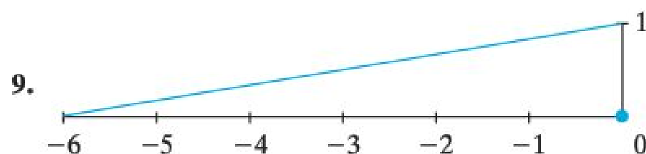
7.



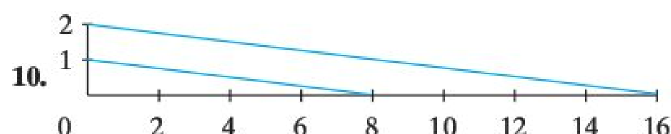
8.



9.



10.



11. 261. **12.** 539. **13.** 512. **14.** −406. **15.** −246.

16. -205. **17.** 75. **18.** 36. **19.** -837. **20.** -48. **21.** 104. **22.** -440. **23.** -3. **24.** 0. **25.** 210. **26.** 204. **27.** 56. **28.** -980. **29.** -650. **30.** El volumen disminuye a la mitad. **31.** La base aumenta.

Ejercicios de la página 59 (sección 3.2.8)

1. $3 < 5$. **2.** $1 > -1$. **3.** $-5 > -6$. **4.** $-34 = -34$. **5.** $67 > -67$. **6.** $0 > -12$. **7.** $-21 < -20$. **8.** $8 < 25$. **9.** $-3, -1, 0, 4$. **10.** $-2, -1, 1, 2$. **11.** $-61, -56, -54, -51$. **12.** $-7, -3, 3, 7$.

Ejercicios de la página 62 (sección 3.2.10)

1. $2^2 3^2 11$. **2.** 2^{10}. **3.** $7(13)$. **4.** 101. **5.** $2^3 7^2 29$. **6.** $3^2 5^2 29$. **7.** $17, 257, 65537$. **8.** 12. **9.** 60. **10.** 6. **11.** 4. **12.** 1. **13.** 120. **14.** 30. **15.** 90. **16.** 441. **17.** 52. **18.** 2. **19.** 132. **20.** Nació en 1436. Descubrió América en 1492. Murió en 1506. **21.** Salen de la llave 4 litros por minuto. **22.** Se requieren 38 días. **23.** Hay que dividir entre 30.

Ejercicios de la página 68 (sección 3.3.5)

1. $0 \quad \frac{3}{5} \quad 1$
2. $0 \quad 1 \quad 2 \quad \frac{8}{3}$
3. $-1 \quad -\frac{2}{4} \quad 0$
4. $-1 \quad -\frac{6}{7} \quad 0$
5. $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3\frac{1}{2}$
6. $-2 \quad -1\frac{1}{3} \quad -1 \quad 0$
7. 3.2; $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$
8. -4.1; $-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0$

9. 0.4. **10.** 0.875. **11.** $0.\overline{6}$. **12.** 4.5. **13.** 0.21. **14.** $0.\overline{27}$. **15.** $0.\overline{571428}$. **16.** $0.\overline{076923}$. **17.** 3. **18.** -103. **19.** 3.55. **20.** $-6\frac{2}{3}$. **21.** $-18\frac{1}{3}$. **22.** $-\frac{1}{9}$. **23.** 19.56. **24.** -12.93. **25.** -6. **26.** -214.7. **27.** 0. **28.** -240. **29.** $-\frac{19}{24}$. **30.** $-\frac{13}{2}$. **31.** 0. **32.** $-\frac{9}{5}$. **33.** -4. **34.** $-\frac{65}{28}$. **35.** 9.132. **36.** 53.9. **37.** -13.46. **38.** -14.728. **39.** -6.4. **40.** $-\frac{153}{22}$. **41.** 0. **42.** 0. **43.** $\frac{89}{6}$. **44.** 545. **45.** -14.66. **46.** -0.22. **47.** $\frac{11}{24}$. **48.** $\frac{57}{35}$. **49.** $-\frac{20}{13}$. **50.** $-\frac{8}{19}$. **51.** $-\frac{191}{30}$. **52.** $-\frac{211}{7}$. **53.** -9.2. **54.** $\frac{1}{3}$. **55.** 1. **56.** -22.37. **57.** 1. **58.** -2. **59.** 0. **60.** 0. **61.** $-\frac{299}{5}$. **62.** $-\frac{253}{24}$. **63.** $\frac{67}{4}$. **64.** -17.22. **65.** $16\frac{1}{9}$. **66.** 33.4. **67.** $-\frac{38}{9}$. **68.** 0. **69.** $\frac{4}{35}$. **70.** $\frac{3}{4}$. **71.** 2. **72.** $\frac{5}{3}$. **73.** $1\frac{1}{15}$. **74.** $13\frac{13}{15}$. **75.** $31\frac{5}{7}$. **76.** 20. **77.** 186. **78.** 114. **79.** -40.6. **80.** 143.78.

Ejercicios de la página 78 (sección 3.3.9)

1. -2.33. **2.** 128.75. **3.** -72.2. **4.** 2. **5.** $-\frac{7}{8}$. **6.** $-31\frac{2}{7}$. **7.** $7\frac{1}{3}$. **8.** 10.6. **9.** 7. **10.** $-\frac{4}{3}$. **11.** -7.6. **12.** -4.1. **13.** $\frac{1}{83}$. **14.** $-\frac{1}{42}$. **15.** -0.4. **16.** 6. **17.** $-\frac{7}{6}$. **18.** 0.16. **19.** 14. **20.** -2.5. **21.** 4. **22.** $-\frac{20}{7}$. **23.** $-\frac{20}{183}$. **24.** $\frac{1}{24}$. **25.** -32. **26.** $-\frac{1}{15}$. **27.** $-\frac{5}{12}$. **28.** $\frac{3}{10}$. **29.** $-\frac{7}{37}$. **30.** $\frac{4}{21}$. **31.** $-\frac{7}{5}$. **32.** $\frac{21}{32}$. **33.** 9. **34.** -12. **35.** 0.54. **36.** -8. **37.** 1. **38.** 1100. **39.** -13. **40.** -4. **41.** 0. **42.** $-\frac{3}{32}$. **43.** $-\frac{15}{4}$. **44.** $-\frac{1}{9}$. **45.** 9. **46.** 7. **47.** -65. **48.** $-\frac{25}{12}$. **49.** $\frac{1}{2}$. **50.** $-\frac{25}{3}$. **51.** -2. **52.** 2. **53.** $-\frac{2}{27}$. **54.** -2. **55.** -21. **56.** -25.8. **57.** **a)** $-25°$C. **b)** $-17.7°$C. **c)** $-5°$C. **d)** $37.7°$C. **58.** **a)** $59°$F. **b)** $32°$F. **c)** $19.4°$F. **d)** $87.8°$F. **59.** María tiene \$858.65. **60.** Subió $1\frac{1}{3}$ kg. **61.** Bajó $4\frac{1}{8}$ kg en total. **62.** Debemos recortar 4.5 metros la base. **63.** Quedaron $2\frac{1}{12}$ tazas de leche. **64.** **a)** $68 = (9 \times 8) - (12 \div 3)$. **b)** $20 = ((9 \times 8) - 12) \div 3$. **c)** $-12 = 9 \times ((8 - 12) \div 3)$. **d)** $36 = 9 \times (8 - (12 \div 3))$. **65.** **a)** $17 = (7 \times 2) + ((10 - 4) \div 2)$. **b)** $10 = ((7 \times 2) + (10 - 4)) \div 2$. **c)** $28 = (7 \times (2 + 10 - 4)) \div 2$. **d)** $22 = ((7 \times 2) + 10) - (4 \div 2)$. **e)** $-48 = ((7 \times 2) + 10)(-4 \div 2)$. **f)** $40 = ((7 \times (2 + 10)) - 4) \div 2$. **66.** **a)** $2 = 16 - 12 - (8 - (24 \div 4))$.

b) $9=\left(16-\left(12-8-24\right)\right)\div 4.$ **c)** $-3=\left(16-\left(12-8\right)-24\right)\div 4.$ **d)** $-10=\left(16-12-8\right)-\left(24\div 4\right).$
e) $8=\left(16-12\right)-\left(\left(8-24\right)\div 4\right).$ **f)** $5=\left(\left(16-12\right)-\left(8-24\right)\right)\div 4.$ **g)** $21=\left(16-\left(\left(12-8-24\right)\div 4\right)\right).$
h) $6=16-\left(12-8\right)-\left(24\div 4\right).$ **i)** $-7=\left(\left(16-12-8\right)-24\right)\div 4.$ **j)** $18=16-\left(12-8-\left(24\div 4\right)\right).$

Ejercicios de la página 81 (sección 3.3.13)

1. El número es 441. **2.** El obrero habrá empleado 39 horas. **3.** Los números son 1 y 4. **4.** Debe comerse 20 gramos de cereal. **5.** El ángulo buscado mide 35°. **6.** El perímetro es 12.6 cm. **7.** Haití tiene una superficie de 27,750 km^2. **8.** El avestruz recorre 72 km/h. **9.** Hubo 1 023 bebés afectados. **10.** En 1970 el total de especies de insectos era 3,000,000.

Ejercicios de la página 85 (sección 3.4.1)

1. 19. **2.** -48. **3.** 0.63. **4.** 0. **5.** $\frac{21}{13}$. **6.** $\frac{1}{5}$. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** $-\sqrt{6}$. **9.** $-\sqrt{2}$. **10.** -37.95. **11.** π. **12.** -1.28. **13.** 0.25. **14.** 0.58. **15.** 9. **16.** -68. **17.** -1.3. **18.** 76.05. **19.** $\frac{23}{4}$. **20.** $-\frac{43}{12}$. **21.** $x\in\left(-4,4\right)$. **22.** $b\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. **23.** $z\in\left(\frac{4}{3},9\right]$. **24.** $w\in\left[-21,-7\right)$. **25.** $a\in\left[-8.74,\infty\right)$. **26.** $y\in\left[\frac{12}{11},\frac{25}{3}\right]$. **27.** $x\in\left(-\frac{11}{2},2\right)$. **28.** $x\in\left(-1,0\right)\cup\left(1,6\right)$. **29.** $x\in\left(-\infty,10\right)$. **30.** $\varnothing$. **31.** $\left[-3,5\right)$. **32.** $\left(5,8\right)$. **33.** $\varnothing$. **34.** $\left[-\frac{3}{5},1\right)$. **35.** $\left(-\infty,-4\right]\cup\left(0,\frac{12}{7}\right]$. **36.** $\varnothing$. **37.** $\left(-4,-2\right)$. **38.** $\left(\frac{9}{2},\infty\right)$. **39.** $\left(-\infty,-9.7\right)$. **40.** $\left(\frac{25}{4},\infty\right)$. **41.** $\varnothing$. **42.** $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,\infty\right)$. **43.** $\varnothing$. **44.** $\left(-\infty,-\frac{22}{15}\right)\cup\left(-\frac{4}{9},\frac{5}{6}\right)$. **45.** $\left(\frac{3}{4},6\right)$. **46.** $\left(21,\infty\right)$. **47.** $\left(-\infty,\infty\right)$. **48.** $\left(-\infty,-1\right)$. **49.** $\left(-8,-7\right)\cup\left(-\frac{9}{2},2\right)$. **50.** $\left(-\infty,4\right)$. **51.** $\left(\frac{7}{5},\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicios de la página 88 (sección 3.5.1)

1. $\left(-2\right)^7$. **2.** 7^{15}. **3.** 16. **4.** 2^{56}. **5.** $\left(-8\right)^{18}$. **6.** $-1.5\left(4^{10}\right)$. **7.** $3\left(5^{14}\right)$. **8.** $6\left(-9\right)^{18}$. **9.** $-4\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$. **10.** $4\left(3^4\right)\left(\frac{2}{7}\right)^{36}$. **11.** $-7\left(\frac{5^{14}}{3^{16}2^{16}}\right)$. **12.** $\frac{3^{20}}{2^{25}}$. **13.** El empleado recibe \$1619.10 al cabo de un año. **14.** El rédito es de \$194. Conviene más al 10% anual. **15.** El capital al cabo de tres años será \$14,282. **16.** El rendimiento será: \$69,957.33.

Ejercicios de la página 89 (sección 3.5.3)

1. 4.365×10. **2.** 7.6×10^{-3}. **3.** 8.27×10^{11}. **4.** 3.2×10^{-11}. **5.** 3.6×10^{4}. **6.** 1.113×10^{-7}. **7.** 4.8×10^{9}. **8.** 1.35627907×10^{-5}. **9.** 4.5731×10^{-10}. **10.** 7.2381×10^{-13}. **11.** Cada átomo pesa 1.382×10^{-25} g. **12.** Fluyen 7.44×10^{18} electrones. **13.** La distancia de Saturno al Sol es 1.431×10^{9} km.

Ejercicios de la página 97 (sección 3.6.7)

1. 0.4949. **2.** 1.494. **3.** 1.965. **4.** 1.742. **5.** -0.1203. **6.** -3.113. **7.** 2.872. **8.** 0.07649. **9.** -2.364. **10.** 158850. **11.** 216.27. **12.** 78.705. **13.** 52711. **14.** 2954.6. **15.** 6.0395. **16.** 0.48306. **17.** 0.0055335. **18.** 0.000010039.

Ejercicios de repaso de la página 98 (sección 3.7)

1. $\frac{3}{4}$. **2.** -1. **3.** 8.8. **4.** -1.36. **5.** $-\sqrt{2}$. **6.** 0. **7.** -6. **8.** -12. **9.** 6. **10.** 17. **11.** -72. **12.** $\frac{25}{14}$. **13.** 14. **14.** -28. **15.** 4. **16.** 7. **17.** $\frac{17}{27}$. **18.** 45. **19.** $\frac{10}{3}$. **20.** 87. **21.** $-\frac{3}{20}$. **22.** $\frac{1}{21}$. **23.** $-\frac{62}{5}$. **24.** $\frac{239}{72}$. **25.** -6. **26.** $-\frac{29}{3}$. **27.** 28.3. **28.** $-\frac{1}{9}$. **29.** $\frac{14}{5}$. **30.** 3.28. **31.** -1.75. **32.** $-6\frac{3}{4}$. **33.** $5\frac{1}{3}$. **34.** $-\pi$. **35.** $\sqrt{10}$. **36.** $+\frac{1}{20}$. **37.** $-\frac{1}{4}$. **38.** -0.15. **39.** $+0.78$. **40.** -4.25. **41.** $+0.16$. **42.** -8. **43.** $+2\frac{3}{4}$. **44.** $+2$. **45.** $+4$. **46.** $-\frac{1}{5}>-\frac{1}{3}$. **47.** $\frac{8}{5}<\frac{9}{4}$. **48.** $-8>-8.5$. **49.** $-13<-12$. **50.** $-2.8<-2.6$. **51.** $5\frac{7}{8}>5\frac{11}{16}$. **52.** $\frac{\pi}{2}>-3\pi$. **53.** $\frac{1}{5}<\frac{1}{3}$. **54.** $-\frac{7}{6}<-\frac{6}{7}$. **55.** $\frac{14}{9}<\frac{23}{3}$. **56.** $-\sqrt{2}<\sqrt{5}$. **57.** $7.9<9.7$.

58. 10.25 > 10.12. **59.** −5.75 > −5.9. **60.** −9.25 < −9.04. **61.** $-8\frac{1}{2} < 1\frac{1}{4}$. **62.** En 1987 hablaban español 73,046,930 mexicanos. **63.** El número estimado de habitantes es 5,000,073,588. **64.** Había conseguido 35 victorias. **65.** El lado del cuadrado mide 7.75 cm y los lados del rectángulo 7.75 cm y 13.25 cm. **66. a)** El área del triángulo mayor es 216. **b)** Las áreas no están en razón $\frac{1}{6}$. **67.** Cuando mi hijo tenga 30 y yo 60. **68.** Aurora tendrá $3,876 al finalizar el año. **69.** Se pueden comprar 7.5 m. **70.** Los números buscados son 12 y 54.

Capítulo 4 Introducción al álgebra

Ejercicios de la página 103 (sección 4.2.1)

1. a) 26. **b)** 14.72. **c)** $\frac{59}{10}$. **d)** $\frac{491}{12}$. **2. a)** 29.4 newtons. **b)** 96040 dinas. **c)** 144 dinas. **d)** 34.286 newtons. **3.** $x+32$. **4.** $18.24y$. **5.** $z-16$. **6.** $2t-9$. **7.** $y+2$. **8.** $\frac{x}{y}=100$. **9.** $\frac{1}{3}w$. **10.** $\frac{3}{10}t$. **11.** $\frac{25}{z}$. **12.** $\frac{x}{8.96}$. **13.** $\frac{5}{3}+\frac{x}{2}$. **14.** $r+s=98$. **15.** Si y es la edad de Irma, entonces la de Ramón es: $y-4$. Si z es la edad de Ramón, entonces la de Irma es: $z+4$. **16.** $\frac{1}{5}x=15$. **17.** $\frac{1}{2t}$. **18.** $5z+3.7$. **19.** $2(b+1)$. **20.** $\frac{70}{z}$. **21.** $a-\frac{40}{65}$. **22.** $\frac{1}{3}t$. **23.** $\frac{5}{7}b$. **24.** $25x$. **25.** $\frac{x}{24}$. **26.** $12-x$. **27.** $\frac{1}{6}z$. **28.** $\frac{n}{12}$. **29.** $5z$. **30.** $365-r$. **31.** Si y es la estatura de Pedro, entonces la de Laura es: $y+7.5$, o bien, si z es la estatura de Laura, entonces la de Pedro es: $z-7.5$. **32.** $\frac{1}{5}w$. **33.** $3w+2z=250$. **34.** $8t$. **35.** $\frac{3}{4}w$. **36.** $\frac{2}{3}y-\frac{6}{7}z$. **37.** $x(7+x)$. **38.** Si b es el número mayor y a el menor, entonces $b=8a-5$. **39.** $\frac{(c+d)^2}{c-d}$. **40.** $a-(-3.5)+6(a+2.1)$. **41.** $x=\frac{2}{7}y-10$. **42.** $xy=2(x+y)-12$. **43.** $12(9-z)=20$. **44.** $30-5a=10$. **45.** $3z=32+7z$. **46.** $50-w=5+w$. **47.** $6y-15=-18$. **48.** Si x es la longitud de la salamandra, entonces la longitud de la rana es: $x-1487.5$, o bien, si y es la longitud de la rana, entonces la longitud de la salamandra es: $y+1487.5$. **49.** Si z es el crecimiento (en cm) de las uñas de las manos, entonces el crecimiento de las uñas de los pies es: $z-0.375$, o bien, si q es el crecimiento (en cm) de las uñas de los pies, entonces el crecimiento de las uñas de las manos es: $q+0.375$.

Ejercicios de la página 106 (sección 4.3.1)

1. 32. **2.** 18. **3.** 6. **4.** 12. **5.** 6. **6.** −6. **7.** 6. **8.** $-\frac{15}{4}$. **9.** −9. **10.** −32. **11.** −16. **12.** −10. **13.** $\frac{63}{10}$. **14.** $-\frac{5}{2}$. **15.** 0. **16.** $-\frac{1}{2}$. **17.** −122. **18.** −2. **19.** −12. **20.** 28. **21.** $\frac{9}{7}$. **22.** −1. **23.** $\frac{15}{2}$. **24.** $-\frac{5}{4}$. **25.** −5. **26.** 0. **27.** $\frac{36}{49}\pi$. **28.** 6. **29.** −15. **30.** $-\frac{31}{3}$. **31.** −14. **32.** 0. **33.** $\frac{93}{64}$. **34.** −8.3. **35.** 250. **36.** $-\frac{3}{7}$. **37.** −40. **38.** −1. **39.** $-\frac{20}{3}$. **40.** $-\frac{28}{15}$. **41.** 39. **42.** 9. **43.** 16.2. **44.** $\frac{7}{13}$. **45.** $\frac{44801}{64}$. **46.** $-\frac{19}{3}$. **47.** 0.45726. **48.** 3.29. **49. a)** 103.5 km. **b)** 187.5 km. **c)** 2280 m. **d)** 11.55 km. **50. a)** 26 lb/pulg^2. **b)** 7 lb/pulg^2. **c)** 40.172 lb/pulg^2. **d)** 29.913 lb/pulg^2. **51. a)** $\frac{12}{5}\pi$. **b)** 72π. **c)** 4.46915π. **d)** $\frac{41515}{396}\pi$. **52. a)** 200. **b)** 59.25. **c)** 81. **d)** 55.08. **53. a)** 11.858. **b)** 1.874. **c)** 0.24075. **d)** 29.466.

Ejercicios de la página 108 (sección 4.4.1)

1. $-4x$. **2.** $-12ab+2.5$. **3.** $7.4y$. **4.** $-\frac{25}{6}c$. **5.** $7a$. **6.** $-9x$. **7.** $12z+20$. **8.** $20y+7$. **9.** $2x+9$. **10.** $-\frac{5}{3}c+2d$. **11.** $\frac{5}{6x}$. **12.** $\frac{1}{4}a-\frac{5}{6}b$. **13.** $\frac{7b+39}{22}$. **14.** $\frac{19}{6}z+\frac{1}{7}$. **15.** $\frac{1}{4y}-\frac{4}{3}$. **16.** $-2s$. **17.** x. **18.** $-9x$. **19.** $-20c+17$. **20.** $-1.5x^2-0.5y$. **21.** $-8a+13b$. **22.** $6abc+12$. **23.** $-1.9y-6.3z$. **24.** $-2+\frac{5}{6}y-\frac{3}{2}x$. **25.** $\frac{1}{6}s+3t+1$. **26.** $-10x^2-1.1y$. **27.** $18.4a^2+3.8b^2-4b$. **28.** $\frac{15}{4}s-\frac{2}{3}t+3$. **29.** $-14t-4r$. **30.** $-14x+71y-11$. **31.** $29x-9y$. **32.** $-3a+5b$. **33.** $-35x^2+17xy-8y^2$. **34.** $-29c+12$. **35.** $3ax-axy+4y-9$. **36.** $-5x-4xy+2$. **37.** $-\frac{4}{3}a^2+\frac{23}{6}b^2-\frac{5}{6}ab$. **38.** $\frac{23b-6a-4}{a}$. **39.** $9c^2-3cd^2-cd$. **40.** $12a^3-13$. **41.** $20x^2y-44xy^2-xy+x$. **42.** $6s^2+4s-9t$.

Ejercicios de repaso de la página 109 (sección 4.5)

1. $A=\pi r^2$. **2.** $3x+6=7$. **3.** $\frac{3}{5}x=120{,}000$. **4.** $a+b-24=0$. **5.** Si x es la edad del padre, $x-32$ es la edad del hijo. Si y es la edad del hijo, $y+32$ es la edad del padre. **6.** $V=\frac{k}{P}$. **7.** $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. **8.** $\frac{3}{4}y$. **9.** $\frac{6}{7}x$. **10.** $-\frac{107744}{65025}$.

11. $-\frac{88}{151}$. **12.** $-\frac{27}{10}$. **13.** $\frac{3673}{27}$. **14.** $-\frac{184}{85}$. **15.** -53. **16.** -423. **17.** 13.8. **18.** $-\frac{927}{640}$. **19.** $-12\,408$. **20.** $\frac{17197}{900}$. **21.** $36x^2z+3xz^2-6x+41xz-72$. **22.** $-10a-39ab+108b+77$. **23.** $28y^2+39y+27$. **24.** $-\frac{5}{9}t^2-\frac{4}{9}t+\frac{37}{9}s^2+\frac{31}{45}s+\frac{9}{5}$. **25.** $2xy-2xz-27x-8z$. **26.** $-48a^3bc^5-32$. **27.** $\frac{41}{3}r^5s^6t^8-\frac{11}{3}r^6s^{10}t^7-\frac{4}{25}r^9s^5t^6-8$.

Capítulo 5 Resolución de ecuaciones de primer grado

Ejercicios de la página 115 (sección 5.1.1)

1. $x=5$. **2.** $t=8$. **3.** $w=17$. **4.** $z=2.5$. **5.** $a=21.1$. **6.** $b=28$. **7.** $c=5$. **8.** $s=\frac{1}{2}$. **9.** $m=\frac{59}{18}$. **10.** $n=0$. **11.** $x=6.4$. **12.** $t=-17.35$. **13.** $c=11.4$. **14.** $a=0.7$. **15.** $y=0$. **16.** $z=\frac{4}{5}$. **17.** $w=\frac{53}{40}$. **18.** $x=-\frac{2}{15}$. **19.** $x=0$. **20.** $z=-1$. **21.** $t=-\frac{13}{15}$. **22.** $y=2.2$. **23.** $a=-3.5$. **24.** $b=40$. **25.** $b=\frac{46}{7}$. **26.** $c=5.3$. **27.** $s=1.54$. **28.** $a=15, a=-15$. **29.** $x=12.4, x=-12.4$. **30.** $r=15, r=-15$. **31.** $t=8, t=-8$. **32.** $w=16.6, w=-16.6$. **33.** $x=21, x=-21$. **34.** $b=1, b=-1$. **35.** $y=\frac{17}{9}, y=-\frac{17}{9}$. **36.** $z=\frac{9}{2}, z=-1$. **37.** $d=\frac{49}{12}, d=-\frac{49}{12}$. **38.** $x=\frac{239}{9}, x=-\frac{337}{9}$. **39.** $z=\frac{64}{5}, z=-\frac{64}{5}$. **40.** $d=20.7, d=10.9$. **41.** $a=19, a=-73$. **42.** $c=3.9, c=-3.9$. **43.** $y=\frac{58}{5}, y=-\frac{49}{5}$. **44.** $a=\frac{9}{2}, a=3$. **45.** $b=-\frac{17}{60}, b=-\frac{23}{60}$. **46.** $a=-11$. **47.** $t=-14$. **48.** $w=-9$. **49.** $y=\frac{50}{9}$. **50.** $s=32.3$. **51.** $x=19$. **52.** $x=\frac{29}{4}$. **53.** $x=-\frac{23}{6}$. **54.** $w=\frac{25}{24}$. **55.** El número es –39. **56.** El número es 17.2. **57.** El número es 100. **58.** El número es 43. **59.** El número es $-\frac{9}{4}$. **60.** María tiene 17 años. **61.** El menor recibió \$96,436, el segundo \$103,182 y el mayor \$108,382. **62.** La diferencia del mayor menos el menor es 40. **63.** El producto es 15,184. **64.** Salió con 56 aguacates. **65.** Los ángulos miden 90° y 27°. **66.** El tercer lado mide 21 metros. **67.** El cociente es $-\frac{61}{9}$. **68.** La base mide 45 metros. **69.** El ángulo mide 107°. **70.** El tercer ángulo mide 105°.

Ejercicios de la página 120 (sección 5.2.1)

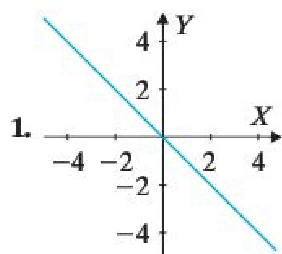
1. $x=10$. **2.** $y=-\frac{7}{2}$. **3.** $z=15$. **4.** $a=-8$. **5.** $a=-\frac{27}{2}$. **6.** $x=50$. **7.** $z=-\frac{5}{2}$. **8.** $b=78$. **9.** $t=-1$. **10.** $y=-21$. **11.** $x=100$. **12.** $z=-72$. **13.** $z=\frac{9}{4}, z=-\frac{9}{4}$. **14.** $w=5.66, w=-5.66$. **15.** $y=\frac{23}{5}, y=-\frac{7}{5}$. **16.** $w=3$. **17.** $s=-13$. **18.** $n=-\frac{7}{2}$. **19.** $y=30$. **20.** $t=3.6$. **21.** $x=1$. **22.** $s=-\frac{20}{3}$. **23.** $x=30$. **24.** $a=\frac{4}{9}$. **25.** $x=\frac{1}{5}$. **26.** $a=-\frac{7}{10}$. **27.** $x=-1$. **28.** $x=1, x=-\frac{1}{7}$. **29.** $x=\frac{32}{3}, x=-\frac{28}{3}$. **30.** $x=\frac{1}{3}, x=-\frac{5}{3}$. **31.** $b=-30$. **32.** $z=2$. **33.** $y=-1$. **34.** $t=9$. **35.** $z=-14.75$. **36.** $y=-15$. **37.** $z=\frac{3}{5}$. **38.** $z=-\frac{3}{2}$. **39.** $x=9$. **40.** $y=0$. **41.** $s=9$. **42.** $a=\frac{20}{21}$. **43.** $b=\frac{3}{2}$. **44.** $t=\frac{5}{7}$. **45.** $x=2$. **46.** $y=-4$. **47.** $m=\frac{1}{6}$. **48.** $x=-\frac{16}{225}$. **49.** El número es –15. **50.** Trabajando las dos bombas juntas, pueden vaciar la cisterna en $1\frac{13}{15}$ horas. **51.** El número es $\frac{2}{7}$. **52.** El número es $\frac{8}{5}$. **53.** Juan tiene 16 años, Ana tiene 48 y Roberto 6. **54.** Los alumnos están repartidos de la siguiente manera: Artes plásticas: 48 alumnos. Música: 12 alumnos. **55.** Lupe tiene 18 años y Pilar tiene 12 años. **56.** Diego trabajó 13 horas y Eduardo 22. **57.** Los números son 375 y 62.5. **58.** El número es 16.625. **59.** El número es –26.5. **60.** El número es –72.6. **61.** El número es 75. **62.** Se requieren 3.75 jornadas; es decir, 30 horas de trabajo. **63.** Elvira tiene 11 años y Andrés 9 años. **64.** El primer día leyó 3 revistas, el segundo día 7 y el tercer día 11. **65.** El número es 84. **66.** Amelia y Cristina podrán realizar el trabajo en $2\frac{2}{9}$ días. **67.** La primera es \$1650, la segunda es \$1800 y la tercera es \$1275. **68.** El jitomate cuesta \$4.90 el kilo. **69.** Los dos juntos pintan la barda en $1\frac{1}{3}$ de día. **70.** El tiempo requerido para llenar el tanque es $7\frac{1}{5}$ horas; es decir, 7 horas y 12 minutos.

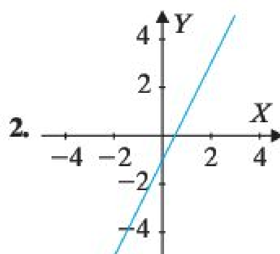
Ejercicios de la página 124 (sección 5.3.1)

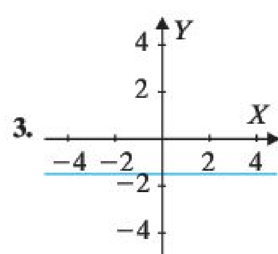
1. $b=-2$. **2.** $a=-3$. **3.** $y=5$. **4.** $x=\frac{17}{14}$. **5.** $c=8$. **6.** $t=\frac{1}{5}$. **7.** $s=-6$. **8.** $a=-5$. **9.** $z=2.5$. **10.** $d=-\frac{45}{13}$. **11.** $x=3$. **12.** $w=\frac{2}{3}$. **13.** $b=16$. **14.** $b=-52$. **15.** $x=\frac{33}{20}$. **16.** $c=-2$. **17.** $x=\frac{8}{3}$. **18.** $y=-\frac{12}{7}$. **19.** $c=-\frac{3}{2}$. **20.** $y=\frac{1}{2}$. **21.** $b=\frac{4}{25}$. **22.** $a=3$. **23.** $x=-\frac{11}{7}$. **24.** $d=-\frac{6}{7}$. **25.** $t=-\frac{49}{45}$. **26.** $w=\frac{152}{21}$. **27.** $m=-\frac{15}{76}$. **28.** $x=\frac{59}{17}$. **29.** $a=\frac{152}{5}$. **30.** $z=30$. **31.** $x=36$. **32.** $x=-\frac{10}{49}$. **33.** $y=\frac{18}{7}$. **34.** $b=\frac{4}{3}$. **35.** $c=\frac{29}{40}$. **36.** $t=\frac{24}{7}$. **37.** $x=-\frac{31}{10}$. **38.** $a=\frac{35}{8}$. **39.** $y=9$. **40.** $w=\frac{1}{6}$. **41.** $c=2$. **42.** $z=\frac{20}{37}$.

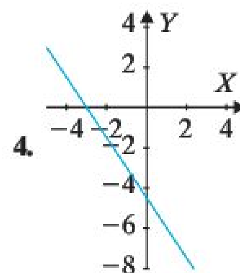
43. $x = -\frac{11}{4}$. **44.** $t = -\frac{360}{253} \approx -1.42$. **45.** $m = \frac{316}{35} \approx 9.03$. **46.** $r = -\frac{893}{41}$. **47.** $x = \frac{421}{82}$. **48.** El número es −16. **49.** El ancho es 13.6 y el largo es 40.8. **50.** El número es 9. **51.** El libro tiene 225 páginas. **52.** Luis estudió 1:30 horas y Pancho estudió 3:30 horas. **53.** Ricardo tiene 60 años y su hijo 30. **54.** El número es 12. **55.** El boleto costaba $24. **56.** Los gemelos tienen 12 años. **57.** El número mayor es $\frac{123}{4}$ y el menores $\frac{61}{2}$. **58.** Tienes 39 años. **59.** El número que hay que agregar es −6. **60.** Diofanto vivió 84 años.

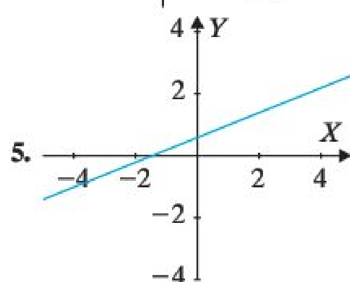
Ejercicios de la página 133 (sección 5.4.4)

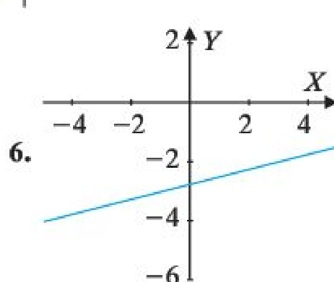
1.


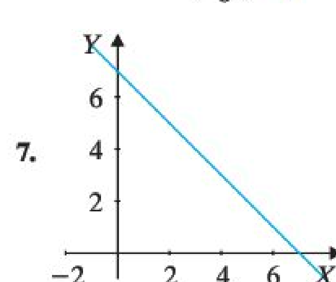
2.


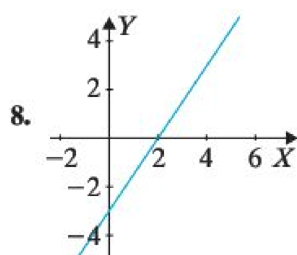
3.


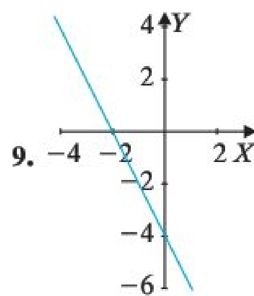
4.


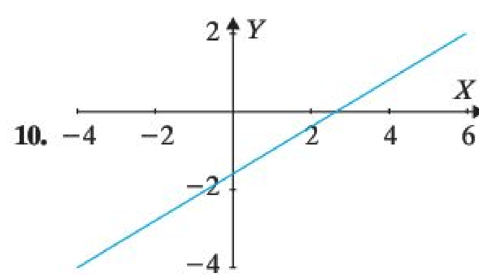
5.


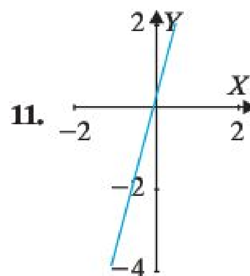
6.


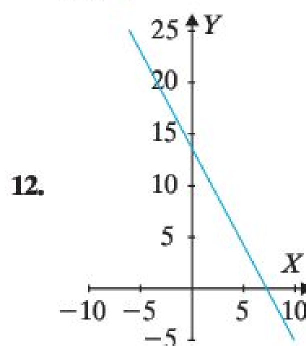
7.


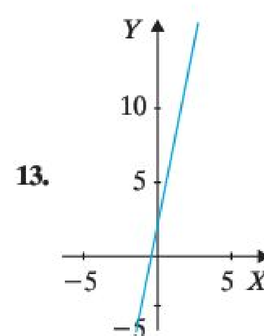
8.


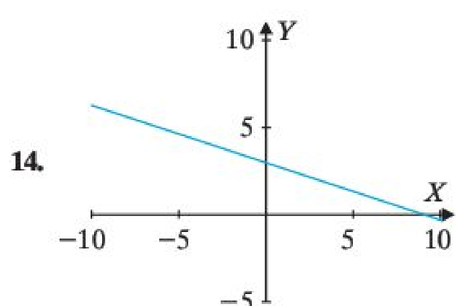
9.


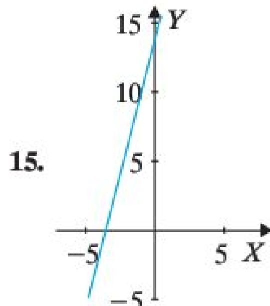
10.


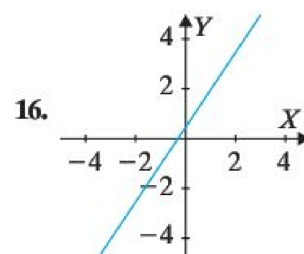
11.


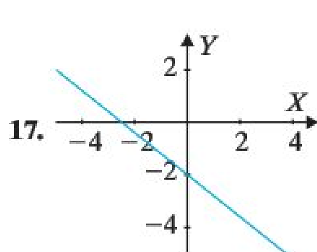
12.


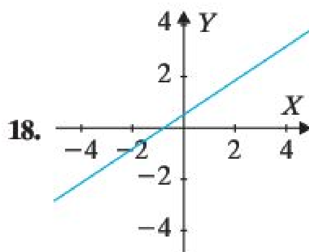
13.


14.


15.


16.


17. 

18. 

19. $(5,0)$. **20.** $(11,0)$. **21.** $(-3,0)$. **22.** $(-5,0)$.

23. $\left(-\frac{5}{6},0\right)$. **24.** $\left(\frac{2}{3},0\right)$. **25.** $\left(\frac{1}{4},0\right)$. **26.** $\left(-\frac{14}{5},0\right)$. **27.** $\left(\frac{5}{2},0\right)$. **28.** $\left(\frac{12}{5},0\right)$. **29.** $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. **30.** $(5,0)$. **31.** $\left(-\frac{6}{7},0\right)$. **32.** $\left(\frac{7}{2},0\right)$. **33.** $(5,0)$. **34.** $\left(\frac{6}{5},0\right)$. **35.** $(7,0)$. **36.** $\left(-\frac{3}{11},0\right)$. **37.** $(16,0)$. **38.** $\left(-\frac{8}{3},0\right)$. **39.** $(2,0)$.

Ejercicios de la página 137 (sección 5.5.1)

1. Es una identidad. **2.** La solución es $y=6$. **3.** No tiene solución. **4.** No tiene solución. **5.** $x=-2$. **6.** No tiene solución. **7.** Es una identidad. **8.** $x=0$. **9.** No tiene solución. **10.** $w=\frac{3}{4}$. **11.** Es una identidad. **12.** $x=-3$. **13.** No tiene solución. **14.** Es una identidad. **15.** $y=3$. **16.** Es una identidad. **17.** No tiene solución. **18.** $x=4$. **19.** $x=\frac{5}{3}$. **20.** Es una identidad. **21.** $h=\frac{2A}{b}$. **22.** $h=\frac{2A}{b_1+b_2}$. **23.** $h=\frac{A-2\pi r^2}{2\pi r}$. **24.** $h=\frac{A-b^2}{2b}$. **25.** $h=\frac{V}{\pi r^2}$. **26.** $h=\frac{3V}{\pi r^2}$. **27.** Juan tiene 24 años y Nicolás tiene 8 años. **28.** La base mide 12 cm y cada lado mide 18 cm. **29.** El abuelo no quiere que Antonio sepa su edad. **30.** El ancho mide 7.5 m y el largo 37.5 m. **31.** La base mide 12 km, el perímetro mide 32 km. **32.** La otra base mide 15 m. **33.** La base mide 17.5 cm. **34.** La altura mide 11.5 cm.

Ejercicios de la página 139 (sección 5.6.1)

1. Los números son 6 y 7. **2.** Los números son -9 y -8. **3.** Los números buscados son 16 y 18. **4.** Los números son 7 y 9. **5.** Los números son $-16, -15$ y -14. **6.** Los números son 153 y 154. **7.** El problema no tiene solución. **8.** Los números son 24, 25 y 26. **9.** Los números son 12 y 14. **10.** Los números son -8 y -7. **11.** Los números son $-35, -34$ y -33. **12.** $-3, -2, -1, 0, 1$. **13.** Los números son 50, 51, 52 y 53. **14.** Los números son 126 y 128. **15.** Los números son $-4, -3, -2$ y -1. **16.** Los números son 35, 37 y 39. **17.** Los números son $-32, -30$ y -28. **18.** Los números son 6 y 8. **19.** Los números son 20 y 22. **20.** Los números son 9 y 11. **21.** Las edades son 16, 18 y 20. **22.** Los números son $-50, -48$ y -46. **23.** Los números son 71, 72, 73 y 74. **24.** Los números son 2, 4 y 6. **25.** Los números son 5, 7 y 9. **26.** Los números son 30 y 40. **27.** Los números son 85, 90 y 95. **28.** Los números son $-9, -6$ y -3. **29.** Los enteros son $-6, -4$ y -2. **30.** El problema no tiene solución. **31.** Los números son 8 y 9. **32.** Las longitudes de los lados son 48, 50 y 52. **33.** Los lados miden: 11, 13 y 15 metros. **34.** El lado más corto mide 13 cm. **35.** El problema no tiene solución.

Ejercicios de la página 144 (sección 5.7.1)

1. 50%. **2.** 60%. **3.** 580%. **4.** 25%. **5.** 7%. **6.** 15%. **7.** 125%. **8.** 20%. **9.** 87.5%. **10.** 175%. **11.** El 15% de 134 es 20.1. **12.** El 20% de 225 es 45. **13.** El 30% de 70 es 21. **14.** El $42\frac{1}{2}$% de 2450 es 1041.3. **15.** El 40% de 70 es 28. **16.** El 110% de 50 es 55. **17.** El 20% de 1658 es 331.6. **18.** El 6% de 15 es 0.9. **19.** El 150% de 52 es 78. **20.** El 173% de 325 es 562.25. **21.** El 81.25% de 32 es 26. **22.** El 150% de 8 es 12. **23.** El 12.5% de 63 es 7.875. **24.** El 20% de 150 es 30. **25.** El 300% de 21 es 63. **26.** El 2% de 52 es 1.04. **27.** El 204% de 4009 es 8178.36. **28.** El 25% de 188 es 47. **29.** El 81% de 43 es 34.83. **30.** El 40% de 578 es 231.2. **31.** El 4% de 350 es 14. **32.** El 5% de 240 es 12. **33.** El 103% de 75 es 77.25. **34.** El 32% de 268.75 es 86. **35.** Hay que agregar 26.25 litros de agua. **36.** La venta de la tienda ascendió a $50,000 durante el primer mes. **37.** La asistencia aumentó en 35%. **38.** Hay que añadir 7 litros de la solución ácida al 10%. **39.** En 400 mililitros de leche materna 13% es proteína, grasa y azúcar, 87% es agua. **40.** El 21% es oxígeno. **41.** El valor de la inversión es $6384. **42.** Hay que tomar 20 mililitros de agua salada al 30% y 40 mililitros de

agua salada al 3%. **43.** El paquete contiene 17.16 gramos de huevo. El paquete contiene 6% de leche. **44.** Un litro de aire pesa 1.29 gramos. **45.** En 150 metros cúbicos de aire hay 13,455 gr. de hidrógeno. **46.** Hay que comprar 30 metros de tela. **47.** Hay que evaporar 14,285.7 gr. **48.** La tasa de interés era de 21.62%. **49.** La mezcla tendrá ley 0.962. **50. a)** Deberá pagar $163.35. **b)** Lucía ahorrará $18.15. **51.** Están sembrados 96,000 m^2 de trigo, 40,000 m^2 de avena y 24,000 m^2 de sorgo.

Ejercicios de la página 150 (sección 5.8.1)

1. $y \in \left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$. **2.** $a \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. **3.** $z \in (-\infty, 10)$. **4.** $y \in (0, \infty)$. **5.** $x \in [-2, \infty)$. **6.** $z \in [3, \infty)$. **7.** $w \in (-\infty, -9]$. **8.** $w \in (-\infty, -20)$. **9.** $z \in (-\infty, -11]$. **10.** $y \in \left(\frac{33}{5}, \infty\right)$. **11.** $x \in \left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$. **12.** $a \in [4, \infty)$. **13.** $y \in (-1, \infty)$. **14.** $w \in \left(-\infty, \frac{14}{11}\right)$. **15.** $c \in [-2, \infty)$. **16.** $x \in \left(\frac{23}{17}, \infty\right)$. **17.** $x \in (-\infty, -2)$. **18.** $y \in \left[-\frac{23}{8}, \infty\right)$. **19.** $t \in \left(-\infty, \frac{12}{11}\right)$. **20.** $a \in \left[-\frac{11}{4}, \infty\right)$. **21.** $z \in \left(-\infty, \frac{32}{15}\right]$. **22.** $a \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$. **23.** $t \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$. **24.** $z \in (-10, \infty)$. **25.** $x \in (0, \infty)$. **26.** $w \in [0, \infty)$. **27.** $b \in (-\infty, 2)$. **28.** $c \in \left[\frac{38}{17}, \infty\right)$. **29.** $a \in \left(-\infty, -\frac{47}{20}\right]$. **30.** $x \in \left(-\infty, \frac{27}{13}\right)$. **31.** Se cumple para cualquier número real. **32.** $x \in [-52, \infty)$. **33.** $r \in \left(-\infty, \frac{19}{5}\right]$. **34.** $a \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{2}\right)$. **35.** $t \in (-4, -2)$. **36.** $b \in \left[-\frac{9}{2}, -1\right]$. **37.** $s \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. **38.** $x \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$. **39.** $r \in \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$. **40.** $z \in \left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$. **41.** $y \in (-4, 0)$. **42.** $t \in \left(-\frac{17}{3}, -\frac{7}{3}\right)$. **43.** $x \in \left(-\frac{9}{2}, \frac{12}{7}\right)$. **44.** $w \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. **45.** $c \in \left[\frac{10}{7}, \frac{19}{7}\right]$. **46.** $s \in [-2.25, 3)$. **47.** No tiene solución. **48.** $w \in \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{7}\right)$. **49.** $a \in \left[-\frac{60}{19}, -\frac{50}{7}\right]$. **50.** No tiene solución. **51.** No tiene solución. **52.** Salió con a lo más 172 sobres. **53.** Los números son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. **54.** Chucho quiere por lo menos $10 semanales. **55.** Debe entregar por lo menos 34. **56.** La temperatura será a lo más de 18°C. **57.** Debe invertirse $2,500 por lo menos.

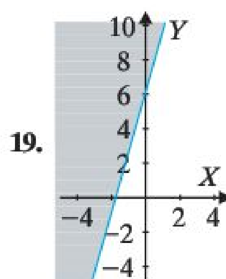
Ejercicios de la página 153 (sección 5.9.1)

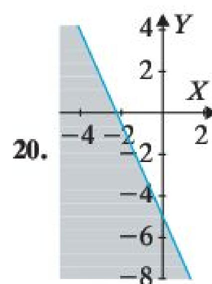
1. $x \in (4, 16)$. **2.** $w \in (6, 12)$. **3.** $z \in [-20, -4]$. **4.** $w \in (-\infty, -4] \cup [8, \infty)$. **5.** $x \in (10.5, 15.5)$. **6.** $y \in (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$. **7.** $z \in (-\infty, -13) \cup (5, \infty)$. **8.** $y \in (-\infty, -7) \cup (5, \infty)$. **9.** $a \in \left(-\infty, -\frac{16}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$. **10.** $r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$. **11.** $z \in \left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **12.** $y \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{11}{5}, \infty\right)$. **13.** $b \in (-6, 14)$. **14.** $y \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$. **15.** $x \in \left[1, \frac{8}{3}\right]$. **16.** $y \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \infty\right)$. **17.** $z \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. **18.** $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{9}, \infty\right)$. **19.** $z \in \left(-\infty, \frac{11}{25}\right) \cup \left(\frac{19}{25}, \infty\right)$. **20.** $w \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **21.** $r \in \left(-\frac{1}{11}, \frac{3}{5}\right)$. **22.** $z \in \mathbb{R}$. **23.** $y \in \left(-\frac{9}{4}, -\frac{5}{6}\right)$. **24.** $t \in \mathbb{R}$. **25.** $y \in \mathbb{R}$. **26.** No tiene solución. **27.** $x \in \left(-\frac{5}{49}, -\frac{1}{49}\right)$. **28.** No tiene solución. **29.** $w \in \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$. **30.** $x \in (-\infty, -4) \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$. **31.** $w \in \left(\frac{4}{5}, 1\right)$. **32.** $z \in \left(\frac{10}{29}, \infty\right)$. **33.** No tiene solución. **34.** $y \in \left(-\infty, -\frac{2}{11}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$. **35.** $w \in (-\infty, 14]$. **36.** $x \in \left(-\frac{20}{9}, 28\right)$. **37.** Los números son 3, 4, 5, 6 y 7. **38.** Hay 4 posibilidades: –2, –1; –1, 0; 0, 1; 1, 2. **39.** Los tubos pueden medir entre 16.7 y 17.3. Si entrega los 1700 tubos, la ganancia es $420. **40.** El número es –1708, o bien, –1742. **41.** La distancia entre la tienda de abarrotes y la farmacia es: 100 metros, o bien, 500 metros. **42.** Pablo mide 1.70 m y Julián 1.63 m, o bien, Pablo mide 1.63 m y Julián 1.56 m. **43.** El precio al que Ramón debe vender el sillón es: $864 \leq x \leq 936$. **44.** Los cortineros medían más de 3.105 m o menos de 2.295 m. **45.** El número buscado se encuentra entre 0.0001 y 7.5359. **46.** Si el precio aumentó, entonces el inicial era $1561 y el actual es $1576. Si el precio bajó, entonces el inicial era $1576 y el actual es $1561.

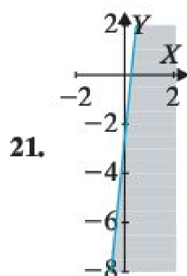
Ejercicios de la página 156 (sección 5.10.1)

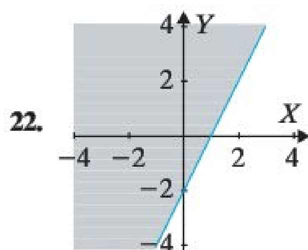
1. En la recta: $y = 4x - 1$. Arriba: $y > 4x - 1$. Debajo: $y < 4x - 1$. **2.** En la recta: $y = -\frac{3}{5}x + 2$. Arriba: $y > -\frac{3}{5}x + 2$. Debajo: $y < -\frac{3}{5}x + 2$. **3.** En la recta: $y = 3 - x$. Arriba: $y > 3 - x$. Debajo: $y < 3 - x$. **4.** En la recta: $y = 8$. Arriba: $y > 8$. Debajo: $y < 8$. **5.** En la recta: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$. Arriba: $y > \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$. Debajo: $y < \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$. **6.** En la recta: $y = 5x + 4$. Arriba: $y > 5x + 4$. Debajo: $y < 5x + 4$. **7.** En la recta: $y = -\frac{7}{4}$. Arriba: $y > -\frac{7}{4}$. Debajo: $y < -\frac{7}{4}$. **8.** En la recta: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. Arriba: $y > -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. Debajo: $y < -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. **9.** En la recta: $y = \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}$. Arriba: $y > \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}$. Debajo: $y < \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}$. **10.** En la recta: $y = 2x + 7$. Arriba: $y > 2x + 7$. Debajo: $y < 2x + 7$. **11.** En la recta: $y = -6x + 10$. Arriba: $y > -6x + 10$. Debajo: $y < -6x + 10$. **12.** En la recta: $y = \frac{1}{4}x$. Arriba: $y > \frac{1}{4}x$. Debajo: $y < \frac{1}{4}x$. **13.** En la recta: $y = -\frac{1}{2}x + 8$. Arriba: $y > -\frac{1}{2}x + 8$. Debajo: $y < -\frac{1}{2}x + 8$. **14.** En la recta: $y = \frac{3}{4}x - 1$. Arriba: $y > \frac{3}{4}x - 1$. Debajo: $y < \frac{3}{4}x - 1$. **15.** En la recta: $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$. Arriba: $y > -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$. Debajo: $y < -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$. **16.** En la recta: $y = -2x - \frac{7}{3}$. Arriba: $y > -2x - \frac{7}{3}$. Debajo: $y < -2x - \frac{7}{3}$. **17.** En la recta: $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{45}$. Arriba: $y > \frac{1}{3}x - \frac{11}{45}$. Debajo: $y < \frac{1}{3}x - \frac{11}{45}$.

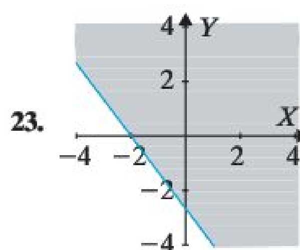
18. En la recta: $y = \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$. Arriba: $y > \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$. Debajo: $y < \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$.

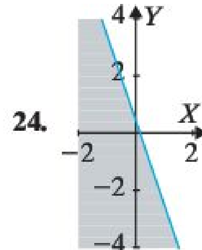
19.


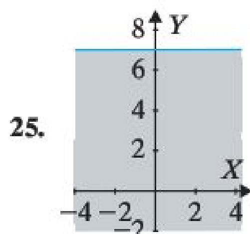
20.


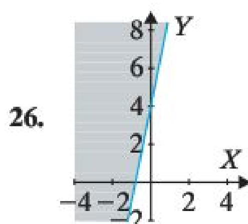
21.


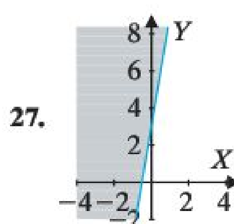
22.


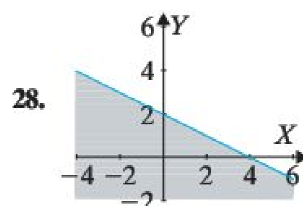
23.


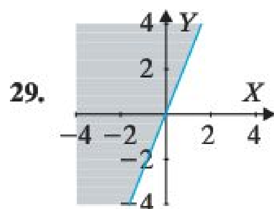
24.


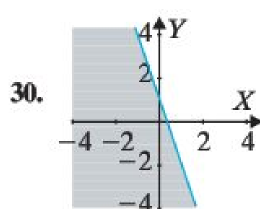
25.


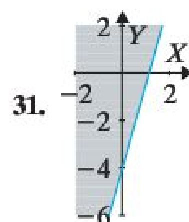
26.


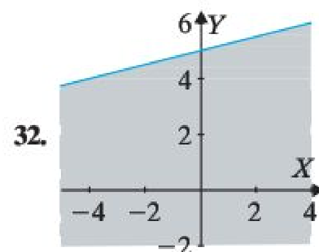
27.


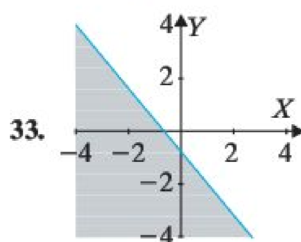
28.


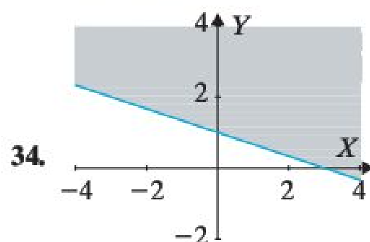
29.


30.


31.


32.


33.


34.


Ejercicios de repaso de la página 157 (sección 5.11)

1. $z = 14; z = -14$. **2.** $t = 3.5$. **3.** $s = -\frac{14}{3}$. **4.** $y = \frac{23}{2}$. **5.** $x = -1$. **6.** $w = -\frac{7}{5}$. **7.** $t = 1$. **8.** $w = 11$. **9.** $x = \frac{1}{5}$. **10.** $x = -\frac{1}{13}$. **11.** $r = -\frac{9}{11}$. **12.** $w = -18$. **13.** Es una identidad. **14.** $y = 1.5$. **15.** $w = 2; w = -\frac{4}{5}$. **16.** $x = -3$. **17.** 6.36 es el 53% de 12. **18.** 12 es el 2.4% de 500. **19.** 19 es el 8% de 237.5. **20.** 15% de 98 es 14.7. **21.** 3.5% de 68 es 2.38. **22.** 70% de 120 es 84. **23.** $r \in \left(-\frac{1}{9}, \infty\right)$. **24.** $z \in \left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$. **25.** $x \in [-2, \infty)$. **26.** $x \in \left[-\frac{13}{3}, 1\right]$. **27.** $y \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [5, \infty)$. **28.** $w \in (-2, 2)$. **29.** El ancho mide 11.2 cm y el largo 44.8 cm. **30.** **a)** Un litro de aceite de girasol cuesta \$2.80. **b)** Deben mezclarse 8 litros de aceite de maíz y 12 de girasol. **c)** El precio de un litro de la mezcla es \$5.05. **d)** Deben mezclarse 84 litros de aceite de maíz y 24 de aceite de girasol. **31.** Los números son: −64, −60, −56. **32.** El número es 100. **33.** En cualquier caso obtenemos el mismo resultado. **34.** El número es −72. **35.** El hijo paga por la planta baja \$405.

36. Guillermo tiene 9 años. **37.** **a)** La mezcla contiene 31% de ácido. **b)** La mezcla tendría 12% de ácido. **c)** Hay que agregar 300 ml de solución ácida. **38.** **a)** La mezcla tiene 5% de cloro. **b)** Deben agregarse 375 mililitros de agua. **c)** Deben agregarse 750 mililitros de agua. **39.** La pieza tiene 60 metros de tela. **40.** **a)** Hay que agregar 11 litros de ponche sin alcohol. **b)** Hay que agregar 16.5 litros. **c)** La mezcla contiene 18.6% de alcohol. **d)** Hay que agregar 44 litros. **41.** El capital inicial era $2600. **42.** El vestido tenía un descuento del 24%. **43.** Se procesaron 1725 kg de caña. **44.** Puede comprar hasta 5 libretas. **45.** Tienen que vender al menos 1991 paquetes de galletas. **46.** Su tercer salto debe ser por lo menos de 1.77 metros. **47.** El interés al que debe invertirse debe ser por lo menos del 12%.

Capítulo 6 Polinomios

Ejercicios de la página 164 (sección 6.2.1)

1. $-6; x^2y^3z$. **2.** $\frac{7}{8}; abc^5$. **3.** $0.75; rs^7t$. **4.** $-\frac{43}{8}; x^4y^2$. **5.** $1; c^9$. **6.** 20.7; ninguna. **7.** $-3.9; b$. **8.** $8; r^6st^4w^3$. **9.** $\frac{16}{21}; a^5b^7c^2d$. **10.** $\frac{11}{15}; abc$. **11.** $-24.55; a^6c^8e^9$. **12.** $39; x^4y^{12}w^3$. **13.** $\frac{61}{9}; t^{10}w^5r^7$. **14.** $1; a^6b^{11}cd^5$. **15.** $\frac{1}{1214}; xyzw$. **16.** $\frac{2}{9}$; ninguna. **17.** $0.15; de$. **18.** $-1; f^3g^8h$. **19.** -256. **20.** 256. **21.** -128. **22.** $3z^{21}$. **23.** $-\frac{243}{32}$. **24.** $-\frac{a^5b^2c}{40}$. **25.** $3x^9$. **26.** $(y-8)^{18}$. **27.** $16w^{10}$. **28.** c^{15}. **29.** $26.88a^{21}b^6c^5$. **30.** $(-2z+5)^{21}$. **31.** $-3a^{15}$. **32.** $\frac{a^3b^3}{27}$. **33.** $\frac{abcd}{120}$. **34.** $-\frac{2}{3}x^{11}y^{19}$. **35.** $-\frac{s^{14}t^{27}}{16}$. **36.** $36c^5d^{12}$. **37.** $(a-2)^{11}(3b+7)^{14}$. **38.** $\frac{1}{14}(x+1)^6y^7z$. **39.** $\frac{3}{20}a^6b^7c^3d^{20}$. **40.** $3a^{20}b^{15}c^{18}$. **41.** $0.48x^{30}y^{30}z^{30}$. **42.** $-6x^7y^7z^{15}$. **43.** $21c^{18}d^{29}e^{22}$. **44.** $18a^6b^6c^5d^8e^9f$. **45.** $-28x^{10}y^{15}z^{18}w$. **46.** Aproximadamente $1,811.59. **47.** Le conviene más al 1% mensual. **48.** Deberá pagar $44,306. **49.** Debe pagar $19,970.47, además del importe de las letras.

Ejercicios de la página 167 (sección 6.3.1)

1. 4096. **2.** $\frac{1}{4096}$. **3.** 0.000729. **4.** -1. **5.** 100,000,000. **6.** 0.001. **7.** $-6x^8$. **8.** c^{10}. **9.** x^{66}. **10.** $-12w^{35}$. **11.** z^{56}. **12.** $-1.5b^{10}$. **13.** $\frac{25}{24}(y+3)^{10}$. **14.** $\frac{7}{3}a^{80}$. **15.** $\frac{9}{4}(x-8)^{18}$. **16.** $16s^{48}$. **17.** $(y^3-3y+1)^{32}$. **18.** $(4a^5+7a^3)^{63}$. **19.** $(x^2+x+1)^{30}$. **20.** $16(w-1)^{21}$. **21.** $486z^{36}$. **22.** y^{35}. **23.** z^{76}. **24.** w^{76}. **25.** $(y^4-3y^2+2)^{42}$. **26.** $(w^5+8)^{55}$. **27.** $(x^2+1)^{153}$. **28.** $(z+9)^{74}$. **29.** $\left(\frac{3}{5}y-4\right)^{48}$. **30.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{115}$. **31.** $(5a^2-b^3)^{31}$. **32.** $(y^5+y-3)^{45}$. **33.** $(z-7)^{187}$. **34.** $(a^4+3b^2-b)^{93}$. **35.** $(7x^2+5y^3)^{100}$. **36.** $(3w^4+w^3-2w)^{77}$. **37.** $(a^8-5b^5c^4)^{250}$. **38.** $(r^4s^9t-8s^4t^7)^{110}$. **39.** El empleado recibe $765.40 al cabo de un año. **40.** Conviene más al 20% trimestral. **41.** El rédito es de $194. Conviene más al 10% anual. **42.** El capital al cabo de tres años será $14,282. **43.** **a)** El capital final será: $20,239.67. **b)** Conviene más de la manera indicada en el inciso a). **44.** El rendimiento será: $69,957.33. **45.** El capital al finalizar los 5 años será $2,443.60. **46.** Al cabo de cuatro años, Armando no tendrá dinero suficiente para comprar el refrigerador. **47.** Conviene más invertir a la tasa señalada en el inciso a). **48.** El capital de Magdalena será: $14,307.68. **49.** Julio no podrá comprar el auto.

Ejercicios de la página 170 (sección 6.4.1)

1. $121y^4$. **2.** $-343a^6$. **3.** $64k^{18}$. **4.** $-54b^{10}$. **5.** $-12a^{10}b^5$. **6.** $6z^{32}$. **7.** $-\frac{3}{5}a^6b^6$. **8.** $-7r^{12}s^{15}$. **9.** $-125t^{12}$. **10.** $0.0625a^4b^{16}$. **11.** $\frac{8}{9}ab^{14}c^7$. **12.** $600a^{30}b^3c^6$. **13.** $\frac{1}{99}s^9r^{12}t^8$. **14.** $-2c^8d^7e$. **15.** $-c^{17}d^{36}$. **16.** $-\frac{c^{76}d^{57}}{32}$. **17.** $\frac{1}{32}a^{25}b^{35}c^{45}$. **18.** $5^6c^{30}d^{90}e^{126}$. **19.** $81x^2y^6z^4$. **20.** $7x^{60}y^{110}z^{140}$. **21.** $625a^{16}b^{40}c^{48}d^4$. **22.** $49a^2b^{18}c^{18}d^8$. **23.** $\frac{r^{147}s^{210}t^{133}}{14}$. **24.** $5a^{41}b^{30}$. **25.** $x^{45}y^{73}$. **26.** $1.21x^{28}y^{38}z^{32}$. **27.** $27a^{60}b^{48}c^{21}$. **28.** $96a^{37}b^{45}c^{11}$. **29.** $-32a^{10}$. **30.** $0.0001a^{26}b^{22}c^{34}$. **31.** $\frac{a^{12}c^{20}d^{20}e^{18}}{576}$. **32.** $-\frac{2}{3}x^{32}y^{48}z^4$. **33.** $\frac{3}{2}x^{26}y^{48}z^{32}$. **34.** $2a^{22}b^{13}c^{20}d^4$. **35.** $48r^{51}s^{80}t^{32}$. **36.** $r^{19}s^{57}t^{19}$. **37.** $(x^3+7x-4)^{72}(z^4-z^2+13)^{96}$. **38.** $(a^5-9)^{36}(b^6+b-7)^{18}c^{216}$.

39. $\left(25w^{11}+47z^{15}\right)^{114}\left(32w^3z^4-51\right)^{228}$. **40.** $\left(18a^2b^3-21ac^4\right)^{286}45^{308}e^{616}d^{308}$. **41.** $\left(2c^8-5c^5-7c^4\right)^{70}\left(12c^6d^7+18c^9d^{11}\right)^{56}$. **42.** $\left(20x^5y^2-17x^4z^5\right)^{117}\left(3r^7st^5+r^9t^9\right)^{13}$. **43.** El volumen se multiplica por 8. **44.** El volumen se multiplica por 125.

Ejercicios de la página 172 (sección 6.5.1)

1. -5. **2.** $\frac{12}{7}$. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** $-\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{48}{125}$. **6.** $\frac{1}{b^3}$. **7.** $-\frac{1}{d^7}$. **8.** c^3. **9.** 1. **10.** $2y^{10}$. **11.** $\frac{1}{4x^3}$. **12.** $\frac{6}{z^4}$. **13.** $27c^3$. **14.** $-81d^2$. **15.** $\frac{b^2}{a^2}$. **16.** $-\frac{9y^4}{5x^3}$. **17.** $\frac{1}{6}$. **18.** $\frac{c^2d}{3}$. **19.** $-\frac{12}{ab^2}$. **20.** $\frac{9b^2}{a^5}$. **21.** $\frac{w^7z^2}{8}$. **22.** $\frac{x^5y^{17}}{4z^5}$. **23.** $-\frac{7c}{a}$. **24.** $-\frac{3c^2f^{11}}{5d^{18}e^6}$. **25.** $\frac{x^7y^2z^5}{6}$. **26.** $-\frac{4a^2b^3}{c^5d^4}$. **27.** $\frac{7y^2z}{2w^5}$. **28.** $\frac{x^{18}}{2y^{15}}$. **29.** $\frac{25a^{49}b^{10}}{16c^2}$. **30.** $\frac{8s^{62}t^4}{r^3}$. **31.** $\frac{10xz^8}{3y}$. **32.** $-\frac{a^{11}c^{29}}{11b^{16}}$. **33.** $\frac{3d^{19}}{c^{42}e^{16}}$. **34.** $\frac{5x^{28}z^{17}}{96y^5}$. **35.** $\frac{r^2s^{16}t^{10}}{126}$. **36.** $\frac{7}{16}x^{52}y^{38}z^{24}$. **37.** $\frac{3a^{17}c^{22}}{25b^{21}}$. **38.** $9c^{14}d^{24}e$. **39.** $15x^2z^2$. **40.** $\frac{1}{240w^{13}x^{10}z^6y^{14}}$. **41.** $\frac{5\left(7^2\right)\left(4^5\right)\left(2^4\right)a^{91}c^{131}d^{60}}{3b^{24}}$. **42.** $\frac{4s^{83}}{147r^{110}t^{80}}$.

Ejercicios de la página 174 (sección 6.6.1)

1. Grado a: 6; grado b: 2; grado c: 9; grado monomio: 17. **2.** Grado c: 1; grado d: 5; grado monomio: 6. **3.** Grado monomio: 0. **4.** Grado monomio: 0. **5.** Grado a: 3; grado b: 1; grado c: 1; grado monomio: 5. **6.** Grado x: 1; grado monomio: 1. **7.** Grado x: 2; grado y: 1; grado z: 4; grado monomio: 7. **8.** Grado c: 1; grado d: 4; grado e: 1; grado f: 8; grado monomio: 14. **9.** Grado x: 3; grado y: 5; grado z: 2; grado w: 3; grado monomio: 13. **10.** Grado r: 1; grado s: 1; grado t: 1; grado monomio: 3. **11.** Grado x: 4; grado y: 7; grado z: 5; grado monomio: 16. **12.** Grado c: 10; grado d: 9; grado e: 7; grado monomio: 26. **13.** Grado r: 12; grado s: 6; grado t: 11; grado u: 8; grado monomio: 37. **14.** Grado a: 5; grado b: 5; grado c: 5; grado d: 5; grado monomio: 20. **15.** Grado x: 10; grado y: 13; grado z: 19; grado monomio: 42. **16.** Grado c: 20; grado d: 5; grado e: 7; grado f: 12; grado monomio: 44. **17.** $\frac{1}{81}x^{24}y^{12}z^8$; grado 44. **18.** $r^8s^{10}t^{15}$; grado 33. **19.** $-\frac{16}{3}x^{13}y^{21}z^{22}$; grado 56. **20.** $w^{15}y^{50}z^{40}$; grado 105. **21.** 0; grado 0. **22.** $-8a^{17}b^{15}c^{16}$; grado 48. **23.** $81c^{20}d^{32}e^8$; grado 60. **24.** $a^9c^9b^3$; grado 21. **25.** $124a^6b^6c^6$; grado 18. **26.** $-2r^7s^{20}w^4$; grado 31. **27.** $\frac{5}{6}a^2bc^3$; grado 6. **28.** $\frac{1}{3}x^{16}y^{33}z^{25}$; grado 74. **29.** $\frac{1}{27}a^{12}b^{12}c^4$; grado 28. **30.** $-\frac{49}{48}x^4y^{17}$; grado 21. **31.** $\frac{32}{81}a^{40}b^{34}c^{26}d$; grado 101. **32.** 2. **33.** 4. **34.** 1. **35.** 3. **36.** 3. **37.** 6. **38.** 9. **39.** 10. **40.** 4. **41.** 17. **42.** 1. **43.** 12. **44.** 0. **45.** 5. **46.** 7. **47.** $-51y^4-31y^3+24y^2+13y-19$. **48.** $-9w^7+13w^5-10w^3+7w+19$. **49.** $-15w^{10}-88w^9-5w^7+32w^3+21w$. **50.** $-z^{12}+53z^{10}+20z^5+2z^4+47z-121$. **51.** $-28x^9+6x^7+x^6-6x^5+3x^4+22x^3-7x+23$. **52.** $-86y^{14}-68y^{11}-37y^9-45y^7-13y^5-93y^2-29y-57$. **53.** $-3z^{14}+3z^{11}+3z^7+8z^5-4z^2+6z+12$. **54.** $49+36xy^2z^5+13x^2y^7z-9x^3y^6+21x^4y-11x^5z^2-8x^7y^5z^4$. **55.** $3x^3y-7xy^2-2x^2y^3-8x^4y^5+6xy^7$. **56.** $-x^5w+11x^4w^2+7xw^3-8x^2w^5+6x^3w^6$. **57.** $-6abc+70a^4b^2c+26a^6b^4-11a^5b^8$.

Ejercicios de la página 177 (sección 6.7.1)

1. $6x^3+3x^2-23x-12$. **2.** $4z^4-5z^2+z+2$. **3.** $15w^2-15wy-7y^3-4$. **4.** $-2a^3b-6ab^2-b^2$. **5.** $6c^4d+2c^2d^2-2cd^3-2c$. **6.** $28y^6-4y^5-3y^3$. **7.** $22z^9+22z^7+5z^6+16$. **8.** $43c^8-2c^6-3c^3+23c-19$. **9.** $5x^5+7x^3y-10x^2y^2+3xy^5+1$. **10.** $2z^3-14wz^2-16w^2z+10w^3-8$. **11.** $5x^7+25x^6+43x^4-42x^3+x^2-2x-16$. **12.** $3a^2+b^2$. **13.** $m^5+17m^4n-11m^3n^2+4m^2n^3-6mn^4$. **14.** $2a^6+3a^5+a^4-5a^3-4a^2-8a-5$. **15.** $-a-8b-1$. **16.** $2c-10d+4e$. **17.** $3rs$. **18.** $-2ab+2b^2$. **19.** $x^3-13y^3+5z^3+7z^2$. **20.** $2a^3+3x-7$. **21.** $8x^7y^8-4x^5y^9-xy^{14}+5$. **22.** $3a^2+ab-ac-3bc-2c^2$. **23.** $-m^2n^2p^2-8mn^2p$. **24.** $19r^9t^{14}-26r^7st^{12}-41r^5s^4t^8-13r^3s^5t^4-113$. **25.** $-99a^{11}b-88a^8b^2c^{10}-121a^4b^6c^8-99a^3b^3c^3$. **26.** $-35x^{14}z^3w^{11}-19x^{10}yz^8w^8-42x^9y^2z^6w^{11}+64x^8yz^8w^8+35x^7z^3w^{11}+48x^6z$. **27.** $3b$. **28.** $4a+4b+6c$. **29.** $-x+2y$. **30.** b. **31.** $4(11-2z)-3(10-z)=14-5z$. **32.** $3(5+x)+2(3x-4)=7+9x$. **33.** $d+2m=8$. **34.** Pepe tiene 2 sobrinos y 9 sobrinas. **35.** El número es 76,543. **36.** Es una identidad.

Ejercicios de la página 180 (sección 6.8.1)

1. $2c^2$. **2.** $10y^2+40$. **3.** $5s^3t+10s^2t^2+5st^3$. **4.** $-2z^2+14z$. **5.** $-3b^4+12b^2$. **6.** $-x^5+x^4y^2$.
7. $16d^3+40d^2-8d$. **8.** $6x^4+24x^3-42x$. **9.** $42d^4-30d^3+12d$. **10.** $-4a^3+\frac{10}{3}a^2b+12ab^2$.
11. $4c^6-2c^3-8c$. **12.** $-12a^7+2a^6-\frac{1}{3}a^3$. **13.** $36x^3y^3+60x^2y^4+72x^2y^3+12x^2y^2+12xy^3$.
14. $2x^4-8x^3y+10x^2y-4xy^3$. **15.** $-45c^7d-9c^6d^3+54c^4d^6+27c^3d$. **16.** $6r^7s^3-18r^5s^4+9r^4s^8-24r^3s^9-3r^2s^2$.
17. $\frac{2}{3}a^4b^3c-\frac{2}{3}ab^6c-\frac{8}{3}a^2b^5c-\frac{4}{3}a^2b^3c^4+\frac{2}{3}ab^3c^2$. **18.** $12s^7t^3-2s^6t^5+\frac{1}{14}s^4t^4+\frac{8}{7}s^3t^2$.
19. $-7atw^2z^2+14a^2tw^2z-7atw^4+14atwz^2$. **20.** $5x^{12}y^2-20x^{11}y^3+30x^{10}y^4-20x^9y^5+5x^8y^6$.
21. $4x^2y^4-4x^4y^4-4x^2y^6-4x^2y^4z^4+4x^2y^4z^6$. **22.** $81a^6b^6c^3+54a^5b^8c^3+162a^4b^9c^3+243a^3b^{11}c^3$.
23. $-5s^6t^{10}r^5-8s^{12}t^{10}+7s^5t^{15}r^4-s^{14}t^{16}r^3$. **24.** $64w^{17}z^{18}-64w^{15}z^{21}+64w^{14}z^{22}-64w^{13}z^{24}$.
25. $3a^{12}b^9-\frac{1}{2}a^8b^6+\frac{2}{15}a^9b^3$. **26.** $\frac{3}{2}x^8y^{16}z^{11}w^5-2x^6y^{18}z^3w^7$. **27.** $4x^3-12x^2+4x$.
28. $-12y^4+14y^3+8y^2-4y$. **29.** $-6c^4d^3-3c^3d^3-9c^2d^2+27cd$. **30.** $40r^6+15r^4s-10r^3s^2-5r^2s$.
31. $6a^6b^2-18a^5b^3-30a^4b^4-24a^3b^5-42a^2b$. **32.** $35x^7y^5-49x^6y^3+7x^5y^4-21x^5y^3-70x^4y^2$.
33. $-8s^3t^7r^2-2s^6t^2r+16s^7t^4+10s^4t^8r^3-24s^3t^2$. **34.** $8x^7y^5+32x^6y^6+48x^5y^7+32x^4y^8+8x^3y^9$.
35. $-12a-7a^2$. **36.** b^3+15b^2+16b. **37.** $-12x+14x^2+4x^4$. **38.** $10d^2+4d+5$.
39. $2w^7+5w^6-2w^4+12w^3+2w^2$. **40.** $20z^6+10z^5-2z^3$. **41.** $15y^8-y^7+y^5-2y^2$.
42. $-21a^6+24a^7+13a^5$. **43.** $-62z^9-35z^8-24z^6-20z^3-9z^2$. **44.** $92x^5y^5+24x^7y^7+31x^9y^{11}$.
45. $-80a^{12}b^4c^5-49a^{13}b^8c^4-21a^7b^3c^2-8a^9b^4c$. **46.** $86x^7y^6z^{15}w^2+60x^4y^{15}z^{11}-48x^4y^6z^8-35w^5x^{12}y^{13}z^5$.
47. $x=-\frac{5}{2}$. **48.** $y=\frac{5}{6}$. **49.** $c=9$. **50.** $d=-\frac{6}{5}$. **51.** $z=-\frac{5}{3}$. **52.** $x=-\frac{2}{7}$. **53.** $y=9$.
54. $w=10$. **55.** Los números son 10, 11 y 12. **56.** Los números son 8, 10 y 12. **57. a)** El área es igual a $2x^2-5x$. **b)** El área es igual a 117 unidades cuadradas. **58.** El volumen de la región es $5h\pi(2r-5)$.

Ejercicios de la página 183 (sección 6.9.1)

1. $6x^2+x-2$. **2.** $5y^2-33y+18$. **3.** $28a^2+92a+72$. **4.** $54b^2-15b-50$. **5.** $6xz-15xw-18yz+45wy$.
6. $2a^3+2a^2b-a-b$. **7.** $t^2+\frac{265}{56}t+\frac{25}{16}$. **8.** $3c^7+\frac{1}{2}c^3d^6-6d^5c^4-d^{11}$. **9.** $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
10. $15a^3+27a^2+30a^2b^2+54ab^2-5ab^3-9b^3$. **11.** $a^7+3a^5-8a^4+4a^3-24a^2-32$. **12.** $2c^3+c^2-22c-30$.
13. $6a^8b^4c^3-36a^7b^2c^3+8a^3b^7c^4-48a^2b^5c^4$. **14.** $-2a^8-6a^6+8a^5+a^3+3a-4$. **15.** $y^6+4y^5+6y^4+y^3-3y-5$.
16. $2z^6+z^5-14z^4-26z^3-8z^2+21z+24$. **17.** $15x^6-36x^4-12x^3+15x^2+24x-6$.
18. $9b^5+72b^4-22b^3-68b^2+8b+16$. **19.** $-7x^7y^2-28x^6y^3-10x^5y^4-40x^4y^5-5x^4y^3-20x^3y^4$.
20. $2c^5-2c^5d+c^4d+4c^3d^2-4c^3d^3+2c^2d^3-2cd^4+2cd^5-d^5$.
21. $18r^8s^2t^4-30r^6s^5t^2+27r^5s^8t^9-45r^3s^{11}t^7-3r^2s^9t^4+3r^2t^{12}+5s^{12}t^2-5s^3t^{10}$. **22.** z^4-z^3-z+1.
23. $-3r^8-5r^7s^3+12r^7s^2-r^6s^5-35r^5s^8+27r^4s^3+45r^3s^6$. **24.** a^4-b^4. **25.** a^4+3a^2+36. **26.** x^4+324.
27. $15x^4+23x^3y+32x^2y^2+26xy^3+12y^4$.
28. $-14a^7+7a^6+7a^6b+4a^5b^3-2a^4b^3-2a^4b^4-8a^2b^5+4ab^5+4ab^6$. **29.** $a^3+b^3+c^3-3abc$. **30.** y^4+4z^4.
31. $5x^6+23x^5-12x^4+23x^3-27x^2+10x-8$. **32.** $81x^4-256y^4$.
33. $8x^7y+8x^6y^2+4x^6y^3+8x^5y^3+4x^5y^4+8x^5y-9x^4y^4+4x^4y^3+4x^4y^5-x^3-x^3y-9x^3y^5+x^2-9x^2y^4-2x^2y$ $-9x^2y^6-x-2xy^2+1+2y^2+y^4-y^3-y$.
34. $a^3b-a^3+4a^2b+6ab+4a-5b^2$. **35.** $-s^6t^4+s^5t^3-6s^4t^4-s^4t^2+16s^3t^3$.
36. $-20x^9+73x^8-33x^7-59x^6+41x^5-27x^4-33x^3+5x^2+38x-10$. **37.** 0.
38. $a^3c-a^3b+a^2b^2-a^2c+2a^2bc+a^2b^2c-2a^2c^2-a^2b^3-ab^3+ab^4+ac^2-ab^2c^2+2ac^3-bc^2-b^4c+2b^2c^2+b^3c^2$.
39. $6r^2+r^2s+42rst^2-rs+rt-7rs^2t^2-6s^2+6s+st-6t-t^2$. **40.** $2x^3y-x^2-10x^2y+2x^2y^3-2xy-12xy^2+10y^2$.
41. $2w^5-4w^4-36w^3+16w^2+52w-18$. **42.** $y=-\frac{19}{3}$. **43.** $z=-\frac{3}{2}$. **44.** $x=-11$. **45.** $x=\frac{5}{14}$. **46.** $w=\frac{7}{2}$.
47. $y=-9$. **48.** $d=\frac{1}{15}$. **49.** $a=-12$. **50.** $w=\frac{17}{5}$. **51.** $x=\frac{3}{20}$. **52.** $c=-1$.
53. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. **54.** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
55. $a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$. **56.** Los números son 7 y 9. **57.** Los números son 3, 4 y 5.

Ejercicios de repaso de la página 185 (sección 6.10)

1. $\frac{2}{5}a^{32}b^{25}c^{41}$. **2.** $\frac{5}{28}w^{127}x^{50}y^{57}$. **3.** $125x^{99}y^{135}z^{75}$. **4.** $a^{34}c^{92}b^{24}$. **5.** $\frac{s^{14}t^{25}}{(2)3^3 5^2 r^{62}}$. **6.** $\frac{5}{168x^8y^{31}z^{12}}$.
7. Con respecto a x: $-8-71x^3y^{20}-17x^5y^{22}+45x^7y^{19}+32x^{12}y^9+28x^{14}y^3-12x^{20}$.
Con respecto a y: $-8-12x^{20}+28x^{14}y^3+32x^{12}y^9+45x^7y^{19}-71x^3y^{20}-17x^5y^{22}$.
8. Con respecto a a: $37a^{21}b^6c^{11}+18a^{19}b^{14}-68a^{16}b^{25}c^3-10a^7b^3c^{18}-27a^5b^{13}c^{20}+125$.
Con respecto a b: $-68a^{16}b^{25}c^3+18a^{19}b^{14}-27a^5b^{13}c^{20}+37a^{21}b^6c^{11}-10a^7b^3c^{18}+125$.
Con respecto a c: $-27a^5b^{13}c^{20}-10a^7b^3c^{18}+37a^{21}b^6c^{11}-68a^{16}b^{25}c^3+18a^{19}b^{14}+125$.
10. $-x^2-3y^2-4z^2$. **11.** 0. **12.** 38. **13.** 19. **14.** 6. **15.** -2. **16.** -2. **17.** 9.
18. $16a^3-2b^3-9c^3; 2a^3-8b^3+15c^3$. **19.** $6x^4-3x^3+2x^2-4x+3; -4x^4+3x^3+2x^2+4x-1$.
20. $18r^2-8rs+4rs^2-s^5; 6r^2+6rs^2+s^5$. **21.** $2a^3b+16a^2+6ab^2-3b^2; 16a^3b-2a^2-6ab^2-3b^2$.
22. $6x^5+8x^4-3x^3+15x^2-3x-5; 10x^5-10x^4+3x^3-x^2-3x+3$. **23.** $15ab^3c^2+ab^2c^5+ab^2c^4-8ab^2c^3+2c^3$; $15ab^3c^2+ab^2c^5-ab^2c^4+8ab^2c^3-4c^3$. **24.** $35a^2+11a-6$. **25.** $24c^2+104c-80$. **26.** $54b^3-21b^2-5b$.
27. $x^5-x^4+4x^3-12x^2+12x-48$. **28.** $10y^9-25y^7-5y^5-4y^4+10y^2+2$. **29.** $x^5+4x^4-2x^3+26x^2-11x+33$.
30. $32a^{11}-16a^9+12a^8-22a^6+a^5+10a^4-5a^3$. **31.** $x^5-2x^4y+2x^2y^3-2xy^4+y^5$.
32. $18a^6+9a^5b^2+39a^3b^3+a^4b^4+8a^2b^5+15b^6$. **33.** $a^3-3a^2b-3a^2c+3ab^2+3ac^2+2abc-b^3+b^2c+bc^2-c^3$.
34. $5x^2+6xy+y^2$. **35.** a^2-c^2. **36.** $c^4+c^2d^2+d^4$. **37.** w^6-z^6. **38.** $x^3y+10x^2y+15xy-x^3+6x^2+8x-3y^2-9y$.
39. $-2a^5b^5+12a^4b^6+6a^4b^4-2a^3b^7+3a^3b^5+7a^2b^6+ab^7$. **40.** $uc-dc-3d-2c=0$.
41. a) $xcu+x^2c-xdu-x^2d+mcu+mcx-mdu-mdx+md+mc=184$. **b)** La ecuación es $6n^2+31n+37=184$. **42.** $3n^4+17n^3+28n^2+12n=0$. **43.** $-147, -94, 168, -117, 337$. **44.** La inversión inicial fue de \$650. **45.** Al cabo de tres años Julián tendrá más dinero. **46.** Los números son 5, 6, 7 y 8.

Capítulo 7 Productos notables y factorización

Ejercicios de la página 191 (sección 7.2.1)

1. 576. **2.** 9801. **3.** 5929. **4.** 6724. **5.** 1849. **6.** 1225 **7.** 4761. **8.** 3364. **9.** $49+14x+x^2$. **10.** $a^2-10a+25$.
11. $y^2+18y+81$. **12.** $b^2+12b+36$. **13.** $\frac{1}{25}w^2+\frac{18}{5}w+81$. **14.** $w^2+\frac{11}{2}w+\frac{121}{16}$. **15.** $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$.
16. $r^2+\frac{5}{3}r+\frac{25}{36}$. **17.** $\frac{1}{2}x^2+6\sqrt{2}x+36$. **18.** $y^2+\frac{7}{2}y+\frac{49}{16}$. **19.** $\frac{1}{9}z^2-\frac{4}{3}z+4$. **20.** $-x^2-\frac{4}{5}x-\frac{4}{25}$.
21. $121+22y+y^2$. **22.** $-36x^2-36x-9$. **23.** $64-80y+25y^2$. **24.** $121x^2+88x+16$. **25.** $64x^2-144x+81$.
26. $25x^2+20x+4$. **27.** x^6+2x^3+1. **28.** $81y^2+18y+1$. **29.** $\frac{1}{49}z^4-2z^2+49$. **30.** $\frac{1}{25}a^2b^2-\frac{2}{5}ab^4+b^6$.
31. $-\frac{4}{9}z^2+\frac{40}{9}z-\frac{100}{9}$. **32.** $\frac{1}{16}a^2-\frac{5}{12}a+\frac{25}{36}$. **33.** $a^2b^2-4ab+4$. **34.** $a^2b^2-2abc+c^2$. **35.** y^4-8y^2+16.
36. x^6-2x^3+1. **37.** $9x^2+30xy^4+25y^8$. **38.** $169s^2-208st+64t^2$. **39.** $t^4+4t^3+4t^2$. **40.** $-4x^4+12x^2y^2-9y^4$.
41. $\frac{9}{64}c^4+\frac{1}{6}d^3ec^2+\frac{4}{81}d^6e^2$. **42.** $4r^6s^2-2r^5s^7+\frac{1}{4}r^4s^{12}$. **43.** $\frac{25}{49}c^2d^4+\frac{10}{9}c^3d^3+\frac{49}{81}c^4d^2$.
44. $16a^2b^4c^{16}-48ab^9c^9+36b^{14}c^2$. **45.** $144r^8s^2+216r^4st^5w^7+81t^{10}w^{14}$. **46.** $a^3+a^2b-ab^2-b^3$. **47.** x^3+y^3.
48. $r^4-2r^2s^2+s^4$. **49.** $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. **50.** z^4-z^3-z+1. **51.** x^4+x^3+x+1. **52.** $2zw$.
53. $\frac{5}{4}r^2-\frac{17}{4}rs+\frac{65}{16}s^2$. **54.** $x=4$. **55.** $z=-1$. **56.** $w=4$. **57.** $y=1$. **58.** $z=-\frac{7}{5}$. **59.** $w=-1$. **60.** $r=\frac{1}{2}$.
61. $b=-65$. **62.** $y=-\frac{17}{20}$. **63.** $z=-\frac{10}{19}$. **64.** El perímetro mide 14 m. **65.** No hay tres números enteros consecutivos que satisfagan las condiciones. **66.** Hay 1000 mosaicos. **67.** El salón mide 12 metros de lado.
68. Los números son 25 y 27. **69.** Los números son 16 y 18.

Ejercicios de la página 196 (sección 7.4.1)

1. 891. **2.** 384. **3.** 6396. **4.** 9975. **5.** 3599. **6.** 1591. **7.** a^2-81. **8.** $25-y^2$. **9.** z^2-49.
10. $x^2-\frac{9}{16}$. **11.** $16y^2-\frac{1}{36}$. **12.** $\frac{36}{49}-w^2$. **13.** a^2-400. **14.** $36-4b^2$. **15.** $9b^2-121$. **16.** $49x^2+14x+1$.
17. c^2-64. **18.** $-25x^2+49$. **19.** $81-16y^2$. **20.** x^2-3. **21.** $144x^2+72xy+9y^2$. **22.** $64d^2-144$.

23. $36y^2-4$. **24.** $x^2-\pi^2$. **25.** $4x^4-625$. **26.** $64z^2-144zw+81w^2$. **27.** y^2-25z^2.
28. $\frac{25}{16}t^2-\frac{11}{2}t+\frac{121}{25}$. **29.** $\frac{9}{25}x^2-12x+100$. **30.** $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{16}b^2$. **31.** x^2+x-6. **32.** x^2-x-72.
33. x^2-3x-4. **34.** $y^2+13y+42$. **35.** $z^2+8z-33$. **36.** $x^2+5x-300$. **37.** $25t^2-70t+45$.
38. $x^2-2x-15$. **39.** x^2-1. **40.** x^4-8x^2+12. **41.** $y^2-12y-13$. **42.** $16t^2+24t-27$.
43. $\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{16}-\frac{3}{8}$. **44.** $t^4+\frac{37}{6}t^2+1$. **45.** $25x^4-\frac{27}{4}x^2+\frac{1}{8}$. **46.** $4a^{12}+2a^6-6$. **47.** $64b^{10}c^8+56b^5c^4-8$.
48. $9x^6+21x^3+12$. **49.** $\frac{49}{36}y^2-\frac{553}{180}y+\frac{22}{15}$. **50.** $\frac{1}{9}x^2-\frac{8}{9}x-1$. **51.** $\frac{4}{9}z^8y^6+\frac{16}{5}z^4y^3-1$. **52.** $y=\frac{8}{3}$. **53.** $x=\frac{19}{15}$.
54. $z=\frac{38}{9}$. **55.** $w=-\frac{1}{3}$. **56.** $x=0$. **57.** $x=\frac{17}{5}$. **58. a)** $V=(12-2h)^2h$. **b)** $V=(8-2h)(5-2h)h$.
59. $A=\pi(y^2-x^2)$. **60.** El número es 246. **61. a)** $d^2-cd+ud-uc=-2u+3; c^2-d^2=u$. **b)** El número es 325.
62. No lo es.

Ejercicios de la página 199 (sección 7.5.1)

1. $x^2+y^2+2xy+16x+16y+64$. **2.** $9r^2+49s^2+42rs+12r+28s+4$. **3.** $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.
4. $25w^2+81z^2-90wz+60w-108z+36$. **5.** $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.
6. $16x^2+9y^2+25z^2+24xy-40xz-30yz$. **7.** $\frac{9}{4}r^2+\frac{1}{16}s^2+\frac{4}{9}t^2-\frac{3}{4}rs-2rt+\frac{1}{3}st$.
8. $\frac{25}{16}a^2+b^2+4c^2+\frac{5}{2}ab-5ac-4bc$. **9.** $216w^3+216w^2z+72wz^2+8z^3$. **10.** $81r^2+\frac{49}{9}s^2+42rs+12r+\frac{28}{9}s+\frac{4}{9}$.
11. $-27x^3+108x^2y-144xy^2+64y^3$. **12.** $343a^3-735a^2b+525ab^2-125b^3$.
13. $a^4+36b^2-12a^2b-18a^2+108b+81$. **14.** $-w^6-18w^4z-108w^2z^2-216z^3$. **15.** $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
16. $\frac{1}{216}r^3-\frac{1}{36}r^2s+\frac{1}{18}rs^2-\frac{1}{27}s^3$. **17.** $\frac{1}{125}c^3+\frac{3}{50}c^2d+\frac{3}{20}cd^2+\frac{1}{8}d^3$. **18.** $\frac{8}{27}x^3+\frac{20}{27}x^2y+\frac{50}{81}xy^2+\frac{125}{729}y^3$.
19. $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$. **20.** $125a^3-600a^2+960a-512$.
21. $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$. **22.** $216x^3+1188x^2+2178x+1331$.
23. $343a^3+1323a^2b+1701ab^2+729b^3$. **24.** $100x^2-60xy+9y^2$. **25.** $\frac{1}{8}z^3-3z^2+24z-64$.
26. $\frac{1}{27}w^3+\frac{1}{15}w^2+\frac{1}{25}w+\frac{1}{125}$. **27.** $\frac{r^2}{4}+\frac{s^2}{16}+\frac{t^2}{64}+\frac{rs}{4}+\frac{rt}{8}+\frac{st}{16}$. **28.** $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$.
29. $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$. **30.** $w^7-7w^6z+21w^5z^2-35w^4z^3+35w^3z^4-21w^2z^5+7wz^6-z^7$.
31. 0. **32.** $2x^3$. **33.** $4y^2$. **34.** $4ab+4ac$. **35.** $4w^2z-4z^3$.
36. $x^4-2x^3+4x^3y+x^2-2x^2y+6x^2y^2-2xy+2xy^2+4xy^3+2y^3+y^2+y^4$. **37.** a^4-b^4. **38.** a^4-b^4.
39. $x^6+18x^5+123x^4+396x^3+615x^2+450x+125$. **40.** x^8-y^8. **41.** a^4-b^4. **42.** $z^2+w^2-x^2-y^2-2wz+2xy$.
43. x^9+y^{12}. **44.** $w^4+w^2z^2+z^4$. **45.** $x^3-4x^2y+x^2z+4xy^2+xz^2-2xyz-y^3+z^3$. **46.** $8s^3$.

Ejercicios de la página 200 (sección 7.6.3)

1. $3a^4$. **2.** $2b^3$. **3.** c. **4.** $12x^5y^9$. **5.** a^3b^6x. **6.** 9. **7.** $-10y^3z$. **8.** $8x^4y^3z^4$. **9.** $5a^2b$. **10.** $2x^4y^6$.
11. $8rs^2$. **12.** $9r^3s^4t$. **13.** $-5c^4d^2e^2$. **14.** x^3z^3. **15.** $-14a^3bc^4$. **16.** $3a^4b^{10}c^6$. **17.** $25w^{11}x^8y^{12}z^9$.
18. $-6r^{20}s^{18}t^{10}$. **19.** 1. **20.** $40a^6b^7c^{19}d^8$. **21.** $4z(2z+1)$. **22.** $y^7+6y^4+5y^2+1$. **23.** $3x(3x^2+2x+y)$.
24. $2t(3t^2-2t-1)$. **25.** $w^2(w^3+3)$. **26.** $x^2(x^2-16)$. **27.** $3(y^2+3y-9)$. **28.** $2t^2-7t+10$.
29. $8t^2(3t^4+t^2-2)$. **30.** $5a^3(3x+y+2z)$. **31.** w^2+1. **32.** $3xy^2(11x-y)$. **33.** $4xy(x-3y+2)$.
34. $2t^2(-4-9t+2t^3)$. **35.** $-5st(3s^3+5st+4t^2)$. **36.** $a^2x^3(10a^2+ax+13)$. **37.** $2x^5y^4(2x^5-3xy^2-6y^4)$.
38. $3c^5d^8e^3(5c^2-8cd^3e+7d^4e^2f^5)$. **39.** $7a^3b^2c^2(3a^2c-5ab^4c^2-7b)$. **40.** $22r^7s^{18}(2r^9+3r^3s^2-4s^3)$.
41. $5b^2y^2z(7b+2y+9b^3z)$. **42.** $2x^4y^9(y^3-4xy^2-3x^4+2x^2y^4)$. **43.** $-64w^{24}x^{32}z^{43}-25w^{18}x^{45}z^{72}-12$.
44. $8r^{10}s^5t^9(7s^2-8r^2t^2+9rs^4t^3)$. **45.** $a^8b^{13}(36b^{10}c^{17}+55a^3c^9+17a^7b^{20})$. **46.** $x^2y^2(y^5+x^4-x^2y+1-x^7y+x^{10}y^2)$.
47. $6r^{23}s^{21}t^{15}(12r^8s^5t^6+4s^5-14r^{17}t^4-3r^{11}t^2+18r^6s^9t^5-20r^{15}s^2t)$.
48. $-15a^7b^6c^3(2a^2b^9d^{15}+7b^4c^5+9a^5c^{12}d^4+3a^2b^{12}c^{20}d^{11}+4a^{12}b^7c^6d^{12})$.
49. $11x^3(x^3-2y^2)^4(6x^4+11x^6y^5-44x^3y^7-12x^2y-12xy^2+44y^9)$.
50. $(z^2+4zy+y^2)^3(1+y^4-z^4y^2-4z^5y-z^6)$.

Ejercicios de la página 205 (sección 7.7.1)

1. $(6+y)(x-8)$. **2.** $(a+7)(a-9)$. **3.** $(z-1)(z-12)$. **4.** $(-x-9)(x-10)$. **5.** $(w-2)(3w-16)$. **6.** $(8+y)(x+z)$. **7.** $(y+4)(y-20)$. **8.** $(5w-2)(13-w)$. **9.** $(x^2-3)(w-7)$. **10.** $(a-1)(a^2+6)$. **11.** $(x^2+y)(z-y)$. **12.** $(y+5)(3y+z)$. **13.** $(z^2-1)^2$. **14.** $(-5a-6b)(a-4b)$. **15.** $(3x-5)(x^2-2)$. **16.** $(y-3)(y^2+9)$. **17.** $(2-6w^2)(4w-9z)$. **18.** $(a+3)(b-3c)$. **19.** $(w+6)(w-z)$. **20.** $(a-3c)(a-7b)$. **21.** $(y^3-1)(y-1)$. **22.** $(b+10)(b-6)$. **23.** $(x+4)(x^2+3)$. **24.** $z(3z+4)(2z^2-3)$. **25.** $(a-5)(2-a)$. **26.** $(y^2+5)(y^3-4)$. **27.** $(5w+2)(8w+y)$. **28.** $y=0, y=8$. **29.** $z=\frac{1}{2}, z=8$. **30.** $w=-\frac{2}{3}, w=-5$. **31.** $y=5, y=-9$. **32.** $x=0, x=9$. **33.** $x=10, x=11$. **34.** $z=9, z=-9$. **35.** $z=-\frac{5}{2}, z=6$. **36.** $x=1, x=12$. **37.** Los números son $\frac{1}{3}$ y 3, o bien, -3 y $-\frac{1}{3}$. **38.** Los números son 4 y $\frac{1}{4}$. **39.** Los números son 2 o $\frac{1}{4}$. **40.** Los catetos miden 7 y 24, la hipotenusa mide 25. **41.** Los números son: 0, 5 y -5, o bien, 11, 60 y 61. **42.** La pelota permanece 6 segundos en el aire y alcanzó una altura de 44.1 m. **43.** El cuadrado de la hipotenusa es 74 unidades cuadradas. **44.** Los números enteros consecutivos son 0 y 1. **45.** Tarda 9 segundos en llegar al suelo.

Ejercicios de la página 210 (sección 7.8.1)

1. $(x+5)(x+2)$. **2.** $(y+4)(y-1)$. **3.** $(-3-w)(-5+w)$. **4.** $(z+7)^2$. **5.** $(y-3)(y-6)$. **6.** $(-x-9)(x-6)$. **7.** $(x-9)^2$. **8.** $(z-3)(z-7)$. **9.** $(z+11)(z-10)$. **10.** $(y-6)^2$. **11.** $(w-8)(w-9)$. **12.** $(x+3)(x-12)$. **13.** $(x+12)^2$. **14.** $(-t-5)(t-12)$. **15.** $(y+5)(y-6)$. **16.** $(z+11)(z+2)$. **17.** $5w(w+9)(w-7)$. **18.** $(-8-s)(-1+s)$. **19.** $(t+1)(t-3)$. **20.** $(z+8)(z+5)$. **21.** $-3x^3(x+4)(x-5)$. **22.** $(-3-y)(-10+y)$. **23.** $(-9-x)(-1+x)$. **24.** $(z+8)(z+6)$. **25.** $(w+4)(w-8)$. **26.** $(y+6)(y+4)$. **27.** $2t^2(t+9)(t+2)$. **28.** $(x+6)(x-5)$. **29.** $(-6-y)(y-12)$. **30.** $(w+1)(w-11)$. **31.** $(9+z)(5-z)$. **32.** $(x+8)(x+7)$. **33.** $12(y+3)(y-4)$. **34.** $(y+5)(y+1)$. **35.** $(z+6)(z-7)$. **36.** $(x+1)(13-x)$. **37.** $(x+4)(x+1)(x-1)^2$. **38.** $(y+8)(y-4)(y-1)(y-3)$. **39.** $(z+7)(z+3)(z^2+4z+12)$. **40.** $(w+5)(w-3)(w+4)(w-7)$. **41.** $x=-2, x=8$. **42.** $y=0, y=-5, y=9$. **43.** $z=0, z=-10, z=8$. **44.** $w=0, w=-9, w=-2$. **45.** $x=0, x=1, x=10$. **46.** $y=0, y=-8, y=-5$. **47.** $z=6, z=11$. **48.** $t=0, t=-7, t=2$. **49.** $x=0, x=-28$. **50.** Los lados del rectángulo miden 4 y 1 unidades. **51.** La base del sistema es 6. **52.** Entonces, el lado ℓ del rectángulo mide 7 unidades. **53.** Sus lados miden 9 y 5 cm. **54.** La base del sistema es 2. **55.** Los números son 6 y 8, o bien, -8 y -6. **56.** Los números son 5, 6, 7, o bien $-7, -6, -5$. **57.** Nicolás tiene 7 años. **58.** Los números son 6 y 3, o bien, 4 y 5. **59.** La base del sistema es 5. **60.** Había 5 competidores.

Ejercicios de la página 215 (sección 7.9.1)

1. $(x-2)^2$. **2.** $(y+13)^2$. **3.** No es un trinomio cuadrado. **4.** No es un trinomio cuadrado. **5.** $(z-5)^2$. **6.** No es un trinomio cuadrado. **7.** $(y+8)^2$. **8.** $(x+30)^2$. **9.** $(w-1)^2$. **10.** No es un trinomio cuadrado. **11.** No es un trinomio cuadrado. **12.** No es un trinomio cuadrado. **13.** No es un trinomio cuadrado. **14.** $(z+3)^2$. **15.** $(x-11)^2$. **16.** $(w-12)^2$. **17.** $(y-7)^2$. **18.** No es un trinomio cuadrado. **19.** $(a-9)^2$. **20.** No es un trinomio cuadrado. **21.** $(x-3)^2$. **22.** $(y+7)^2$. **23.** $(z-8)(z+8)$. **24.** $(12-z)(12+z)$. **25.** $(z+5)^2$. **26.** $(w-6)^2$. **27.** $(y+9)^2$. **28.** $(13-x)(13+x)$. **29.** $-(x-2)^2$. **30.** $(w-4)^2$. **31.** $(t-11)^2$. **32.** $(y-4)^2$. **33.** $(y-10)(y+10)$. **34.** $(x-20)^2$. **35.** $(w+15)^2$. **36.** $-(w+5)^2$. **37.** $(t-8)(t+8)$. **38.** $(z-1)^2$. **39.** $(8-z)^2$. **40.** $(y+10)^2$. **41.** $(7-x)(7+x)$. **42.** $(9-x)(9+x)$. **43.** $(w-7)(w+7)$. **44.** $-(y-13)^2$. **45.** $(a-2)^4$. **46.** $(y-8)(y+8)(y+1)^2$.

47. $(z-4)^2(z-3)^2$. **48.** $(w+5)^4$. **49.** $(c-5)(c+5)(c-3)(c+3)$. **50.** $(b+7)^2(b+9)^2$. **51.** $(x-3)(x-4)(x-1)^2$. **52.** $(b-a+3)(b+a-3)$. **53.** $(x-y+6)(x+y+6)$. **54.** $y=13, y=-13$. **55.** $z=0, z=2, z=-2$. **56.** $w=0, w=-12$. **57.** $w=8$. **58.** $x=0, x=26, x=-26$. **59.** $y=0, y=\frac{3}{5}$. **60.** $x=0, x=-20$. **61.** $y=0, y=5$. **62.** $t=0, t=14, t=-14$. **63.** El perímetro del triángulo rectángulo es: $6+8+10=24$ metros. **64.** Los números son: 3, 4 y 5, o bien, -3, -2 y -1. **65.** El radio del círculo mayor es 7 unidades. **66.** Los números son 30 y 31. **67. a)** La base es 3. **b)** La base es 6. **c)** La base es 12. **68.** Hubo 15 mujeres y 15 hombres.

Ejercicios de la página 222 (sección 7.10.3)

1. $(3x-1)(x-4)$. **2.** $(y+2)(4y-5)$. **3.** $(-2-3z)(-2+5z)$. **4.** $14w^2+33w-15$. **5.** $2(3t+2)(t-4)$. **6.** $(x+1)(5x-7)$. **7.** $(3y-8)^2$. **8.** $(-8-x)(-5+x)$. **9.** $(3w-2)(2w-5)$. **10.** $(z+3)(5z-1)$. **11.** $(-6-z)(-10+z)$. **12.** $(-1-y)(-1+7y)$. **13.** $(9x-2)(x-1)$. **14.** $(z-2)(z-4)$. **15.** $(2y+1)^2$. **16.** $-2(t+2)(2t+3)$. **17.** $2(5x+3)(3x-1)$. **18.** $(7w+1)(2w-3)$. **19.** $(2z-6)(2z+6)$. **20.** $(5w+4)(5w-1)$. **21.** $(x-1)^2$. **22.** $(5y+2)(3y-1)$. **23.** $-2(t+4)(3t+1)$. **24.** $(z+2)(5z-1)$. **25.** $(9z+4)^2$. **26.** $(w+6)(6w-1)$. **27.** $-2(2w+3)(2w+1)$. **28.** $(2w+1)(2w-5)$. **29.** $(3t+1)^2$. **30.** $(4y-3)^2$. **31.** $(-2-y)(-1+8y)$. **32.** $(z-7)(z-9)$. **33.** $(4x+7)(6x-5)$. **34.** $(6x-1)(3x-1)$. **35.** $(6y-7)^2$. **36.** $(-5x-1)(4x-3)$. **37.** $(8+2y)(3+y)$. **38.** $(2y+1)(y-9)$. **39.** $(2y-1)(4y-3)$. **40.** $(2w-3)(w-7)$. **41.** $(12-3t)(12+3t)$. **42.** $-(x+4)(x-10)$. **43.** $(4x-6)^2$. **44.** $(10y+5)^2$. **45.** No es un trinomio cuadrado perfecto. **46.** $(7-2y)^2$. **47.** $(9x-4)^2$. **48.** $(12y-3)^2$. **49.** No es un trinomio cuadrado perfecto. **50.** $(5w-3y)^2$. **51.** No es un trinomio cuadrado perfecto. **52.** $3x^2y(3x-4y)^2$. **53.** $-4b^4a^3(3a^2-5b^2)(3a^2+5b^2)$. **54.** $(6c-5d)^2$. **55.** $(5xz-7y)(5xz+7y)$. **56.** $xy(3x-y)^2$. **57.** $4(2x+3y)^2$. **58.** $6y^4(x^2-3y)(x^2+3y)$. **59.** $16c^4d^2(4c^4+d^2+4cd)$. **60.** $x=\frac{4}{3}, x=-\frac{4}{3}$. **61.** $z=-\frac{4}{3}, z=\frac{5}{9}$. **62.** $w=0, w=\frac{7}{6}, w=-\frac{7}{6}$. **63.** $x=-3, x=4$. **64.** $x=2, x=8$. **65.** $w=0, w=3, w=-3$. **66.** $y=0, y=\frac{1}{5}, y=-\frac{1}{5}$. **67.** $z=2, z=9$. **68.** $y=-9, y=4$. **69.** $x=0, x=\frac{7}{6}$. **70.** $x=1, x=-1, x=2, x=-2$. **71.** $y=0, y=\frac{6}{7}$. **72.** Los números son: 6, 8 y 10, o bien, -2, 0 y 2. **73.** Eran 3 primos. **74.** A los 2 segundos el dardo alcanza una altura de 19.6 m. A los 4 segundos el dardo vuelve a tocar el suelo. Tres segundos después de ser lanzado el dardo se encuentra a 14.7 metros. **75.** No tiene solución. **76.** Los números son 5 y 6, o bien, -6 y -5. **77.** El auto se encuentra a 36 metros del punto en el que empezó a desacelerar en 4 segundos y en 4.5 segundos. **78.** Tiene 5 hijos. A cada uno le tocó \$24. **79.** El número es 22. **80.** El radio del círculo pequeño es 1 y el del grande es 4 unidades, o el del pequeño es 5 y el del grande es 8 unidades. **81.** El número es 8 o 6. **82.** El auto recorre 96 metros en 8 segundos.

Ejercicios de la página 224 (sección 7.11.1)

1. $(y-10)^2$. **2.** $(z-9)(z+9)$. **3.** $(w+2)(w-4)$. **4.** x^2-26. **5.** $(y+4)(y-1)$. **6.** $(a+3)(2a-1)$. **7.** $(4z+3)^2$. **8.** $5x(x+5)$. **9.** $(y-1)(y-2)$. **10.** $(7w-2)^2$. **11.** $(a+7)(a+1)$. **12.** $(z+11)(z-3)$. **13.** $8z^3(z+2)^2$. **14.** $3x^4(x+14)$. **15.** $2y^2(y-3)(y+3)$. **16.** $6(2x-5z+3)(2x+5z-3)$. **17.** $(w+7-9z)(w+7+9z)$. **18.** $(6y-5x-3)(6y+5x+3)$. **19.** $6y^3(3y+1)(y-2)$. **20.** $(4r-3)(r-4)$. **21.** $2a^2(3a^4+28a^2-9)$. **22.** $(12a-2b-5)(12a+2b+5)$. **23.** $5z^3(z+5)(z-7)$. **24.** $4y(y^2+9)^2$. **25.** $(x-6-4y)(x-6+4y)$. **26.** $5x^2(x-2)(x+2)(x^2+3)$. **27.** $(y^2+49)(x-6)(x+6)$. **28.** $(w^2-8)^2$. **29.** $(3a-5)^2(3a+5)^2$. **30.** $-2a(a-11)^2$. **31.** $w(w-3)(w+3)(3w^2-1)$. **32.** $w=1, w=4$. **33.** $x=0, x=7, x=-7$. **34.** $y=0, y=-\frac{5}{2}, y=3$. **35.** $z=0, z=-3, z=3$. **36.** $x=-\frac{7}{3}$. **37.** $w=0, w=3$. **38.** $z=2, z=-2$. **39.** $y=\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2}$. **40.** $w=0, w=12$. **41.** $x=0, x=3, x=-3, x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}$. **42.** $y=0, y=2, y=-2$. **43.** $z=5, z=-5$. **44.** $x=-4, x=4$. **45.** $y=0, y=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$.

Ejercicios de la página 228 (sección 7.12.1)

1. $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. **2.** $(z^2-3z+5)(z^2+3z+5)$. **3.** $(w^2-2w+2)(w^2+2w+2)$. **4.** $(a-b)(a+b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$. **5.** $6y^2(y-2)(y^2+2y+4)$. **6.** $(y-3)(y^2+3y+9)$. **7.** $(z+1)(1-z+z^2)(1-z^3+z^6)$. **8.** $(x^2-9x+6)(x^2+9x+6)$. **9.** $(x-3)(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)$. **10.** $w^3(w-4)^3$. **11.** $(y-2)(y+2)(y^2+4)(y^4+16)$. **12.** $(w-2)(w+2)(w^2+2w+4)(w^2-2w+4)$. **13.** $(x-2)^3$. **14.** $(3x+5)^3$. **15.** $z(z+3)^3$. **16.** $(3a-8)^3$. **17.** $(4w+9)^3$. **18.** $(5r-4s)(25r^2+20rs+16s^2)$. **19.** $(x+7y+3)^2$. **20.** $(5x+3y+7)^2$. **21.** $8x^3-12x^2y^2+6xy^4+y^6$. **22.** $(6a-9b+5)^2$. **23.** $(a+6)^4$. **24.** $9x^2y^2(z+3)^2$. **25.** $(x+y+1)(x+y-1)$. **26.** $x^3(y+1)^3$. **27.** $(5y-4)^3$. **28.** $(x+y)^4$. **29.** $16z^4-8z^3+24z^2-8z+1$. **30.** $(w+4)(w^4+6w^3+16w^2+16w+16)$. **31.** $(r+t+s)^3$. **32.** $(x-y+z-w)^2$. **33.** El lado del segundo cubo mide 4 cm. **34.** La diferencia de los volúmenes de los cubos es 23,382 unidades cúbicas. **35.** El volumen de la esfera pequeña es $\frac{32}{3}\pi$ cm^3. **36.** Los números son 1 y 2, o bien, -2 y -1. **37.** Los números son 0 y 1, o bien, -1 y 0. **38.** Los números son 4 y 6. **39.** La base del sistema es 3. **40.** La base del sistema es 2.

Ejercicios de repaso de la página 229 (sección 7.13)

1. $25x^6+35x^3+10$. **2.** $100x^4-20x^2y-24y^2$. **3.** a^4-b^4. **4.** x^8-19x^4+70. **5.** $144x^6+216x^3+81$. **6.** $c^4-2c^2d^2+d^4$. **7.** $121x^2-22x+1$. **8.** $4x^4+12x^2-7$. **9.** $25x^8-y^4$. **10.** $4y^2$. **11.** $a^{11}-b^{11}$. **12.** w^6-z^6. **13.** $4x^3-27y^3+100z^3+4x^2y-26x^2z-17xy^2+156y^2z+35xz^2-255yz^2+26xyz$. **14.** $56a^3-288a^2b+9a^2+204ab^2+12ab+24ac-189b^3+4b^2+16bc+16c^2$. **15.** $(7x+3y)(5x-y+1)$. **16.** $b(5b-2)(b^2-5)$. **17.** $(y-11)^2$. **18.** $(4xy^2-5z^3)(4xy^2+5z^3)$. **19.** $a^4(3a-5)(3a+5)$. **20.** $(9w^2-8)(w+1)^2$. **21.** $64x^3-96x^2y+48xy^2+8y^3$. **22.** $64r^4+48r^2s^2+9y^4$. **23.** $\frac{1}{16}(6c-5)^2$. **24.** $\frac{1}{147}(49x+1)^2$. **25.** $4(3x+2y+5)^2$. **26.** $(a-6)(a+6)(a^2+36)$. **27.** $z=-2, z=7$. **28.** $y=8, y=9$. **29.** $w=13, w=-13$. **30.** $x=0, x=\frac{6}{7}, x=-\frac{6}{7}$. **31.** $y=-\frac{7}{6}$. **32.** $z=0, z=\frac{4}{3}$. **33.** $x=\frac{3}{2}, x=-\frac{3}{2}$. **34.** $w=0, w=-\frac{5}{2}, w=8$. **35.** $a=-3, a=3$. **36.** $b=3, b=-3$. **37.** $x=\frac{14}{5}$. **38.** $y=\frac{120}{53}$. **39.** $w=\frac{3}{8}$. **40.** $z=-\frac{61}{136}$. **41.** $x=-3$. **42.** $z=-\frac{25}{24}$. **43.** $a=-\frac{18}{7}$. **44.** $y=-\frac{37}{7}$. **45.** Los números son 6, 7 y 8, o bien, -3, -2 y -1. **46.** El valor de ℓ es 3. **47.** Los números son 5 y 7, o bien, -7 y -5. **48.** Los números son 10, 11 y 12, o bien, -1, 0 y 1. **49.** El largo mide 7 metros y el ancho es 5 metros. **50.** Si la hipotenusa mide 5 unidades, entonces los lados miden 4 y 3 unidades. **51.** Los números son -5 y 6, o bien, 5 y -6. No hay más, ya que cualquier otro número debería ser solución de la ecuación, la cual, por ser de segundo grado, solamente puede tener dos soluciones. **52.** La diagonal mide 10 cm. **53.** Los catetos miden 4 y 3 unidades. **54.** Hay dos números que cumplen 15 y -15. **55.** Los números son 6 y 7, o bien $-\frac{7}{3}$ y -18. **56.** Toca el suelo 2.5 segundos después de ser lanzando. **57.** Los números son 0, 1 y 2, o bien, 2, 3 y 4. **58.** Los números son 2 y 3, o bien, -3 y -2. **59.** Los números son 9 y 7. **60.** El ancho del rectángulo mide 3 metros y el largo 5 metros. **61.** Los números consecutivos son 2 y 3, o bien, -3 y -2. **62.** La base del sistema es 5. **63.** La distancia DC es 12. **64.** Los números son -3 y -5. **65.** Los números son 10, 12, 14 y 16.

Capítulo 8 Expresiones racionales

Ejercicios de la página 234 (sección 8.1.1)

1. $\frac{27}{25}$. **2.** No está definida. **3.** No está definida. **4.** $\frac{156}{107}$. **5.** $-\frac{19}{81}$. **6.** $-\frac{57}{25}$. **7.** No está definida. **8.** $\frac{15}{14}$. **9.** $\frac{1}{16}$. **10.** No está definida. **11.** $\frac{9}{16}$. **12.** 0. **13.** $\frac{2}{5}$. **14.** No está definida. **15.** No está definida. **16.** $-\frac{1}{9}$. **17.** $-\frac{65}{38}$. **18.** 0. **19.** No está definida. **20.** No está definida. **21.** $y=-5$. **22.** $-\frac{1}{3}$. **23.** $x=1$.

24. $x=\frac{4}{3}$. **25.** $w=8$. **26.** $z=-\frac{7}{4}$. **27.** $w=8, w=\frac{9}{4}$. **28.** $t=\frac{7}{2}, t=-7$. **29.** $y=\frac{5}{4}, y=-\frac{4}{5}$. **30.** $z=4, z=-4$. **31.** $w=2, w=7$. **32.** $x=1, x=5, x=-5$. **33.** $a=-3, a=5$. **34.** $x=1, x=12$. **35.** $w=-9, w=-7$. **36.** $b=-6, b=10$. **37.** $z=6$. **38.** $a=-4$. **39.** $z=-5, z=7$. **40.** $b=-10, b=5$. **41.** $x=12$. **42.** $t=-11, t=6$. **43.** $a=1, a=2$. **44.** $z=9, z=-9$. **45.** $w=\frac{5}{3}, w=-\frac{5}{3}$. **46.** $x=2, x=\frac{7}{2}$. **47.** $t=\frac{5}{3}$. **48.** $z=0, z=3, z=-3$. **49.** $w=0, w=-3, w=\frac{1}{7}$. **50.** $x=-9, x=-3$. **51.** $x=-\frac{4}{5}, x=3$. **52.** $z=1, z=\frac{4}{3}$. **53.** $a=0, a=2, a=-2$. **54.** $t=0, t=-6, t=4$. **55.** $t=0, t=-\frac{3}{2}, t=2, t=-2, t=\frac{3}{2}$. **56.** $x=5, x=-5$. **57.** $x=-1, x=4$. **58.** $z=-9, z=2$. **59.** $w=7, w=3$. **60.** $x=1$. **61.** $s=-4, s=10$. **62.** $r=-4$. **63.** $t=-3, t=5$. **64.** $x=\frac{22}{9}$. **65.** $z=-\frac{2}{7}$. **66.** Los ángulos miden 105° y 75°. **67.** El número es 7. **68.** Los ángulos miden 36° y 54°. **69.** El numerador es 7 y el denominador es 3. La fracción es $\frac{7}{3}$. **70.** Santiago iba a 85 km/h y Jerónimo iba a 65 km/h. **71.** Los números son 20 y 25. **72.** La velocidad de la lancha en aguas tranquilas es de 20 km/h. **73.** La cifra de las decenas es 4. El número es 45.

Ejercicios de la página 238 (sección 8.2.1)

1. 3. **2.** $\frac{1}{5}$. **3.** $\frac{4}{3}$. **4.** $\frac{1}{a-9}$. **5.** $\frac{3}{b+5}$. **6.** $\frac{w+1}{5w^2-2}$. **7.** $\frac{4t-9}{t+3}$. **8.** $\frac{3a-4}{4(3a-1)^2}$. **9.** $\frac{1}{3c+1}$. **10.** $\frac{z-1}{z+12}$. **11.** $\frac{x-5}{x+7}$. **12.** $\frac{z-3}{z-4}$. **13.** $\frac{z}{2(z+w)}$. **14.** $\frac{b+2c}{d+4}$. **15.** $\frac{a-8}{a-6}$. **16.** $\frac{x-2}{x+3}$. **17.** $\frac{x^2+3x-7}{x^2-2x-35}$. **18.** $\frac{w+8}{w+1}$. **19.** $\frac{a-3}{a+2}$. **20.** $\frac{x-4}{x+10}$. **21.** $\frac{c+8}{c+3}$. **22.** $\frac{r-6}{r+2}$. **23.** $\frac{u+11}{u+7}$. **24.** $\frac{s-5}{s-4}$. **25.** $\frac{2x+3}{3x+2}$. **26.** $\frac{5c-8}{2c-3}$. **27.** $\frac{w+6}{w+3}$. **28.** $\frac{6z-1}{2z-3}$. **29.** $\frac{2x+5}{x-2}$. **30.** $\frac{s-7}{3s+4}$. **31.** $\frac{2w(w+3)}{w-7}$. **32.** $\frac{z-9}{z+1}$. **33.** $\frac{x+8}{x-3}$. **34.** $x=6$. **35.** $z=-7$. **36.** $w=-4$. **37.** $t=6$. **38.** $x=-\frac{1}{3}$. **39.** $s=10$. **40.** $z=5$. **41.** $w=-3$. **42.** $x=3, x=-3$. **43.** El radio de la esfera es 9. **44.** El número es 36. **45.** Los números son 2 y 4, o bien, -1 y 1. **46.** La longitud de la arista es 2. **47.** La fracción es $\frac{1}{2}$, o bien, $\frac{4}{3}$.

Ejercicios de la página 240 (sección 8.3.1)

1. $\frac{x+5}{x+3}$. **2.** $\frac{a+3}{a-2}$. **3.** $\frac{w-1}{(w-7)^2}$. **4.** $\frac{(z-8)(4-z)}{(z+4)(z-2)(z+2)}$. **5.** $\frac{c+5}{c-6}$. **6.** $9x^2$. **7.** $\frac{s-7}{s(s-4)}$. **8.** $\frac{z+2}{z^2(z+3)}$. **9.** $\frac{(2x-5)(2x+5)(x+9)}{(x-2)(2x^2+14x-45)}$. **10.** $\frac{z+2}{z-5}$. **11.** $\frac{(w-4)(w-2)(w-5)}{(w^2-6w-8)(w-3)}$. **12.** $\frac{2x-3}{x}$. **13.** $\frac{(3c+7)(5c-6)}{(c-1)^2}$. **14.** 1. **15.** $\frac{16a^6}{49c^4}$. **16.** $\frac{2w^{25}z^{11}}{125x^7y^{16}}$. **17.** $\frac{7^9r^9s^{69}}{2^3 11^3}$. **18.** $\frac{x-7}{x+3}$. **19.** $\frac{(z-6)(z+5)}{(z-5)^2}$. **20.** $\frac{(w+4)^3}{(w-9)^3}$. **21.** $\frac{x-10}{x+5}$. **22.** $\frac{r^7(r-7)^7(r+7)^2(r+12)^5}{(r+1)^7(r-12)^2(3r-4)^5}$.

Ejercicios de la página 243 (sección 8.4.1)

1. $\frac{3}{25}$. **2.** 1. **3.** $\frac{x(x-1)}{x^2-2}$. **4.** $\frac{(a-5)(a+2)}{(a+5)(a-1)}$. **5.** $\frac{(4x-5)(x-8)^2}{(x+8)(2x+1)(4x+5)}$. **6.** $\frac{x^2+2xz-z^2}{x^2+z^2}$. **7.** $\frac{(w+2)(w+5)}{(w+6)(w+4)}$. **8.** $\frac{(z-2)^2}{(3z+2)(z+3)}$. **9.** $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$. **10.** $\frac{w-5}{w-2}$. **11.** $\frac{(z+5)(z+12)}{(z+4)(z-4)}$. **12.** $\frac{x-4}{x+4}$. **13.** $\frac{y+7}{y+6}$. **14.** $\frac{(r-3)(r+6)}{(r+2)(r+3)}$. **15.** $\frac{w-11}{w+10}$. **16.** $\frac{(z-6)(z^2+z+6)}{(z+4)(z-7)}$. **17.** $\frac{b+6}{b^2(b-8)}$. **18.** $\frac{c-9}{c+4}$. **19.** $\frac{r-10}{r-7}$. **20.** $\frac{(a+5)^2}{a-5}$. **21.** $\frac{c^2+4}{c}$. **22.** $\frac{1}{2z(z+2)}$. **23.** $\frac{w+9}{w-12}$. **24.** $\frac{(5w+3)(w+7)}{(w+3)(2w-5)}$. **25.** $\frac{a(a-3)^2}{(3a+1)(3a+2)}$. **26.** $\frac{(x-2)(x-5)^2(x+4)}{(x-3)^2}$. **27.** $\frac{(a-6)(a^2-6a+36)}{a^2+6a+36}$. **28.** $\frac{(w+8)(2w-5)(w-8)}{(w+3)(w^2-11w-40)}$. **29.** $\frac{(2z+5)(z-8)}{(z+10)(z+6)(z+4)}$. **30.** $\frac{3(c+8)(c+6)(c-3)}{(c+3)(c-2)}$.

Ejercicios de la página 245 (sección 8.5.1)

1. $\frac{3x-3}{x+7}$. **2.** $\frac{4z^2+8z-9}{6-z}$. **3.** $-\frac{7}{w-9}$. **4.** $a-2$. **5.** $\frac{-x^2-6x+9}{5x-1}$. **6.** $\frac{b^2-6b}{2b-9}$. **7.** $\frac{w^2}{w^2-16}$. **8.** $\frac{3c-5}{2}$. **9.** $\frac{b^2+b-2}{b-4}$. **10.** $4a-8$. **11.** $\frac{10x^2-2x+2}{5x+4}$. **12.** $\frac{z^2+2z-8}{2z-3}$. **13.** $\frac{w-4}{w+7}$. **14.** 1. **15.** $\frac{z+10}{z-5}$. **16.** $\frac{w-6}{2w-5}$. **17.** 1. **18.** $\frac{x+7}{x-6}$. **19.** $\frac{c^2-10c-9}{(c+3)(c-7)}$. **20.** $\frac{(a-2)^3}{(s+4)(2s+3)}$. **21.** $\frac{2s-5}{4s^2+10s+25}$. **22.** $\frac{(2x-3)^2}{4x^2+6x+9}$. **23.** $\frac{z^2+2z+17}{z^3+3z^2+3z+1}$. **24.** $\frac{2w}{(w+4)^2}$. **25.** $\frac{4a^2-6a+9}{2(8a^3-27)}$. **26.** $x=-2$. **27.** $z=2, z=-2$. **28.** $w=2, w=-2$. **29.** $x=1$. **30.** $z=0, z=\frac{3}{2}$. **31.** $a=-5$. **32.** $a=-3$. **33.** Los números son 55 y 15. **34.** Los catetos del triángulo miden 4 y 3 cm. La hipotenusa mide 5 cm. **35.** Los números son 6 y 8. **36.** Eran 4 personas. **37.** Los números son 147 y 26.

Ejercicios de la página 249 (sección 8.6.1)

1. $\frac{-x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)}$. **2.** $\frac{4a}{(a-1)(a+1)}$. **3.** $\frac{2r}{(r-3)(r+3)}$. **4.** $\frac{z^2-2z+15}{(z-3)(z+3)^2}$. **5.** $\frac{2x}{x+2}$. **6.** $\frac{w+1}{w+2}$. **7.** $\frac{(a-3)^2}{(a+5)^2}$. **8.** $\frac{-16c+14}{(c+7)(c-11)}$. **9.** $\frac{2z^2-10z-34}{(z-8)(z-6)}$. **10.** $\frac{-20r}{(r+1)(r-1)}$. **11.** $\frac{2w^3-6}{(w^2+3)(w^2-3)}$. **12.** $\frac{-6a-4}{(a+2)(a-2)^2}$. **13.** $\frac{-24x}{36x^2-1}$. **14.** $\frac{4}{x+2}$. **15.** $\frac{r^2-21r+49}{r^2-49}$. **16.** $\frac{z^3-z^2+24z}{z^2-64}$. **17.** 6. **18.** $\frac{-2y}{x-y}$. **19.** $\frac{w}{w^2-z^2}$. **20.** $\frac{b^2-6b+32}{(b-7)^2}$. **21.** $\frac{5c^3+24c^2-162c-81}{(c-9)(c+9)^2}$. **22.** $\frac{3a^3+17a^2-46a-48}{(a+7)(a-2)(a+4)(a-6)}$. **23.** 0. **24.** $\frac{-5a^2+9a+37}{(a+5)(a-4)(a-2)(a+3)}$. **25.** 0. **26.** $\frac{2}{(z+2)(z+1)}$. **27.** $\frac{2c^2+2c+48}{(c-5)(c-6)(c+7)}$. **28.** $\frac{6w^2+4w+48}{(4-w)(4+w)}$. **29.** $\frac{-7x+58}{(x+8)(x-4)(x-9)}$. **30.** $\frac{5x^2}{(2x+1)(x-5)(3x+1)}$. **31.** $\frac{(8z+1)(z-1)}{(3z+2)(2z+1)(z-4)}$. **32.** $\frac{6z^3-6z^2-15z+9}{2z(z+3)(7z+1)}$. **33.** $\frac{-2a^2-19a-12}{2(a+5)(2a-3)(a+6)(2a-1)}$. **34.** $w=4$. **35.** $z=10$. **36.** $z=8$. **37.** $x=8$. **38.** $x=6$. **39.** $w=\frac{8}{3}$. **40.** $x=\frac{3}{2}$. **41.** $c=15$. **42.** $a=-1$. **43.** $w=-\frac{15}{19}$. **44.** $z=\frac{12}{5}$. **45.** $r=4, r=-4$. **46.** $s=\frac{16}{5}, s=\frac{7}{2}$. **47.** $x=-6$. **48.** Los números son 8 y 24. **49.** Las resistencias tienen una capacidad de 15 y 10 ohms. **50.** Los números son $\frac{1}{4}$ y 1. **51.** Los números son $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$. **52.** Los números son 3 y 6. **53.** La bomba grande la vacía en 15 horas. **54.** Los números son 3 y 5. **55.** Los números son 3 y 5.

Ejercicios de la página 253 (sección 8.7.1)

1. $2a-3$. **2.** $5c^2-5c+10+\frac{(-15c+10)}{c^2+c-1}$. **3.** $-y^2-3y-1-\frac{7}{3-y}$. **4.** $x+11-\frac{12}{x+7}$. **5.** $3x^3+\frac{3}{2}x+\frac{\frac{9}{2}x^2}{6x^3-3x}$. **6.** $z^5-2z^4+4z^3-8z^2+16z-32$. **7.** $9w^4+3w^3+w^2+\frac{1}{3}w+\frac{1}{9}-\frac{17}{9(3w-1)}$. **8.** $x^3-3x^2+3x-3+\frac{3}{x+1}$. **9.** $a^3-5a^2+25a-125$. **10.** $2z+3+\frac{5}{2z+3}$. **11.** $2y-3+\frac{5}{5y-1}$. **12.** $-3w-2$. **13.** $7z^2+7z+7+\frac{-7z^2-14z-14}{z^3-z^2+2}$. **14.** $a-4+\frac{28}{a+4}$. **15.** $y^4-4y^3+16y^2-64y+256$. **16.** $-y-1$. **17.** $-a^2+a+1$. **18.** w^4-5. **19.** $2x^2-6x-2-\frac{12}{x-1}$. **20.** $w^4+w^3+w^2+w+1$. **21.** $3y-4$. **22.** $4b^3-3b^2+2b+1$. **23.** $2x^3+3x^2-2x+4$. **24.** $-4b^2+\frac{13}{3}b-\frac{25}{6}+\frac{-\frac{65}{3}b^2+\frac{185}{6}b-\frac{25}{2}}{-6b^3+5b-3}$. **25.** $4x^2+2x-3+\frac{5x-3}{3x^2-x+2}$. **26.** z^2-5z+6. **27.** z^3+4. **28.** $2w+\frac{5}{2}+\frac{-\frac{7}{2}w^2+\frac{5}{2}w+\frac{1}{2}}{4w^3-3w^2+w-1}$. **29.** $4x^2-x+3$. **30.** $2y^2-3y+5$. **31.** $2z^2+3z+1$. **32.** $2b^2-6b+8$. **33.** $2w^4-3w^3-6$. **34.** $y^6-8y+2-\frac{57}{7y^5+5y^3-4y-3}$. **35.** $2x^5+3x^3-7x^2-x+\frac{5x-7}{5x^4-8x^3+2x-1}$. **36.** $10w^5-7w^3+11w-3$. **37.** $3a^6-5a^4+2a^3+7a-\frac{1}{4}+\frac{3a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}}{8a^3+6a-3}$. **38.** $7b^7+8b^5-4b^4-b^2-1$. **39.** $10z^8-2z^5-11z^2+1$. **40.** $5x^7+8x^5-12x^4$.

Ejercicios de la página 256 (sección 8.8.1)

1. $x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4-\frac{2a^5}{x+a}$. **2.** $y-2z$. **3.** $z^3-bz^2+b^2z-b^3$. **4.** $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$. **5.** $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$. **6.** $c+5d$. **7.** $r^3+sr^2+s^2r+s^3$. **8.** $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$. **9.** $4w^6+5w^4z^2+\frac{25}{4}w^2z^4+\frac{125}{16}z^6+\frac{\frac{225}{16}z^8}{4w^2-5z^2}$. **10.** $4ab-5b^2-\frac{70ab^3}{9a^2-7ab}$. **11.** $2x-b$. **12.** $7w^3+\frac{21}{2}wz-9z^4-\frac{11}{2}z+\frac{\frac{33}{2}z^2w-\frac{33}{2}z^2}{2w^2-3z}$. **13.** $5a^2b^3+3a^3b^2+\frac{27}{4}a^4b+\frac{57}{16}a^5+\frac{\frac{51}{16}a^6b^3-\frac{1}{8}a^5(104+57a^2)b^2}{2a^2b^2-3ab^3+4b^4}$. **14.** $5a+b+c$. **15.** $x^2+2xy+4y^2$. **16.** $3c^2-2cd+d^2+\frac{2cd^3-2d^4}{5c^2+cd-3d^2}$. **17.** $5a^3+10a^2b+3ab^2$. **18.** $x^2+y^2+z^2+xz+xy+yz$. **19.** $36a^2+16b^2+c^2-24ab-6ac-4bc$. **20.** $5x^2y-7xy^4+10xy^2+20y^3-22y^5+\frac{-108xy^8+120xy^6-15y^9}{3x^2y^2-6xy^3}$. **21.** $15r^2+8s^2+22rs-\frac{2s^4}{6r^2+rs-2s^2}$. **22.** $m^2+3mn+9n^2$. **23.** $-18r^2s^5t^2+\frac{18r^2s^3t^2-18r^2s^2t^2}{1-s^4}$. **24.** $125x^3-76yx^2+15y^2x-y^3+\frac{-x^2y^4-5xy^5+2y^6}{x^3-y^3}$. **25.** $16m^3+8m^2n^2+n$. **26.** $-5ab^5-3a^3b^3+2a^5b$.

Ejercicios de la página 264 (sección 8.9.2)

1. $x^2+2x-7+\frac{11}{x+3}$. **2.** $3y-2-\frac{6}{y-2}$. **3.** $5z^2+2z-3$. **4.** $6w^3-6w^2+16w-16+\frac{23}{w+1}$. **5.** x^4-6x+8. **6.** $2y^3+5y^2-2y+6$. **7.** y^3+2y^2+4y+8. **8.** z^2-3z+9. **9.** $x-3$. **10.** $x-3$. **11.** $w^3+2w^2-3w-2-\frac{4}{w-8}$. **12.** x^3+x^2+x-6. **13.** $-z^5-4z^4-6z^3-10z^2-2z-8-\frac{32}{z-4}$.

14. $w^2+2w+4+\frac{16}{w-2}$. **15.** $4y^4-3+\frac{13}{y+2}$. **16.** a^3-a^2+a-1. **17.** $2x^3-3x^2-x-10-\frac{2}{x-7}$. **18.** y^3-4y^2+8y-3. **19.** $6z^4-2z^3-5z^2-4z-1-\frac{12}{z-5}$. **20.** $z^2-4z+16$. **21.** -102. **22.** 0. **23.** 469. **24.** -73. **25.** -12. **26.** 1500. **27.** -42. **28.** -66. **29.** Sí. **30.** Sí. **31.** No. **32.** No. **33.** Sí. **34.** No. **35.** Sí. **36.** No. **37.** $(x-1)(x+3)^2$. **38.** $(y-2)(y+2)(y-8)^2$. **39.** $z^4-18z+81$. **40.** $(a-6)(a+6)(a+8)$. **41.** $(w-3)(w+3)(w-7)^2$. **42.** $(x+7)(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. **43.** $(y-5)^2(y+1)^3$. **44.** $(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)(z^2+4)$. **45.** $(a-7)(a+1)(a^2+a+1)$. **46.** $(w-2)(w^2+2w+4)(w-3)^2$. **47.** Los números son 7, 8, 9 y 10. **48.** El hijo recibirá 48 pesos a la semana. **49.** La base es 4. **50.** Los números son -5, -4 y -3; o -1, 0 y 1; o 3, 4 y 5. **51.** No es posible encontrar dos números enteros consecutivos tales que su media armónica sea igual a 2. **52.** Tengo 3 hijos y sus edades son 2, 4 y 5 años. **53.** Los números son -2, -1 y 0. **54.** La base es 8. **55.** Las raíces son: 1, 2 y 3. El polinomio es $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$.

Ejercicios de la página 267 (sección 8.10.1)

1. $\frac{(2z-1)(z+1)}{z-1}$. **2.** $\frac{1}{w}$. **3.** 2. **4.** $\frac{2}{2+b}$. **5.** y. **6.** 2. **7.** $\frac{(a+4)(2a^2-34)}{(a-3)(2a^2-2a+41)}$. **8.** $\frac{4}{x-2}$. **9.** $-\frac{4b}{9}$. **10.** $\frac{17x+3}{11x+2}$. **11.** $\frac{z^3(z+3)}{z^4-z^3+4z^2-9}$. **12.** $\frac{6w^2-1}{w^2}$. **13.** $\frac{x+3}{3x+7}$. **14.** $\frac{7z-29}{2z-8}$. **15.** $\frac{6a-8}{2a-3}$. **16.** $\frac{c^2-2c-7}{c^2-3c-7}$. **17.** $\frac{w^2-2w+9}{w+3}$. **18.** 2. **19.** $\frac{w+5}{w-4}$. **20.** $x+4$. **21.** $\frac{z-11}{z+3}$. **22.** $\frac{(c+7)(c-5)}{c^2-4c+33}$. **23.** $\frac{2}{b}$. **24.** $\frac{4a^5}{2a^3-1}$. **25.** $x=-6$. **26.** $c=4, c=12$. **27.** $w=-3$. **28.** $z=0$. **29.** $b=\frac{1}{5}$. **30.** $a=-\frac{7}{2}$. **31.** $w=5$. **32.** $x=2, x=6$. **33.** $y=-\frac{7}{4}$. **34.** $z=9$. **35.** $c=\frac{1}{3}$. **36.** $s=-3$.

Ejercicios de la página 273 (sección 8.11.1)

1. $a\in(-\infty,0)\cup(\frac{7}{5},\infty)$. **2.** $b\in(1,\frac{10}{9})$. **3.** $c\in(-11,-3)$. **4.** $x\in(-\infty,2)\cup(\frac{5}{2},\infty)$. **5.** $z\in(-\infty,8)\cup[\frac{23}{2},\infty)$. **6.** $w\in(-\infty,\frac{49}{10})\cup(6,\infty)$. **7.** $a\in(-\infty,-1)$. **8.** $t\in(-5,3)$. **9.** $b\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$. **10.** $x\in(1,\frac{11}{4})$. **11.** $z\in(-\infty,-3)\cup(\frac{11}{5},\infty)$. **12.** $w\in[\frac{14}{5},9)$. **13.** $a\in(\frac{2}{5},\frac{7}{15})$. **14.** $b\in(-\frac{3}{7},\frac{2}{5})$. **15.** $c\in(-\infty,\frac{25}{12})\cup(\frac{8}{3},\infty)$. **16.** $z\in(\frac{5}{11},\frac{13}{3}]$. **17.** $x\in(-\infty,\frac{45}{22}]\cup(3,\infty)$. **18.** $w\in(-\frac{4}{3},18]$. **19.** $c\in(\frac{3}{2},\frac{31}{14}]\cup(\frac{7}{3},\infty)$. **20.** $z\in(-\infty,1)\cup(21,\infty)$. **21.** $z\in(-\infty,-1)\cup(\frac{3}{4},\infty)$.

Ejercicios de repaso de la página 273 (sección 8.12)

1. $a=-5, a=\frac{4}{3}$. **2.** $b=1, b=\frac{5}{4}$. **3.** $z=\frac{3}{2}, z=-\frac{3}{2}$. **4.** $x=-\frac{1}{3}$. **5.** $z=0, z=-2, z=\frac{7}{3}$. **6.** $c=0, c=3, c=-3$. **7.** $\frac{s+10}{(s-12)s^2}$. **8.** $7a^2b^2-5c^4$. **9.** $4x^3+9y^3$. **10.** $z^4-z^3w+z^2w^2-zw^3+w^4$. **11.** $(a-1)(a^2+1)(a^4+1)$. **12.** $b^4+b^3+b^2+b+1$. **13.** $\frac{(8x+3y)(2x-5y)}{(2x+5y)(8x-3y)}$. **14.** $\frac{z+10}{z-4}$. **15.** $\frac{w+1}{w-2}$. **16.** $\frac{2r^2+2r-28}{(r+5)(r-1)(r+1)}$. **17.** $\frac{(t-4)(t+3)}{2(2t+1)}$. **18.** $\frac{x-2}{x+1}$. **19.** $\frac{r+10}{r-5}$. **20.** $\frac{(s-3)(s-4)}{(s-1)(s+7)}$. **21.** $z=-\frac{8}{5}$. **22.** $w=5$. **23.** $x=-\frac{13}{3}, x=2$. **24.** $z=-8, z=6$. **25.** Los números son 6 y 8. **26.** Los enteros son 1, 2 y 3. **27.** Los números son 7 y $\frac{1}{7}$. **28.** Los números son 91 y 15. **29.** La velocidad de la lancha es de 60 km/h en aguas tranquilas. **30.** Los números son 4 y 6. **31.** Uno tarda 21 horas y el otro 28 horas. **32.** La base es 4. **33.** El precio por caja es \$42. **34.** El abuelo tiene 70 años. **35.** Una tiene una resistencia de 6 ohms y la otra 12 ohms. **36.** Tienen una resistencia de 120 ohms.

Capítulo 9 Radicales

Ejercicios de la página 286 (sección 9.1.4)

1. 0 1 2 3 4 5 **2.** 0 1 2 3 4 5 6 7 **3.** 0 1 2 3 4 **4.** 0 2 4 6 8 10 **5.** $6\sqrt{5}$. **6.** $7\sqrt{3}$.
7. $5\sqrt{6}$. **8.** $12\sqrt{2}$. **9.** $9\sqrt{7}$. **10.** $12\sqrt{5}$. **11.** $8\sqrt{2}$. **12.** 22. **13.** $3\sqrt{21}$. **14.** $10\sqrt{5}$. **15.** $12\sqrt{3}$. **16.** $\sqrt{19630}$. **17.** $60\sqrt{2}$. **18.** $64\sqrt{2}$. **19.** $189\sqrt{2}$. **20.** $40\sqrt{5}$. **21.** 30. **22.** 24. **23.** 60. **24.** 32. **25.** 30. **26.** 66. **27.** 42. **28.** 15. **29.** 40. **30.** 132. **31.** 840. **32.** 324. **33.** $\frac{4}{7}$. **34.** $\frac{5}{6}$. **35.** $\frac{9}{5}$. **36.** $\frac{7}{10}$. **37.** $\frac{13}{11}$. **38.** $\frac{11}{8}$. **39.** $\frac{3}{4}$. **40.** $\frac{6}{5}$. **41.** $\frac{1}{5}$. **42.** $\frac{4}{3}$. **43.** $\frac{5}{4}$. **44.** $\frac{9}{8}$. **45.** $8|a|c^2$. **46.** $|y+4|$. **47.** $|y-9|$. **48.** $11w^2|x^3|z^4$. **49.** $|w+\sqrt{2}|$. **50.** $|y+7|$. **51.** $|z-8|$. **52.** $|x-\sqrt{3}|$. **53.** $15a^2b^4c^6d^{16}$. **54.** $x=-\frac{5}{3}$. **55.** $s=\frac{1}{\sqrt{2}}, s=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **56.** $w=\frac{1}{9}$. **57.** $z=-\frac{7}{4}$. **58.** $y=-2$. **59.** $w=\sqrt{2}, w=-\sqrt{2}$. **60.** $5+2\sqrt{3}\sqrt{2}$. **61.** -4. **62.** $26-8\sqrt{10}$. **63.** $81y^2-18y\sqrt{6}+6$. **64.** $81z^2-18z\sqrt{5}+9z\sqrt{15}-2\sqrt{15}\sqrt{5}$. **65.** $4z+4\sqrt{z}\sqrt{11}+11$. **66.** $49w-112\sqrt{w}\sqrt{6}+384$. **67.** $2x-32$. **68.** $x-y-7$. **69.** El área del triángulo es de 24 cm^2. **70.** La longitud es 49 cm. **71.** Las longitudes de los lados son 7, $\sqrt{26}$ y $\sqrt{89}$.

Ejercicios de la página 292 (sección 9.2.1)

1. $9x^2$. **2.** $2a^2$. **3.** 2. **4.** $2a^2|b^3|$. **5.** $-a^2\sqrt[5]{10^4}$. **6.** $4x^2$. **7.** $\frac{6|b^3|}{5a^2}$. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{-2a^2}{b^5}$. **10.** $2b^2$. **11.** $|x^3|y^2$. **12.** $4b\sqrt[7]{2a^5b^3}$. **13.** $(6c+7)^9(d+1)^{27}$. **14.** $(0.1)|b^3|$. **15.** $4a^8b^2|c|\sqrt{c}$. **16.** $r^2s^{12}t^9$. **17.** $6a^2b$. **18.** $yz^2\sqrt{x}$. **19.** $\frac{3|x^3|}{2y^4}\sqrt{-\frac{3}{2y}}$. **20.** $\frac{|b^3|}{a^8c^6}$. **21.** xw^2z^5. **22.** $\left|(w^2-2)^3\right|\sqrt[3]{5z+3}$. **23.** $2\sqrt[8]{2}|a^3|c\sqrt{c}$. **24.** $x^4y^8\sqrt[5]{(5z)^4}$. **25.** El interés que pagaban era de 7.18%. **26.** La tasa de interés debe ser de 18.92%. La tasa de interés debe ser la misma. **27.** Se necesitan 24 meses para duplicar los $30,000. Se requiere el mismo tiempo para duplicar cualquier capital.

Ejercicios de la página 294 (sección 9.3.1)

1. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **3.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\sqrt{7}$. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **7.** $\frac{6}{5}$. **8.** $\frac{\sqrt{7}}{28}$. **9.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **10.** $\frac{\sqrt{51}}{6}$. **11.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{18}$. **13.** $\frac{-16-8\sqrt{7}}{3}$. **14.** $4-\sqrt{6}$. **15.** $\frac{-2\sqrt{3}-10}{11}$. **16.** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$. **17.** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$. **18.** $-8\sqrt{2}+8\sqrt{3}$. **19.** $\frac{8\sqrt{3}-4}{11}$. **20.** $\frac{-11+9\sqrt{2}}{41}$. **21.** $8-3\sqrt{7}$. **22.** $\frac{-\sqrt{10}-2\sqrt{15}+9\sqrt{6}+9}{71}$. **23.** $\frac{22+\sqrt{11}+2\sqrt{33}+\sqrt{3}}{86}$. **24.** $\frac{-12\sqrt{3}+6\sqrt{6}-16\sqrt{2}-32}{37}$. **25.** $1+\frac{\sqrt{5}-x}{5-x^2}$. **26.** $(z-7)\sqrt{z+7}$. **27.** $\frac{10+6\sqrt{w+1}+w}{8-w}$. **28.** $\frac{\sqrt{b^2-4}}{b-2}$. **29.** $\frac{a+2\sqrt{3a}+3}{a-3}$. **30.** $-2x+2\sqrt{x^2+x}-1$. **31.** $11-\sqrt{t}$. **32.** $\frac{(3z-5)(\sqrt{8z}+5\sqrt{z+1})}{-17z-25}$. **33.** $\frac{(3x+1)(\sqrt{5x}-6\sqrt{x})}{-31x}$. **34.** $\sqrt{4w-1}+\sqrt{w+3}$. **35.** $\frac{(16z^2-81)(\sqrt{6z^2+7}-\sqrt{2-2z^2})}{8z^2+5}$. **36.** $\frac{-s-\sqrt{s^2-64}}{8}$. **37.** $\frac{(y-4)^2(\sqrt{3y^2-8y+16}+\sqrt{2y^2+2y-9})}{(y-5)^2}$.

Ejercicios de la página 297 (sección 9.4.1)

1. $5\sqrt[3]{4}$. **2.** $2\sqrt[4]{3}$. **3.** $2\sqrt[5]{3}$. **4.** $4\sqrt[4]{3}$. **5.** $2\sqrt[3]{36}$. **6.** $5\sqrt[5]{3^4}$. **7.** $13\sqrt[6]{2^5}$. **8.** $9\sqrt[4]{5^3}$. **9.** $\frac{3}{2}\sqrt{6}$. **10.** $\sqrt{6}$. **11.** $-\frac{5}{6}\sqrt{3}-\frac{5}{2}$. **12.** $\frac{-57+12\sqrt{15}}{33}$. **13.** $\sqrt{8}-\sqrt{11}$. **14.** $\frac{x+4\sqrt{x}}{x-16}$. **15.** $-(w+1)(7+\sqrt{w+19})$. **16.** $\sqrt{z+5}-6$. **17.** $|c|\sqrt{5ab}$. **18.** $4x^3y^4z^7$. **19.** $2\sqrt{3c^3d^2|e|}$. **20.** $2c^4d^8\sqrt[3]{c}$. **21.** $(x+6)(\sqrt{x}+\sqrt{8})$. **22.** $(z+1)(z+\sqrt{3})$. **23.** $\frac{(\sqrt{x+6}+2)(\sqrt{x-6}+2)}{x-10}$. **24.** $\sqrt{a-5}-\sqrt{b-5}$. **25.** $(w-7)(\sqrt{w}-\sqrt{7})$. **26.** $\sqrt{x+8}+\sqrt{x-4}$.

27. $xz\sqrt[3]{xy^2z^2}$. **28.** $2c^4d^3\sqrt[3]{(a+b)^2}$. **29.** $\frac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{x-27}$. **30.** $25+5\sqrt[3]{a-6}+\sqrt[3]{(a-6)^2}$. **31.** $\sqrt[3]{w^2}-2\sqrt[3]{w}+4$.
32. $\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{8}$. **33.** $-\left(\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{9}\right)$ **34.** $\frac{(a^4-36)\left(\sqrt[3]{a^6}+\sqrt[3]{6}\right)}{a^6+6}$.

Ejercicios de la página 303 (sección 9.5.1)

1. $\sqrt[24]{a^2+1}$. **2.** $\sqrt[9]{b^2}$. **3.** $9(a+b)^2$. **4.** $\frac{1}{2a^4|c^7|}$. **5.** $\frac{1}{81\sqrt[4]{3^3}\,x^2}$. **6.** $16|y^5|$. **7.** $\frac{a^3}{b^{\frac{9}{25}}}$. **8.** $a^{\frac{1}{2}}|b^3|c^{\frac{16}{3}}$. **9.** $\frac{|c|}{3e^{\frac{1}{5}}d^{\frac{3}{2}}}$. **10.** $\frac{13^5}{2^5a^4|c^{15}|b^{\frac{1}{4}}}$.
11. $\frac{z^2}{x^4}$. **12.** $\frac{3^4}{7}a^{\frac{7}{6}}|b^3c|$. **13.** rs^2. **14.** $4a^2b^2|c^3|$. **15.** $3x^3y^3z^2\sqrt[5]{z}$. **16.** $\sqrt[3]{2}a^3b^2c^5$. **17.** $2(a-3)$.
18. $|x-3|\sqrt{x^2-25}$. **19.** $x^2|y^3|\sqrt[4]{z}$. **20.** $4|c^5|d^4e^2$. **21.** $\sqrt{x-\sqrt{2}}$.

Ejercicios de la página 308 (sección 9.6.1)

1. $z=2$. **2.** $x=512$. **3.** $w=16$. **4.** $x=0, x=8$. **5.** $x=2\sqrt{21}, x=-2\sqrt{21}$. **6.** $y=-235$.
7. $z=\frac{1}{\sqrt{5}}, z=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **8.** $a=\frac{62}{3}$. **9.** $x=4$. **10.** $x=6$. **11.** $x=-\frac{65}{3}$. **12.** $x=4$. **13.** $x=16$.
14. $y=\sqrt[3]{-\frac{9}{5}}$. **15.** $x=\frac{452}{3}$. **16.** $z=\frac{1}{9}$. **17.** $w=64$. **18.** No tiene solución. **19.** $t=\sqrt{14}, t=-\sqrt{14}$.
20. $a=6$. **21.** $y=2$. **22.** $w=11$. **23.** $x=5$. **24.** $y=36$. **25.** $z=25$. **26.** $t=2$. **27.** $b=3, b=-3$.
28. $z=9$. **29.** $w=-7, w=\frac{1}{2}$. **30.** $x=7$. **31.** $t=0, t=-2, t=8$. **32.** $r=-\frac{7}{5}, r=\frac{1}{4}$.

33. $y=\frac{9}{5}, y=-\frac{9}{5}$. **34.**

Planeta	Distancia	Periodo
	a	t
Mercurio	0.387	0.24
Venus	0.723	0.61
Tierra	1	1
Marte	1.52	1.88
Júpiter	5.2	11.86
Saturno	9.54	29.47
Urano	19.18	84
Neptuno	30.06	164.81

35. La distancia media de Halley al Sol es de 17.94 U.A.

36. El otro cateto mide 12 cm. **37.** El perímetro mide 17.73 metros. **38.** El área de la esfera mide 4.836 m^2. **39.** El área lateral del cilindro es de 5.0133 m^2. **40.** La altura del triángulo es de 4 cm. **41.** El apotema del hexágono mide $\sqrt{27}\approx 5.1962$ cm. **42.** El radio del cono es 1.9544 metros. **43.** El perímetro del triángulo es $8\sqrt{3}\approx 13.856$ cm. **44.** La longitud de los lados de la pirámide de Keops es de 237 m. **45.** El largo mide 30 metros, el ancho mide 5 metros y la altura mide 1 metro. **46.** El número mayor es 19.

Ejercicios de la página 314 (sección 9.9.1)

1. $2\sqrt{3}+5+i(7+\sqrt{2})$. **2.** 0. **3.** $9i$. **4.** $12+5i$. **5.** $17+6i$. **6.** $-7+17i$. **7.** 24. **8.** $14i$. **9.** $-2-4i$.
10. $16+19i$. **11.** $-20+24i$. **12.** $11-2\sqrt{2}i$. **13.** $12-i\sqrt{3}$. **14.** $10\sqrt{3}$. **15.** $-13+4i$. **16.** $8-38i$. **17.** $-1+7i$.
18. $52-131i$. **19.** $-40+198i$. **20.** 16. **21.** $44-20\sqrt{2}i$. **22.** $-\frac{21}{4}+\frac{159}{8}i$. **23.** $-\frac{169}{36}+\frac{43}{12}i$. **24.** $108+124i$.
25. $34-188i$. **26.** $-34+155i$. **27.** $105-233i$. **28.** 169. **29.** $85-132i$. **30.** $\mathrm{Re}(2-10i)=2$, $\mathrm{Im}(2-10i)=-10$. **31.** -10. **32.** $\mathrm{Re}(33+26i)=33, \mathrm{Im}(33+26i)=26$. **33.** $\mathrm{Re}(-71+11i)=-71$, $\mathrm{Im}(-71+11i)=11$. **34.** $\mathrm{Re}(156-156i)=156, \mathrm{Im}(156-156i)=-156$. **35.** $\mathrm{Re}\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\frac{9}{4}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}i\right)=-\frac{3}{4}$. **36.** $\mathrm{Re}\left(\frac{37}{7}+\frac{27}{14}i\right)=\frac{37}{7}, \mathrm{Im}\left(\frac{37}{7}+\frac{27}{14}i\right)=\frac{27}{14}$. **37.** $\mathrm{Re}\left(\sqrt{30}+2-i\sqrt{20}+i\sqrt{6}\right)=\sqrt{30}+2$, $\mathrm{Im}\left(\sqrt{30}+2-i\sqrt{20}+i\sqrt{6}\right)=-2\sqrt{5}+\sqrt{6}$. **38.** $\mathrm{Re}(87)=87, \mathrm{Im}(87)=0$. **39.** $\mathrm{Re}\left(\frac{3135}{64}-\frac{7}{4}i\right)=\frac{3135}{64}, \mathrm{Im}\left(\frac{3135}{64}-\frac{7}{4}i\right)=-\frac{7}{4}$.

40. $\operatorname{Re}\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{6}{5}, \operatorname{Im}\left(\frac{6}{5}\right)=0$. **41.** $\operatorname{Re}(269)=269, \operatorname{Im}(269)=0$. **42.** $\operatorname{Re}(-42)=-42,\ \operatorname{Im}(-42)=0$, **43.** $\operatorname{Im}(ia-b)=a$, $\operatorname{Re}(a+bi)=a$. **44.** $\operatorname{Re}(3-i)\operatorname{Re}\left(5+\sqrt{2}i\right)=15, \operatorname{Re}(3-i)\left(5+\sqrt{2}i\right)=15+\sqrt{2}$. **45. a)** $6i$. **b)** $-\sqrt{\pi}i$. **c)** $\sqrt{x^2+1}i$.

Ejercicios de repaso de la página 315 (sección 9.10)

1. 30. **2.** $12\sqrt{11}$. **3.** $28\sqrt{6}$. **4.** 105. **5.** 240. **6.** 42. **7.** $\left|x+2\sqrt{3}\right|$. **8.** $16\sqrt{x^{10}y^6z^{14}}$. **9.** $\left|5x-5\sqrt{2}\right|$. **10.** $\frac{x^3z^5}{y^3}$. **11.** $\frac{a^2\left|b^7\right|}{c^6}$. **12.** $u^4v^3w^6$. **13.** $\frac{6\left(5-\sqrt{2}\right)}{23}$. **14.** $\frac{\sqrt{16b^2-25}}{4b-5}$. **15.** $(6x+9)\sqrt{6x-9}$. **16.** $\sqrt{7}-\sqrt{5}$. **17.** $-\sqrt{(5a+2)}-\sqrt{(9a+6)}$. **18.** $(8y-2)\left(\sqrt{10y+8}-\sqrt{2y+6}\right)$. **19.** $x=-2$. **20.** $a=6$. **21.** $x=12$. **22.** $z=5$. **23.** $a=-3$. **24.** $b=15$. **25.** El número es 25. **26.** Los números son 8 y 10. **27.** El número es 25. **28.** Hay 17 metros entre el extremo del poste y el punto final de la sombra. **29.** Las longitudes de los lados del triángulo son 10, 8 y 6.

Capítulo 10 Ecuación general de segundo grado

Ejercicios de la página 321 (sección 10.1.1)

1. $y=2, y=-18$. **2.** $x=-1, x=9$. **3.** $z=-7, z=5$. **4.** $w=1, w=4$. **5.** $y=-2, y=12$. **6.** $a=-3+\sqrt{43}, a=-3-\sqrt{43}$. **7.** $z=-\frac{1}{10}+\sqrt{\frac{3}{50}}, z=-\frac{1}{10}-\sqrt{\frac{3}{50}}$. **8.** $w=1, w=-\frac{2}{3}$. **9.** $x=-\frac{1}{4}+\sqrt{2}, x=-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$. **10.** $y=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}, y=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}$. **11.** $w=\frac{1}{2}, w=\frac{7}{2}$. **12.** $x=-9$. **13.** $a=\frac{5}{3}, a=-1$. **14.** $x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{10}, x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{10}$. **15.** $a=1+\frac{1}{\sqrt{5}}, a=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **16.** $z=13, z=1$. **17.** $s=1, s=-\frac{1}{4}$. **18.** $y=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{2}$. **19.** $z=3+\sqrt{2}, z=\sqrt{2}-3$. **20.** $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$. **21.** $w=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}, w=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **22.** $x=\sqrt{7}+\frac{4}{\sqrt{3}}, x=\sqrt{7}-\frac{4}{\sqrt{3}}$. **23.** $a=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}, a=-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **24.** $z=\sqrt{8}+\frac{8}{\sqrt{7}}$, $z=\sqrt{8}-\frac{8}{\sqrt{7}}$. **25.** No tiene solución. **26.** $s=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, s=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. **27.** $z=12$. **28.** $z=-\frac{1}{3}, z=-2$. **29.** $x=\frac{4}{3}$. **30.** $w=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{13}, w=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{13}$. **31.** $a=1, a=17$. **32.** $x=-9, x=4$. **33.** No tiene solución. **34.** $w=-\frac{26}{17}$, $w=3$. **35.** $y=-\frac{1}{2}, y=1$. **36.** $x=-1$. **37.** El número es 5 o -4. **38.** La cartulina original tenía 14 cm de lado. **39.** La base es 8. **40.** El largo debe disminuir 4 m y el ancho debe aumentar 3 m. La fuente tendrá 12 m de lado. **41.** La roca tarda 5 segundos en caer. **42.** Los números buscados son 10 y 12, o bien, -12 y -10. **43.** Los números son 30 y 32. **44.** El número es 18 o 12. **45.** Los números son 6 y 36. **46.** Los catetos miden 36 y 77 cm. **47.** El número es 9. **48.** El número es 144 y su raíz cuadrada es 12. **49.** El número es 24. **50.** Los números son 6 y 8.

Ejercicios de la página 331 (sección 10.2.3)

1. $x=8, x=-12$. **2.** $y=1, y=\frac{1}{2}$. **3.** $z=\sqrt{6}, z=-\sqrt{6}$. **4.** $w=7$. **5.** No tiene solución. **6.** $x=1, x=\frac{4}{5}$. **7.** $y=5$. **8.** $w=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, w=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **9.** $y=\frac{3}{2}, y=-\frac{4}{5}$. **10.** $z=-\frac{1}{2}, z=-\frac{2}{3}$. **11.** $x=1, x=\frac{6}{7}$. **12.** $a=-1, a=-\frac{7}{3}$. **13.** $x=-\frac{3}{2}$. **14.** No tiene solución. **15.** No tiene solución. **16.** $w=-\frac{3}{4}, w=-\frac{6}{7}$. **17.** $x=\frac{57+\sqrt{1329}}{24}, x=\frac{57-\sqrt{1329}}{24}$. **18.** $y=\frac{4}{5}$. **19.** No tiene solución. **20.** $w=5, w=8$. **21.** $s=-\frac{28}{11}, s=12$. **22.** $z=5, z=-\frac{17}{4}$. **23.** $a=-\frac{11}{7}, a=5$. **24.** $x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2-16\sqrt{2}}}{2}, x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2-16\sqrt{2}}}{2}$. **25.** $y=\frac{5}{9}, y=-2$. **26.** $w=\frac{3}{8}, w=-\frac{11}{5}$. **27.** $z=-\sqrt{3}$. **28.** $x=4, x=-\frac{25}{2}$. **29.** $a=6, a=-\frac{57}{11}$. **30.** $w=12, w=\frac{54}{11}$. **31.** $w=\sqrt{5}, w=-\sqrt{5}$. **32.** $y=\frac{7}{9}, y=-\frac{9}{7}$. **33.** $x=\frac{\sqrt{6}}{8}, x=-\frac{\sqrt{6}}{5}$. **34.** $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}, z=-\sqrt{3}$. **35.** $a=\frac{7}{10}, a=-\frac{11}{9}$. **36.** $y=-\frac{1}{15}, y=\frac{3}{4}$. **37.** No tiene solución. **38.** $x=\frac{-177+\sqrt{17889}}{96}$, $x=\frac{-177-\sqrt{17889}}{96}$. **39.** $y=\frac{21+\sqrt{15}}{6}, y=\frac{21-\sqrt{15}}{6}$. **40.** El número mayor es 11. **41.** Los números son 6 y -8. **42.** Tiene 32 nietos. Su edad es 96 años. **43.** Inicialmente eran 20 alumnos. **44.** La base es 3. **45.** El número es 4. **46.** La base es 5. **47.** Los números son 10 y 11. **48.** Son 20 alumnos. **49.** El primer día eran 8 personas y el segundo 12. **50.** El número es 8, o bien, $-\frac{39}{2}$. **51.** Armando tiene 7 hijos. **52.** Los enteros son 4 y 5. **53.** El área del cuadrado es $48+32\sqrt{2}$ unidades cuadradas. **54.** Compró 20 pencas.

Ejercicios de la página 337 (sección 10.3.3)

1. Los catetos miden 6 y 8 metros. **2.** Los catetos miden 33 y 56 unidades. La hipotenusa mide 65 unidades. **3.** Los lados miden 144 metros, 17 metros y la hipotenusa 145 metros. El área es 1224 m^2. **4.** El proyectil nunca alcanza una altura de 49 metros. El proyectil toca el suelo 3 segundos después de ser lanzando. **5.** Hay dos puntos que satisfacen. Uno está aproximadamente a 7.38 metros de A y a 4.62 metros de B. El otro está sobre la prolongación de la recta en la dirección AB a 32 metros de A y 20 de B.

Ejercicios de la página 344 (sección 10.4.1)

1. No tiene solución. **2.** $w \in \mathbb{R}$. **3.** $b \in \mathbb{R}$. **4.** $y \in \mathbb{R}$. **5.** $a \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$. **6.** $w \in (-1,4)$. **7.** $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$. **8.** $a \in (-\infty,3) \cup (5,\infty)$. **9.** $y \in \left(-\infty,\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\infty\right)$. **10.** No tiene solución. **11.** $w \in [-11,1]$. **12.** $x \in (-4,-3)$. **13.** $y \in (-4,4)$. **14.** $z \in [-10,-2]$. **15.** No tiene solución. **16.** $y \in (-\infty,-5] \cup [8,\infty)$. **17.** No tiene solución. **18.** $w \in (-9,-2)$. **19.** $w \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$. **20.** No tiene solución. **21.** $z \in (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$. **22.** $r \in \left[-1-2\sqrt{3},-1+2\sqrt{3}\right]$. **23.** $t \in \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{2},\infty\right)$. **24.** $z \in \left(-\infty,\frac{-5-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{33}}{4},\infty\right)$. **25.** $x \in (-\infty,-1) \cup (1,4]$. **26.** $w \in [-7,-2) \cup (-2,5]$. **27.** $x \in (-\infty,-5)$. **28.** $x \in (-9,-5) \cup (-2,6)$. **29.** $x \in \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \cup (6,\infty)$. **30.** $x \in \left(-2,-\frac{1}{2}\right) \cup (4,9)$. **31.** $x \in \left(-\infty,-\frac{4}{3}\right) \cup \left(-1,\frac{5}{8}\right) \cup (2,\infty)$. **32.** $x \in \left[-\frac{1}{5},2\right) \cup [4,5)$. **33.** $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{6}{5}\right)$. **34.** $t \in \left(-\infty,1-\sqrt{5}\right) \cup \left(1+\sqrt{5},\infty\right)$. **35.** $x \in \left(-10,-5-\sqrt{5}\right) \cup \left(-5+\sqrt{5},2\right)$. **36.** $z \in \left(-\infty,1+\sqrt{3}\right] \cup \left[2+\sqrt{2},\infty\right)$. **37.** $z \in \left(-\frac{4}{5},\infty\right)$. **38.** $s \in \left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$. **39.** $w \in \left(-3-\sqrt{6},-2\right)$. **40.** Rosita tiene 15 años o más. **41.** El número debe estar en $\left(-\infty,3-\sqrt{10}\right) \cup \left(0,\sqrt{10}+3\right)$. **42.** La marialuisa puede tener a lo más 3.5 cm de ancho. **43.** El radio del círculo pequeño debe ser $0 \le r < 3$.

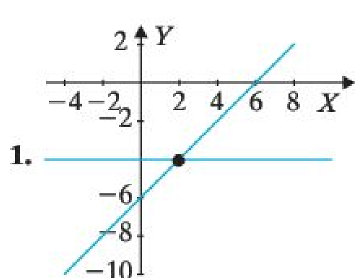
Ejercicios de repaso de la página 345 (sección 10.5)

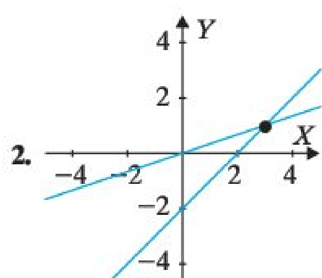
1. $y=11, y=-11$. **2.** $y=4, y=-4$. **3.** $x=-3$. **4.** $z=-\frac{3}{2}, z=1$. **5.** $n=1, n=-\frac{9}{8}$. **6.** $y=\frac{7}{3}, \quad y=-\frac{9}{2}$. **7.** $w=-\frac{3}{2}$, $w=-\frac{11}{5}$. **8.** No tiene solución. **9.** $x=-1+\frac{\sqrt{7}}{3}, x=-1-\frac{\sqrt{7}}{3}$. **10.** $y=-7, y=2$. **11.** $z=8, z=-8$. **12.** $t=36, t=6$. **13.** $r=10, r=-\frac{1}{5}$. **14.** $z=\frac{13}{4}, z=1$. **15.** $x=15, x=-15$. **16.** $y=\frac{-6+2\sqrt{19}}{5}, y=\frac{-6-2\sqrt{19}}{5}$. **17.** $a=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{31}{12}}, a=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{31}{12}}$. **18.** No tiene solución. **19.** $w=\frac{5}{2}, w=-\frac{5}{2}$. **20.** $y=4, y=-4$. **21.** $y=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2}$. **22.** $w=6$. **23.** $x=0, x=\frac{29}{44}$. **24.** $x=2,\ x=-2$. **25.** $y \in (-\infty,-5] \cup [8,\infty)$. **26.** $y \in \left(\frac{16+4\sqrt{21}}{5},20\right)$. **27.** $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$. **28.** $x \in (-9,-2)$. **29.** $z \in \left[4+\sqrt{31},15\right]$. **30.** $x \in \left(-\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right)$. **31.** $w \in (-\infty,-7) \cup (1,\infty)$. **32.** $z \in (1,11) \cup \left(-16-\sqrt{267},-16+\sqrt{267}\right)$. **33.** $x \in (-2,\infty) \cup (-4,-3)$. **34.** $x \in (-6,\infty)$. **35.** $s \in \left(-\infty,\frac{2}{9}\right) \cup (2,\infty)$. **36.** $z \in \left(-\infty,\frac{23-\sqrt{397}}{6}\right) \cup \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2},7\right) \cup \left(7,\frac{23+\sqrt{397}}{6}\right)$. **37.** El número es 15 o -16. **38.** Se necesitan 100 metros de alambre. **39.** El otro número es 7, o bien, -7. **40.** Los números son 6 y 8. **41.** El diámetro del círculo grande es 96 unidades. **42.** La base mide 4 cm. **43.** El lado mide 4 metros. **44.** Los números son 0 y 1, o bien, -1 y 0. **45.** Los números son 5 y 15. **46.** Los números son 5 y 8. **47.** Los lados del rectángulo miden 15 y 10 metros. **48.** Compró 12 nardos a \$0.50 cada uno. **49.** Ancho: 28 metros; largo: 84 metros. **50.** El largo mide 25 metros y el ancho 15 metros. **51.** El perímetro es $16\sqrt{2}$ cm. **52.** Deberá hacer a lo más 4 aumentos. **53.** Las soluciones son: $x=5, x=1$.

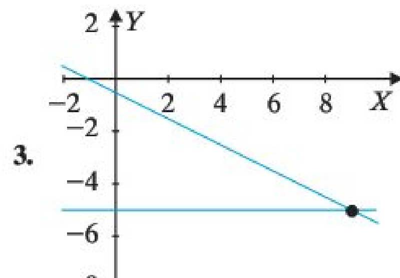
Como respuesta puedo decir
que toda mi vida te he de extrañar
y que si tuviera 5 vidas, en todas
te voy a añorar.

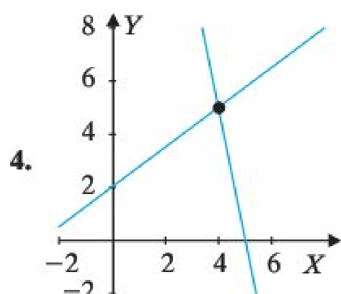
Capítulo 11 Sistemas de ecuaciones

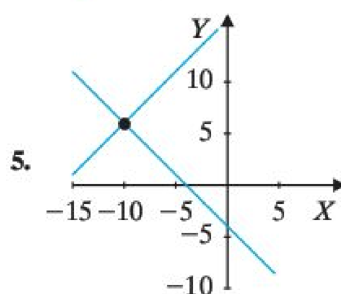
Ejercicios de la página 350 (sección 11.2)

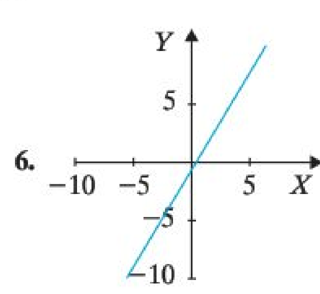
1.


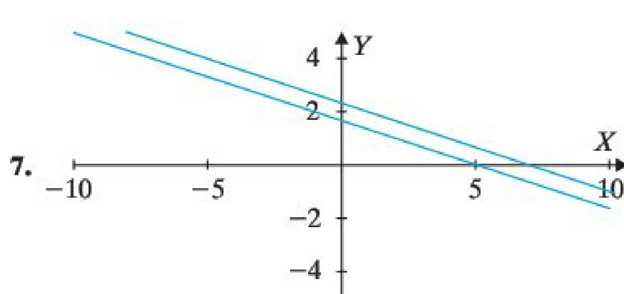
2.


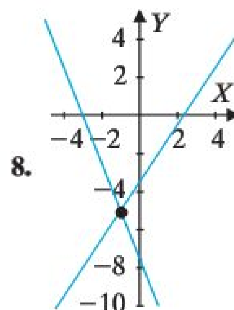
3.


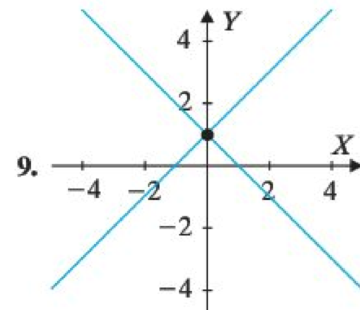
4.


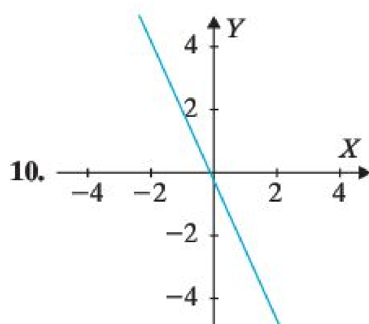
5.


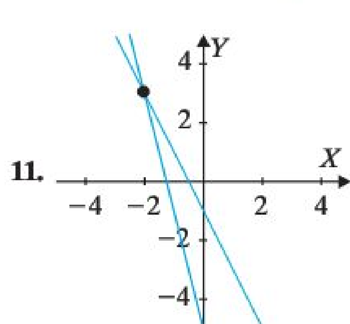
6.


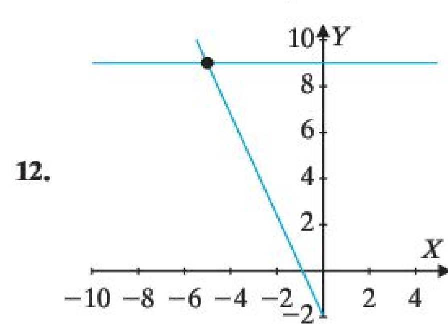
7.


8.


9.


10.


11.


12.


Ejercicios de la página 353 (sección 11.2.1)

1. $x = -\frac{13}{2}, y = -43$. **2.** $a = \frac{1}{5}, y = \frac{7}{5}$. **3.** No tiene solución. **4.** $w = -3, z = -5$. **5.** $r = 8, s = 5$. **6.** No tiene solución. **7.** $c = 42, d = 0$. **8.** $a = -11, b = 5$. **9.** $z = \frac{5w-19}{8}$. **10.** No tiene solución. **11.** $a = -5, b = -\frac{19}{2}$. **12.** $x = -9, y = 7$. **13.** No tiene solución. **14.** $w = 6, z = 3$. **15.** w arbitrario, $z = \frac{3w-7}{4}$. **16.** $c = 4, d = 1$. **17.** $a = 4, b = 3$. **18.** $s = 12, r = 3$.

19. $t=12, w=3$. **20.** $w=1, z=-5$. **21.** $a=4, b=7$. **22.** $a=-\frac{11}{18}, b=\frac{19}{12}$. **23.** $w=-4, z=-3$. **24.** $x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{2}$. **25.** $r=\frac{3}{4}$, $s=\frac{6}{5}$. **26.** $x=3,\ y=7$. **27.** $a=-8, b=-4$. **28.** $a=12,\ b=8$. **29.** x arbitrario, $y=-\frac{3}{2}x+6$. **30.** $c=-1, d=2$. **31.** $t=9$, $w=7$. **32.** $r=\frac{3}{2}, s=\frac{4}{3}$. **33.** $t=-2, w=\frac{1}{5}$. **34.** Hay 45 gallinas y 15 borregos. **35.** Uno de ellos gana \$90 al día y el otro \$87 al día. **36.** Los números son 7 y 6. **37.** El sistema no tiene solución. **38.** Tienes 39 años y tu papá tiene 73. **39.** El kilo de huevo cuesta \$5 y el de jitomate \$3. **40.** El papá dio 8 vueltas a la pista y el hijo 3. **41.** Llevaba 10 ramos y la licuadora cuesta \$66. **42.** El paquete tiene 12 huevos y el costo es \$3.90. **43.** Es un cuadrado que mide 16 unidades de lado. **44.** Los ángulos miden 70° y 90°. **45.** Hay 295 hembras y 228 machos. **46.** Los sumandos son 21 y 28. **47.** Los números son 2814 y 201. **48.** Hay 64 botellas de $\frac{1}{2}$ litro y 104 de $\frac{3}{4}$ de litro.

Ejercicios de la página 358 (sección 11.3.1)

1. $x=11, y=3$. **2.** $a=5, b=1$. **3.** $x=\frac{1}{7}, w=\frac{3}{7}$. **4.** $c=-2, d=3$. **5.** $x=0, y=7$. **6.** $r=\frac{15}{16}, s=\frac{3}{2}$. **7.** $u=1, t=1$. **8.** $w=3, z=2$. **9.** $z=-\frac{17}{5}, w=-26$. **10.** $x=\frac{1}{3}, y=3$. **11.** $x=\frac{1}{2}, y=4$. **12.** $a=\frac{11}{8}, d=\frac{7}{4}$. **13.** $w=\frac{304}{215}, z=\frac{228}{43}$. **14.** $x=4, y=-3$. **15.** $a=\frac{1}{7}, b=\frac{3}{7}$. **16.** $x=\frac{15}{7}, y=\frac{45}{7}$. **17.** $c=6, d=-1$. **18.** $w=-7, y=0$. **19.** $t=-6, u=-5$. **20.** $x=1, y=5$. **21.** $x=0, y=0$. **22.** $x=\frac{1}{3}, y=6$. **23.** $c=-\frac{5}{3}, d=-8$. **24.** $x=-\frac{2}{55}, y=\frac{30}{11}$. **25.** $a=\frac{11}{5}, b=6$. **26.** $t=-5, u=21$. **27.** $x=\frac{859}{45}, y=\frac{236}{45}$. **28.** $x=\frac{5}{2}, y=\frac{17}{2}$. **29.** $r=-50, s=-100$. **30.** $w=1$, $z=1$. **31.** $x=28, z=36$. **32.** $x=-12, w=18$. **33.** $a=4, b=-5$. **34.** $w=\frac{3}{4}, z=-2$. **35.** $c=\frac{17}{8}, d=-\frac{15}{8}$. **36.** $x=\frac{35}{6}, y=\frac{17}{3}$. **37.** $x=12, y=15$. **38.** $x=0, y=0$. **39.** $a=12, b=5$. **40.** Numerador $\frac{1}{11}$, denominador $\frac{57}{11}$. **41.** La temperatura ambos días fue de 11° C. **42.** Los números son $\frac{7}{4}$ y $\frac{3}{4}$. **43.** El número es $\frac{6}{7}$. **44.** El numerador es 1 y el denominador es 9. **45.** El numerador es 3 y el denominador es 5. La fracción es $\frac{3}{5}$. **46.** El menor es 19 y el mayor es 114. **47.** Uno aporta inicialmente \$15,500 y el otro \$11,620. **48.** Luis tiene 10 monedas de 10 centavos y 7 monedas de 20 centavos. **49.** Rosa tiene \$57 y Julia \$18. **50.** Cada naranja cuesta \$0.25 y cada toronja cuesta \$0.75. **51.** El número es 77. **52.** El número es 88. **53.** Los números son $\frac{123}{4}=30.75$ y $\frac{61}{2}=30.5$.

Ejercicios de la página 363 (sección 11.4.1)

1. $x=-\frac{2}{3}, y=\frac{19}{15}$. **2.** $x=\frac{1}{5}, y=\frac{7}{5}$. **3.** $a=33, b=94$. **4.** $r=-\frac{2}{7}, s=2$. **5.** a arbitrario, $b=3-7a$. **6.** $w=4, z=0$. **7.** y arbitrario, $x=y-6$. **8.** $x=11, y=19$. **9.** $x=\frac{91}{17}, y=\frac{127}{187}$. **10.** $a=-14, b=84$. **11.** $r=5, t=-\frac{15}{2}$. **12.** $s=\frac{1}{3}, t=5$. **13.** $w=-\frac{1}{2}, z=\frac{3}{4}$. **14.** $x=\frac{54}{25}, y=-\frac{9}{5}$. **15.** $r=-\frac{2}{3}, t=-3$. **16.** $x=0, y=-\frac{5}{2}$. **17.** $a=-\frac{115}{61}, b=\frac{570}{61}$. **18.** $x=-5, y=-8$. **19.** $r=-3, t=7$. **20.** $x=-2, y=10$. **21.** $a=2, b=2$. **22.** $x=\frac{7}{5}, y=-\frac{7}{5}$. **23.** $w=-\frac{1}{2}, z=1$. **24.** $r=\frac{11}{30}, t=-\frac{1}{6}$. **25.** $a=2,\quad b=3$. **26.** $x=0, y=12$. **27.** $w=-\frac{341}{215}, t=\frac{798}{215}$. **28.** $s=9, t=49$. **29.** $a=42, b=31$. **30.** $c=-7, d=5$. **31.** $x=3, y=9$. **32.** $x=-12, y=14$. **33.** $x=\frac{356}{95}, y=-\frac{17}{19}$. **34.** La densidad de la leche es 1.03 y la del vino es 0.991. **35.** Los lados del triángulo miden 3, 4 y 5 metros. **36.** Los lados del rectángulo miden 3 y 6 cm. **37.** El número es 62. **38.** Hay 42 personas que ganan \$30 y 33 personas que ganan \$35. **39.** La densidad del plomo es 11.35 y la de la plata es 10.47. **40.** El largo del rectángulo mide 32 metros y el ancho 24 metros. **41.** La densidad del aceite de linaza es 0.94 y la del aceite de oliva es 0.92. **42.** No existe ningún número de dos cifras que cumpla con las condiciones del problema. **43.** El sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones u arbitrario, $d=u+2$. **44.** La densidad del cristal es 193.41 y la del vidrio es 145.11. **45.** El dígito de los décimos es 4 y el de los centésimos es 2. La densidad del corcho es 0.42.

Ejercicios de la página 367 (sección 11.5.1)

1. $a=2, b=4$. **2.** $c=5, d=5$. **3.** $x=3, y=-2$. **4.** $x=4, y=2$. **5.** $w=6, z=7$. **6.** $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{2}$. **7.** $a=-4$, $c=-2$. **8.** $x=\frac{5}{3}, y=\frac{7}{8}$. **9.** $s=-2, r=3$. **10.** $a=-4, b=5$. **11.** $z=\frac{1}{3}, w=-\frac{1}{4}$. **12.** $c=-7, d=-6$. **13.** $x=\frac{1}{6}, y=\frac{3}{5}$. **14.** $x=\frac{9}{4}, y=-\frac{11}{4}$. **15.** $r=8, s=1$. **16.** $w=-\frac{672}{143}, z=-\frac{141}{79}$. **17.** $x=3, y=-3$. **18.** $r=6, s=-2$. **19.** $z=9, w=-5$. **20.** $x=-4, y=-4$. **21.** $r=9, s=11$. **22.** $w=-6, z=8$. **23.** x arbitrario, $y=\frac{2x+174}{x+12}$. **24.** $a=\frac{705}{148}, b=-\frac{367}{67}$. **25.** Los números son 3 y 2. **26.** La fracción es $\frac{8}{10}$. **27.** Las fracciones son $\frac{1}{2}$ y 1. **28.** Los números

son 8 y 5. **29.** Los dígitos son 2 y 3. **30.** Los lados del rectángulo miden 2 y 3. **31.** El perro de Juan recorre 6.5 m/seg y el perro de Ricardo recorre 7 m/seg. **32.** Los catetos miden 4 y 6. La hipotenusa mide $2\sqrt{13}$. **33.** El número es 56. **34.** El volumen del prisma es 144.

Ejercicios de la página 373 (sección 11.6.1)

1. $x=-2, y=1, z=-3$. **2.** $x=5, y=-5, z=2$. **3.** $x=6, y=-3, z=-4$. **4.** $x=-\frac{2}{57}, y=\frac{5}{57}, z=-\frac{14}{57}$. **5.** $x=\frac{321}{8}, y=\frac{117}{8}, z=\frac{21}{2}$. **6.** $x=8, y=5, z=7$. **7.** $x=1, y=10, z=12$. **8.** $x=\frac{2}{19}, y=\frac{24}{19}, z=-\frac{39}{19}$. **9.** $x=0, y=0, z=0$. **10.** $x=\frac{3}{2}, y=\frac{7}{26}, z=-\frac{9}{26}$. **11.** $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{5}, z=-\frac{1}{2}$. **12.** $x=\frac{1}{2}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{1}{6}$. **13.** $x=x, y=-\frac{3}{2}x, z=-3x$. Tiene una infinidad de soluciones. **14.** No tiene solución. **15.** No tiene solución. **16.** El área del triángulo es 24. **17.** El año en que ocurrió la anécdota es 1908. **18.** El volumen es 72 cm^3. **19.** Los ángulos del triángulo miden $\alpha=35°, \beta=70°, \gamma=75°$. **20.** El número es 569. **21.** El número es 359. **22.** Lucrecia no quiere que Rubén le llame. **23.** El área de la superficie es 486 cm^2.

Ejercicios de la página 380 (sección 11.7.1)

1. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{5}$. **2.** $x=-8, y=-6$. **3.** $x=9, y=-7$. **4.** $x=-3, y=5$. **5.** $x=-2, y=-5, z=1$. **6.** $x=7, y=-7, z=4$. **7.** $x=5, y=1, z=3$. **8.** $x=0, y=-6, z=4$. **9.** $x=\frac{182}{23}, y=\frac{139}{23}, z=\frac{42}{23}$. **10.** $x=-7, y=5, z=1$. **11.** $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{5}$. **12.** $x=-6, y=-9, z=-3$. **13.** $x=-\frac{610}{197}, y=-\frac{1434}{197}, z=\frac{91}{197}$. **14.** $x=\frac{7}{4}, y=-\frac{1}{2}, z=-\frac{13}{4}$. **15.** $x=\frac{102}{13}, y=-\frac{3}{26}, z=-\frac{285}{52}$. **16.** Luis se comió $\frac{1}{2}$ de pizza, Pedro se comió $\frac{1}{3}$ de pizza y Ernesto se comió $\frac{1}{6}$ de pizza. **17.** El kilo de plátanos cuesta \$2, el de papas cuesta \$4 y el litro de aceite \$6. **18.** Es un triángulo equilátero cuyo lado mide 11 metros. **19.** Los dígitos son 3, 4 y 5. **20.** Los catetos miden 3 y 4 cm y la hipotenusa mide 5 cm. **21.** El número es 369. **22.** Los sumandos son 2, 4 y 5. **23.** Arquímedes nació en el año 282 a. C. **24.** El hijo de Jaime recibirá \$447. **25.** La altitud del monte Everest es 8880 m.

Ejercicios de la página 383 (sección 11.8.1)

1. $FeCl_3+3NaOH \rightarrow Fe(OH)_3+3NaCl$. **2.** $4Fe+3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$. **3.** $2C_2H_2+5O_2 \rightarrow 4CO_2+2H_2O$. **4.** $NaHCO_3+NaH_2PO_4 \rightarrow Na_2HPO_4+H_2O+CO_2$. **5.** $3H_2+Fe_2O_3 \rightarrow 2Fe+3H_2O$. **6.** $Zn+2HCl \rightarrow ZnCl_2+H_2$. **7.** $2CuO \underset{\text{calor}}{\rightarrow} 2Cu+O_2$. **8.** $NH_3+HCl \rightarrow NH_4Cl$. **9.** $4HCl+MgO+MgCO_3 \rightarrow 2MgCl_2+2H_2O+CO_2$. **10.** $3Pb^0+2O_2 \rightarrow Pb_3O_4$. **11.** $C_6H_{12}N_4+6H_2O \rightarrow 6H_2CO+4NH_3$. **12.** $CaCO_3 \rightarrow CaO+CO_2$. **13.** $KClO_3+6HCl \rightarrow 3H_2O+3Cl_2+KCl$. **14.** $2NaOH \rightarrow Na_2O+H_2O$. **15.** $2Na+2H_2O \rightarrow 2NaOH+H_2$.

Ejercicios de la página 389 (sección 11.9.1)

1. $x=0, y=-4$, o bien $x=4, y=0$. **2.** $x=\frac{3-4\sqrt{29}}{5}, y=\frac{6+2\sqrt{29}}{5}$, o bien $x=\frac{3+4\sqrt{29}}{5}, y=\frac{6-2\sqrt{29}}{5}$. **3.** $x=-\frac{3}{34}+\frac{5}{34}\sqrt{305}$, $y=\frac{5}{34}+\frac{3}{34}\sqrt{305}$, o bien $x=-\frac{3}{34}-\frac{5}{34}\sqrt{305}$, $y=\frac{5}{34}-\frac{3}{34}\sqrt{305}$. **4.** $x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{17}$, $y=\frac{15}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}$, o bien $x=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\sqrt{17}$, $y=\frac{15}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}$. **5.** $x=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{57}$, $y=\frac{11}{24}-\frac{1}{24}\sqrt{57}$, o bien, $x=-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{57}$, $y=\frac{11}{24}+\frac{1}{24}\sqrt{57}$. **6.** $x=-1, y=1$. **7.** No tiene solución. **8.** $x=-12+2\sqrt{31}$, $y=-32+6\sqrt{31}$, o bien $x=-12-2\sqrt{31}$, $y=-32-6\sqrt{31}$. **9.** $x=-\frac{9}{95}-\frac{14}{95}\sqrt{61}$, $y=\frac{42}{95}+\frac{2}{95}\sqrt{61}$, o bien $x=-\frac{9}{95}+\frac{14}{95}\sqrt{61}$, $y=\frac{42}{95}-\frac{2}{95}\sqrt{61}$.

Ejercicios de la página 392 (sección 11.10.2)

1. $x<-\frac{29}{17}, y>\frac{32}{17}$. **2.** $x<13, y>-3$. **3.** $x<-3, y>2$. **4.** $x>5, y<-\frac{3}{5}$. **5.** $x<\frac{1}{2}, y>\frac{1}{3}$. **6.** $x<4, y<1$. **7.** $x<\frac{1}{3}, y>\frac{3}{4}$. **8.** $x>1, y>6$. **9.** $x<-\frac{22}{29}, y<\frac{82}{29}$. **10.** Hay 4 rectángulos posibles

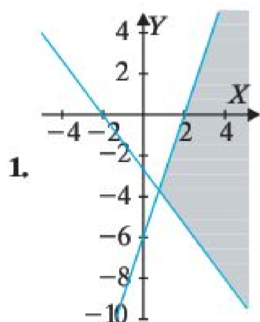
a	10	9	8	7
b	4	3	2	1

11. El menor número es 26. **12.** Hay tres posibilidades: 62, 71 u 80. **13.** El cateto

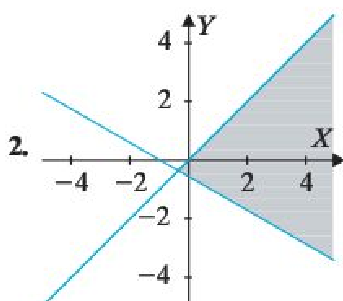
menor mide 8 cm y el mayor 15 cm. **14.** Los lados del triángulo isósceles miden 7, 7 y 1 unidades. **15.** El papá tiene actualmente 30 años y el hijo 12. **16.** Puede haber hasta 24 camarones y hay por lo menos 131 ranas. **17.** El único rectángulo que cumple las condiciones tiene dimensiones $a = 3$, $\ell = 5$.

Ejercicios de la página 395 (sección 11.10.4)

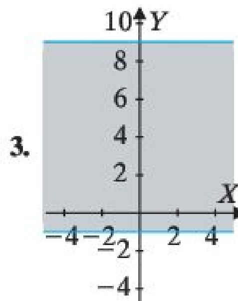
1.



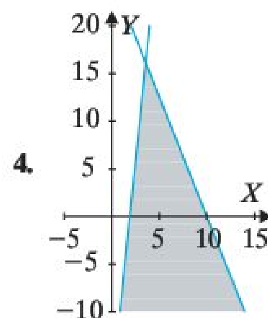
2.



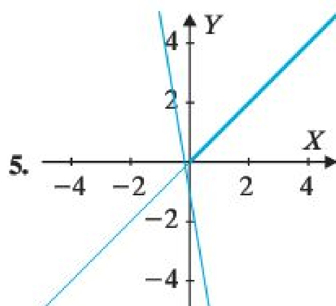
3.



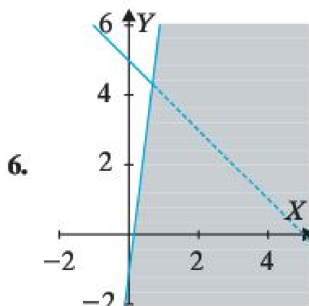
4.



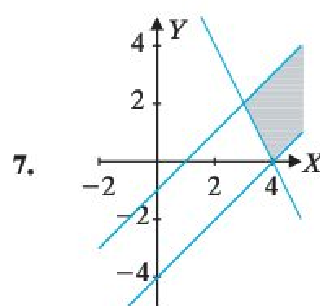
5.



6.

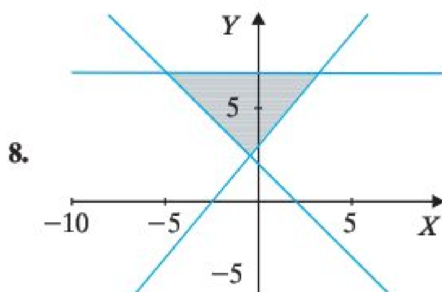


7.



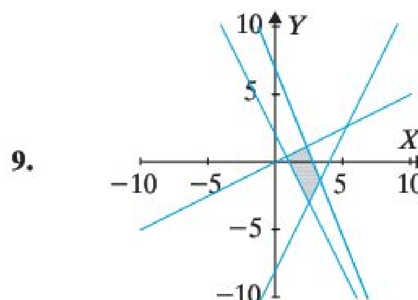
$y > x - 4$, $y > -2x + 8$, $y < x - 1$.

8.



$y > \frac{6}{5}x + 3$, $y > -x + 2$, $y < 7$.

9.



$y < \frac{1}{2}x$, $y > -2x + 2$, $y < -\frac{5}{2}x + 7$, $y > 2x - 8$.

Ejercicios de la página 399 (sección 11.10.6)

1. El máximo es 6 y se obtiene en el punto $(0,2)$. **2.** Deben fabricarse 175 sillas normales y 25 de lujo. **3.** Tenemos que fabricar 3 del primero y 28 del segundo. **4.** En este caso hay dos vértices donde se alcanza el máximo, 800. De hecho, en todo el segmento que une a los puntos $(30,10)$ y $(20,20)$ la función objetivo vale 800, así que se pueden utilizar diversas combinaciones de tiempo en las máquinas para lograr este máximo.

Ejercicios de repaso de la página 399 (sección 11.11)

1. $x = \frac{7}{12}$, $y = \frac{15}{4}$. **2.** $y = \frac{3}{4}$, $w = \frac{4}{3}$. **3.** $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{8}{3}$. **4.** $x = a + 2c$, $y = a + 3c$. **5.** $x = \frac{9}{7}a$, $y = \frac{18}{7}a$. **6.** $r = 6$, $s = 7$. **7.** No tiene solución. **8.** $r = -5$, $t = 4$. **9.** $w = -2$, $z = -1$. **10.** x arbitrario, $y = \frac{9-x}{2}$. **11.** $a = -8$,

$b=-7$. **12.** $r=\frac{1}{3}, s=\frac{1}{2}$. **13.** $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}\ z=\frac{1}{5}$. **14.** $x=\frac{45}{26}, y=-\frac{57}{26}, z=-\frac{15}{26}$. **15.** $x=5, y=5, z=3$. **16.** $x=1, y=0, z=5$. **17.** $x=6, y=6, z=6$. **18.** $x=\frac{3}{2}, y=-1, z=\frac{5}{2}$. **19.** El número es 95. **20.** El número es 93. **21.** El numerador es 8 y el denominador es 9. La fracción es $\frac{8}{9}$. **22.** Los sumandos son 14 y 11. **23.** Hay que tomar 300 ml de cada una. **24.** $Ca_3(PO_4)_2+3H_2SO_4 \rightarrow 2H_3PO_4+3CaSO_4$. **25.** $2SO_2+O_2 \rightarrow 2SO_3$. **26.** Einstein murió en 1955. **27.** El primer obrero lo haría en 15 días, el segundo en 30 y el tercero en 20. **28.** Las resistencias usadas tenían una capacidad de 24 y de 12 ohms. **29.** Los lados del rectángulo miden 5 y 30 cm. **30.** Son 25 gatos y costaron \$30. **31.** Los números son 144 y 60, o bien -144 y -60. **32.** El número es 88.

Índice

A

Abierto, intervalo, 84
Ácido, 143
Agrupamiento, 75
  factorización, 201
  orden de las operaciones, 75
Ajenos, conjuntos, 11
Algebraico, número, 79
Algoritmo de Euclides, 61
Algoritmos de la raíz cuadrada, 279
ANSI, código, 40
Aplicaciones
  a la física, 335
  a la geometría, 332
Área
  de un cilindro, 138
  de un círculo, 109
  de un trapecio, 107
  de un trapezoide, 138
  de un triángulo, 138
  de una pirámide con base cuadrada, 138
ASCII, código, 40

B

Balanceo de ecuaciones químicas, 381
Base, 206
  de un sistema de numeración, 206
Bases, 26
  dieciséis, 38
  dos, 30
Binario, sistema, 30
  operaciones, 30
Binomio, 162
Byte, 40

C

Caída libre, 106, 322
Características de un logaritmo, 93
Cardinalidad de un conjunto, 3
Casos particulares, 211
Cerrado, intervalo, 84
Cociente
  de potencias, 171
  de raíces *n-ésimas*, 290
Código
  ANSI, 40
  ASCII, 40
Coeficiente, 161
Combinación de distintos métodos de factorización, 223
Complejo, número, 80
Complejos, números, 44
Complemento de un conjunto, 7
Computadoras, 40
Conjunto, 1
  cardinalidad, 3
  complemento, 7
  elementos, 1
  finito, 3
  unión, 9
  universal, 5
  vacío, 3
Conjuntos
  ajenos, 11
  comparables, 6
  diferencia, 7
  equivalentes, 4
  incomparables, 6
  intersección, 10
  producto cartesiano de, 18
Consecuencias de la propiedad
  de la multiplicación, 118
  de la suma, 113
  de orden, 146
Control de calidad, 151
Coordenadas de un punto, 126
Correspondencia biunívoca, 4
Cuadrado
  de una diferencia, 189
  de una suma, 187

D

De Morgan, leyes de, 14
Densidad, 360
Desigualdad
  miembro de una, 145
  resolución de una, 145

Diagramas de Venn, 5
Diferencia de conjuntos, 7
Diferencia de cuadrados, 220
  factorización de una, 220
Diofanto de Alejandría, 125
Discriminante, 325
Distancia
  de la Tierra al Sol, 301
  entre dos puntos, 285
  recorrida por un móvil, 107, 116
División
  de expresiones racionales, 241
  de monomios, 170
  de números reales, 72
  de polinomios, 250
    de varias variables, 254
  leyes de los signos, 73
  propiedad de cancelación, 171
  sintética, 257

E

Ecuación
  cómo despejar una variable, 111
  con dos incógnitas, 348
  cuadrática, 204
  cúbica, 204
  de cuarto grado, 204
  de primer grado, 111
  de una sola variable, 111
    en ambos lados, 121
  general de segundo grado
    solución general, 324
  lineal, 128, 204
  miembros de una, 111
  polinomial, resolución, 204
  resolución de una, 111
  sin solución, 136
Ecuaciones, sistemas de, 351, 360, 356, 374
Einstein, Albert, 400
Ejes coordenados, 125
Elementos de un conjunto, 1
Eliminación gaussiana, 370
Enteros, números, 43
Evaluación de expresiones algebraicas, 104
Exponente fraccionario, 300
Exponentes, 297, 301
  leyes de los, 301
  negativos, 298
  no enteros, 297
Expresión algebraica, 101
Expresión racional, 231
  no definida, 233
  simplificada, 236
Expresiones algebraicas
  complicadas, 265
  evaluación, 104
  simplificación, 108
Expresiones radicales
  reducción de, 295

F

Factorización, 226, 227
  casos particulares, 211
  combinando distintos métodos, 223
  de a^4+b^5, 227
  de a^4-b^4, 227
  de a^5-b^5, 227
  de diferencias de cuadrados, 220
  de trinomios, 216
  de trinomios cuadrados perfectos, 219
  de un monomio, 199
  de un polinomio, 200
  por agrupamiento, 201
Función objetivo, 397

G

Galileo Galilei, 374
Gauss, Kart Friedrich, 368
  método de, 370
Geometría, aplicaciones, 332
Grado
  de un monomio, 173
  de un polinomio, 173
  de una variable, 173
Grados
  centígrados, 104
  Fahrenheit, 104

H

Hexadecimal, sistema de numeración, 38

I

Identidad, 137
Igualdad de conjuntos, 5
Iluminación, 335
Inecuación, 145
Interés compuesto, 162, 165, 288
Interpretación geométrica
  de $(a+b)(a+c)$, 195
  de $(a+b)(a-b)$, 193
  de $(a+b)^2$, 188, 190
  de $(a+b+c)$, 197
  de la división, 72
  de la multiplicación, 52
  de la raíz cuadrada, 278
  de la suma, 45
Intersección de conjuntos, 10
Intervalo
  abierto, 84
  cerrado, 84
  semiabierto, 84
Inverso multiplicativo, 70
Irracionales, números, 44

K

Kepler
  movimiento de los planetas, 107
  tercera ley de, 107, 304

L

Lavoisier, Antoine de, 382
Lenguaje algebraico, 102
Ley de Kepler, 304
Ley de los exponentes
  para el producto de potencias, 163
  para la potencia de un producto, 168
  para la potencia de una potencia, 166
Leyes
  de De Morgan, 14
  de los exponentes, 301

de los signos de la división, 73
de los signos de la multiplicación, 54
Logaritmo
características, 93
mantisa de un, 93

M

Mantisa de un logaritmo, 93
Máximo Común Divisor, 61
de monomios, 199
Máximo Factor Común, 61
MCM de un polinomio, 200
Media armónica, 250, 322
Método
de completar el cuadrado, 319
de determinantes, 374
de Gauss, 370
de igualación, 351
de reducción, 356
de suma y resta, 356
de sustitución, 360
Miembro
de una desigualdad, 145
de una ecuación, 111
Monomio, 162
división de un, 170
factorización, 199
grado de un, 173
grado de una variable en un, 173
Monomios, 161
Movimiento, 222
Multiplicación
de polinomios, 181
propiedad de la, 117
propiedad del cero, 203

N

Naturales, números, 43
Newton, segunda ley de, 103
Notación científica, 88
Numeral, 21
Número
algebraico, 79
complejo, 80
parte imaginaria, 310
parte real, 310
cuadrado perfecto, 280
trascendente, 79
valor absoluto, 82
Números
complejos, 44, 309
producto, 311
suma, 311
enteros, 43
impares, 139
irracionales, 44
naturales, 43
pares, 139
primos entre sí, 61
primos relativos, 61
racionales, 44
reales, 44
recíprocos, 70
valor absoluto, 45

O

Operaciones
con radicales, 289
en el sistema binario, 30
en otras bases, 34
Opuesto de un polinomio, 176
Orden
ascendente, 174
de las operaciones, 75
de una raíz, 289
descendente, 174
Origen, 125
Otros productos notables, 197

P

Parábola vertical
foco, 329
lado recto, 329
parámetro, 329
vértice, 329
Parte
imaginaria de un número complejo, 310
real de un número complejo, 310
Pendiente de una recta, 131
Periodo de un péndulo, 287
Peso específico, 360
Pitágoras, teorema de, 275
Polinomio, 162
factorización, 200
grado de un, 173
opuesto de un, 176
términos de un, 162
Polinomios
multiplicación de, 181
regla para restar, 177
regla para sumar, 176
resta de, 175
suma de, 175
Porcentaje, 140
Potencia
de un producto, ley de los exponentes, 168
de una potencia, 166
ley de los exponentes para, 166
Potencias, cociente de, 171
Presión, 107
Primer grado, ecuación, 111
Problemas
de mezclas, 143
en verso, 212, 322, 346
resolución de, 134
sin solución, 136
Producto
cartesiano de conjuntos, 18
de $(a+b)(a+c)$, 194
de potencias, ley de los exponentes para, 163
de raíces *n-ésimas*, 289
de un monomio por un polinomio, 178
de una suma por una diferencia, 192
Productos notables, 187, 189, 197, 198, 207, 227
$(a+b+c)^2$, 197
cuadrado de una diferencia, 189
cuadrado de una suma, 187
cubo de una diferencia, 198

cubo de una suma, 198
diferencia de cuadrados, 192
Propiedad
de cancelación en la división, 171
de la multiplicación, 117, 118
de la suma, 112
del cero en la multiplicación, 203
Propio, subconjunto, 6
Proporción, 80
Punto, coordenadas de un, 126

R

Racionales, números, 44
Racionalización, 292
Radical, 289
Radicando, 289
Raíces
de un polinomio, 259
enteras, 260
n-ésimas
cociente de, 290
producto de, 289
Raíz cuadrada, 275, 276
de cuadrados, 283
de un cociente, 282
de un producto, 280
de una potencia par, 284
interpretación geométrica, 278
Raíz cuarta, 288
Raíz cúbica, 288
Raíz *n-ésima*, 288
de raíces *n-ésimas*, 290
principal, 289
Raíz quinta, 288
Razón de oro, 334
Razón, 80
Reales, números, 44
Recíproco de un número, 70
Recta
en el plano, 128
pendiente de una, 131
Rectángulo de oro, 334
Rédito, 288
Reducción de expresiones radicales, 295
Regla
de la potencia de un cociente, 240
para dividir expresiones racionales, 241
para expresiones racionales, 239
para resta de polinomios, 177
para suma de polinomios, 176
para sumar expresiones racionales con el mismo denominador, 244
Reglas para dividir dos polinomios, 251
Resistencias en paralelo, 250, 400
Resolución
de una desigualdad, 145
de una ecuación, 111
de una ecuación polinomial, 204
Resta de polimonios, 175
Restricciones, 397

S

Segunda ley de Newton, 103
Semiabierto, intervalo, 84
Signos de la multiplicación, leyes, 54
Simplificación de expresiones
algebraicas, 108
racionales, 235
Sistema(s) de numeración, 21, 206
binario, 30
decimal, 26
hexadecimal, 38
Sistemas de ecuaciones
método de determinantes, 374
método de Gauss, 370
método de igualación, 351
método de reducción, 356
método de suma y resta, 356
método de sustitución, 360
otros, 364
Solución general de la ecuación general de segundo grado, 324
Subconjunto propio, 6
Subconjuntos, 5
Suma de polinomios, 175
Suma y resta de expresiones racionales
con distinto denominador, 246
con el mismo denominador, 243
Suma, propiedad de la, 112

T

Tasa de interés, 288
Teorema
de Pitágoras, 275
del factor, 259, 263
del residuo, 263
Términos, 107
de un polinomio, 162
semejantes, 107
Tiro vertical, 206, 216
Trascendente, número, 79
Trinomio, 162
Trinomios cuadrados perfectos, 211, 219

U

Unidades astronómicas, 304, 308
Unión de conjuntos, 9
Universal, conjunto, 5

V

Vacío, conjunto, 3
Valor absoluto, 82
de un número, 45
Variable, despliegue de una, 111
Variables, 161
Venn, diagramas de, 5
Volumen
de un cilindro, 107, 138
de un cono, 109, 138
de un gas, 109
de un prisma, 170

Desde su edición original, el objetivo de este texto ha sido el de mostrar que el álgebra, desde su nivel básico, es una herramienta muy útil para el estudio tanto de otras áreas de la propia matemática como de otras ciencias.

En esta *tercera edición* se han agregado nuevas secciones y muchas se han actualizado, con la intención de mejorar el libro y de satisfacer la mayor cantidad de necesidades y expectativas de profesores y de estudiantes. Además esta edición incluye un software interactivo que despertará un gran interés en los lectores.

La forma en que se presentan los temas propicia en el lector la habilidad de traducir al lenguaje algebraico los problemas planteados en lenguaje ordinario y manipular de manera correcta las variables y los números.

Para motivar la presentación y desarrollo de los conceptos y métodos del álgebra, cada sección inicia con un problema cuya naturaleza varía de acuerdo con el tema: algunos tratan sobre física, otros sobre química, economía e incluso astronomía. Las secciones no son extensas con el fin de que los conocimientos recién adquiridos puedan asimilarse y ponerse en práctica de inmediato.

Prácticamente todos los capítulos finalizan con dos secciones: *Resumen y Ejercicios de repaso*; ambas permiten reafirmar lo aprendido y propician una reflexión sobre los temas y problemas expuestos. A lo largo del libro se aprovecha la intuición geométrica y se muestra la vinculación de la geometría con el álgebra.

Los más de 3750 ejercicios y problemas de que consta el libro ofrecen al profesor la oportunidad de seleccionar una buena cantidad de ellos para trabajar en clase, dejar otros para que el estudiante los resuelva de manera individual, y todavía tendrá a su disposición material suficiente para preparar los exámenes respectivos. Mediante una selección adecuada de los temas puede ser usado desde el nivel de secundaria hasta el primer año de diversas carreras universitarias.

ISBN 978-970-26-1132-5

90000

9 789702 611325

PEARSON
Educación ®